职业教育公共基础课“十二五”规划教材

应用数学基础教程

学习指导书

杜吉佩◎主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

职业教育公共基础课“十二五”规划教材

应用数学基础教程学习指导书

主　　编　杜吉佩
参　　编　原玉杰　陈　强
主　　审　杨尚俊

机 械 工 业 出 版 社

本书是与杜吉佩主编的《应用数学基础教程》配套的学习指导书。全书计7章，每章都分为5个部分，包括学习目标、重点与难点解析、质疑与解惑、典型例题选讲及本章测试题。编写本书的主要目的是引导学生掌握本课程的基本概念、基本学习方法及重点内容，诠释教材中的疑难问题，纠正解题中易出现的错误。

本书既是与教学同步的辅导书，也是阶段复习的指导书，有助于学生掌握知识框架、理清知识脉络、培养学生分析问题和解决问题的能力。

本书适合作为职业院校学生数学课程辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础教程学习指导书/杜吉佩主编. —北京：机械工业出版社，2011.5

职业教育公共基础课“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-34028-7

Ⅰ.①应… Ⅱ.①杜… Ⅲ.①应用数学—职业教育—教学参考资料 Ⅳ.①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第058684号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑：宋 华 宋学敏 责任编辑：孙志强

责任校对：刘 岚 封面设计：王伟光

责任印制：乔 宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2011年6月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 9印张 · 172千字

0001—3000册

标准书号：ISBN 978-7-111-34028-7

定价：18.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销售一部：(010)68326294

销售二部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

前　言

本书是与杜吉佩主编的《应用数学基础教程》配套的学习指导书.

本书是按教材的章节次序编写. 在其绪论部分给出了本课程的主要内容、主要特点及其学习方法，首先对学生进行学习方法上的指导，使他们在开课之初对本课程有所了解，以增强学好本课程的信心. 书中每章分为五个模块进行编写，即学习目标、重点与难点解析、质疑与解惑、典型例题选讲及本章测试题.

学习目标指明了本章的教学基本要求，这是学生必须掌握的基本知识，给学生的学习指明方向及努力的目标；重点与难点解析为学生掌握重点内容、突破难点内容提供帮助，以提高学生学习的主动性与自觉性，从而掌握本课程的知识体系；质疑与解惑是针对初学者易疑惑的问题进行剖析释疑，使“无疑者须教有疑，有疑者却要无疑”，这有助于读者理清知识脉络，解除疑惑之问题，掌握基本概念、基础理论和主要方法；典型例题选讲，则对比较典型的习题进行剖析、解答，并对有些习题给出了多种解法，加以评注，旨在帮助读者明确解题思路、分析问题的方法以及在解题过程中应该注意的事项，进而提高其解题能力及综合思维能力，学会分析问题与解决问题的基本方法，对以后的学习与工作是大有裨益的；本章测试题涵盖了本章85%的知识点，以供读者检测学习效果之用.

本书是与教学同步的学习辅导书，也是阶段性复习的指导书，更是不与学生谋面的辅导教师. 它有助于读者对本课程的基本概念、基本理论、基本研究方法有更全面、更深刻的理解与掌握.

参加本书编写工作的有阜新高等专科学校的原玉杰、陈强，渤海船舶职业学院的杜吉佩，全书的结构设计、统稿、定稿由杜吉佩完成.

安徽大学杨尚俊教授仔细阅读了全部初稿，并提出了许多修改意见，编者在此表示深深的谢意.

在本书的编写过程中得到编者所在院校领导的大力支持及众多专家、同行的帮助，编者在此一并致谢.

限于编者的水平，挂一漏万在所难免，恳请读者指正.

编　者

目 录

绪论：怎样学好高等数学

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性、广泛的应用性等三大特征．人类的社会生产实践不但是数学的发源地，而且是数学发展的主要推动力．反之，发展良好的数学科学能大力促进社会的生产发展，显著提高国家的经济竞争力．时至今天，“数学是高科技的基础”已成为人们的普遍共识．对于工科大学生来说，学好数学则是大家进一步学习科学技术知识和从事技术工作的必要条件．

告别中学，进入大学，开始学习高等数学的时候，如果能对它的内容和方法有所了解，明确学习目标，理解重点内容，突破学习上的难点，找到正确的学习方法，就能学好本课程．这就是我们编写这本学习指导书的主要目的．

一、高等数学的主要内容

“高等数学”课程涵盖了数学分析、空间解析几何和常微分方程三个数学分支的大部分内容．其知识系统分为下列五个模块．

1）一元函数微积分学——第一阶段为函数、极限与连续，其特点是概念比较多；第二阶段为微分学及应用；第三阶段为积分学及应用．这后两阶段内容的特点是计算方法多，计算量大．因此，学好这个模块的关键，首先是搞清概念，学会计算，其次是领悟推理方法，并做一些应用练习．通过本模块的学习，掌握微积分的基础知识及基本思维方法，培养和锻炼学习与研究的能力．

2）空间解析几何——为了今后学习而引入的内容，其特点是数形结合，关键是体会应用数形结合来分析问题的方法，学习时要努力提高空间想象能力．

3）多元函数微积分学——一元函数微积分学的推广．其主要内容为多元函数微分学及应用，二重积分及应用．这个部分与一元函数微积分学有很多相似点，又有它自己的特点．学习时要注意将两者进行对比，同时找出相似之处和相异之处．要注重观点、概念、计算和应用的结合．

4）级数——研究函数性质及数值计算的工具．其主要内容是级数的概念，数值级数的审敛方法，幂级数、傅里叶级数和它们的简单应用．

5）微分方程初步——主要内容为微分方程的概念、一阶微分方程的解法、二阶常系数微分方程的解法及应用．它的特点是应用相当广泛．通过这个模块的学习，可以初步掌握建立数学模型解决实际问题的一些方法．

在本课程的学习过程中，随着数学知识面的扩大，要注意培养自己科学的学习与研究能力，学会应用数学工具解决实际问题．

二、高等数学的特点

高等数学是变量数学，中学阶段学的初等数学则是常量数学．从观点到方法，高等数学都与初等数学有着质的差异．作为变量数学的高等数学必然要涉及运动、无限过程、极限过程、多维空间等新概念，特别要涉及多种因素(变量)的相互作用．所以，学习高等数学有一定难度．

在学习高等数学时，应深刻理解下述几对矛盾及其转化关系．

1．常量与变量

高等数学能深刻体现常量与变量互相转化的观点．例如，求变速直线运动的瞬时速度，先视“变”为“常”（取很小的时间间隔,在此间隔上变量可视为常量)，再通过“常”（极限过程)达到“变”的目的(求得瞬时速度)．这在初等数学中是办不到的．

2．直与曲

高等数学中将直线和平面作为曲线和曲面的特例，并认为在一定条件下“直”与“曲”是可以互相转化的．例如，在很小的范围内，可以“直”代替“曲”，通过无限累加又将“直”还原为“曲”．

3．有限与无限

高等数学中经常运用分析运算(无限运算)——极限过程，这是高等数学的重要特点，初等数学只能进行有限次运算．在高等数学中有限运算与无限运算通过极限的方法实现互相转化．例如，将周期函数展开为傅里叶级数．

4．特殊与一般

从初等数学到高等数学，还意味着从特殊到一般的过渡．

5．具体与抽象

抽象性是数学的本质特征之一，而高等数学更加抽象，其结果更具一般性．因此，应用也就更为广泛．

三、高等数学的学习方法

（一）一般原则

子曰：“学而不思则罔，思而不学则殆”；“学而时习之”．这些话语的核心可以理解为三个字：学、思、习，即对知识进行积累、加工、运用．学好高等数学的关键是狠抓基本理论知识的学习和基本技能的训练．

（二）具体方法

1．如何接收知识

大学的授课特点是进度快、内容多，故应先进行预习．预习时要边看书边动手演算推导，看看自己有哪些内容看懂了，哪些没有看懂，带着问题有目的地听课．听课时要作好笔记，简要记下重点、难点、关键、思考问题的主要思路等．复习时要整理笔记，补充一些材料和自己的体会．

2. 如何消化材料

多动脑，勤思考，温故知新，由此及彼，由表及里. 首先，要把书本由薄变厚(举一反三)；然后，再将书本由厚变薄(消化、理解). 对于这一过程，是要下一番苦功夫的，应主要把握如下几方面内容.

(1) 掌握基本概念. 数学讲究逻辑思维，而逻辑思维无非是(在感性认识的基础上)抽象出概念，运用概念作出判断，进行推理. 所以概念是思维的基本元素，能否学好数学，在很大程度上取决于对数学概念的理解深度. 这一点很容易被初学者忽视. 由于数学概念比较抽象，而我们又是从书本上接受这些概念，缺乏直接经验，这种先天不足，更需要后天来弥补. 因此，学习数学概念一定要反复揣摩，反复领会其含意，才能确切理解.

(2) 善于运用数学语言. 普通思维是靠词语，数学思维则靠符号语言. 符号语言简明准确，自成体系. 高等数学中的符号语言名目繁多，蕴意精细. 学习时要掌握把符号语言与普通语言进行互译的能力. 值得注意的是：很多的数学语言是以“构件”的形式反复出现的. 如运算符号，演算公式，以及程序化的论证(如数学归纳法)，模式化的叙述(如充分必要条件)，格式化列表(如函数作图时按一定的程序所列的表格)等，用时要熟练地“装配”起来.

(3) 搞清来龙去脉. 要将知识系统化，由点到面，要穿成串、接成链、织成网. 其办法如下：

理脉络. 极限的方法贯穿于高等数学始终，其主要概念(微分、积分等)的建立，主要问题的解决都离不开它. 这条脉络一定要清楚.

奠基石. 如两个重要的极限就是微分学的基石之一，有些基本初等函数的导数就是通过这两个重要极限得到的，要不断探讨.

建台阶. 如一元函数微分，二元函数微分，定积分，二重积分，其定义方法都是一样的，但又逐步深入和提高. 所以，建好一元函数微积分学这个基础台阶至关重要.

树大梁. 如向量的方法在空间解析几何中是主干，由它得到直线与平面的方程及主要性质.

作比较. 如将空间解析几何与平面解析几何、一元函数与多元函数的结论作比较，得出它们的异同之处.

明拓广. 如空间解析几何是平面解析几何的拓广、多元函数微分学是一元函数微分学的拓广、二重积分是定积分的拓广等. 关键是要搞清楚在什么地方拓广和怎样拓广.

划特例. 如平面是曲面的特例，罗尔(Rolle)定理是拉格朗日(Lagrange)定理的特例等.

知蕴含. (所谓“蕴含”，通俗地说，就是“可推出”，用记号“$\Rightarrow$”表示)如对闭

区间上函数成立：可微⇒连续⇒可积，反之则不然.

续成链. 如微分中值定理、牛顿—莱布尼茨(Newton—Leibniz)公式、积分中值定理等，可连成一串，成为微积分的基本定理.

举反例. 如连续不一定可微，举一反例就能说明.

按应用归类. 如导数的应用，名目繁多，而在函数的作图中将各类应用集中一起使用.

洞悉知识的交叉. 如微分学与解析几何的某些结合，便产生书中介绍的微分几何初步知识(如曲率、切线、切平面、法线等).

凡此种种，方法多样，要灵活运用.

(4) 几何直观是领悟数学最有效的渠道之一，要善于寻找各种概念的几何解释.

以上各项，都要靠仔细解剖书本，抓要害，求甚解，再用自己熟悉的数学语言归纳整理，使知识系统化、条理化，了如指掌.

3. 如何运用所学知识

(1) 解题. 解习题是学好数学的重要环节. 华罗庚教授在为前苏联著名数论专家维诺格拉陀夫的名著《数论基础》的译本写的序言中说："学习数学而不做书中的习题，等于入宝山而空返."欲学好高等数学，就要适当多做练习题，提高解题能力，加深对知识的理解. 要注意积累解题经验，及时加以总结. 在这方面提出下列几点：

抓题型. 分得清题目类型，就能以少胜多，成片地获取知识. 如常微分方程按型求解.

抓方法. 如积分最常用的方法是换元和分部，还有很多特殊技巧.

抓步骤. 如求最大(小)值的应用题，须经哪几步才能得到结果，应予以小结.

抓规律. 如导数是构造性定义的(分三步：求增量、算比值、取极限)，决定了求导数可以"机械化"，这是一般规律. 不定积分是非构造性定义的，作为导数的逆运算，无一般规律可循，但一般中又有特殊，比如何时用链式法则求导、取对数求导、利用隐函数求导，都有一定规律. 又如定积分也是构造性定义的，但由于极限过程中有两个"无关"(与分法无关、与中间点取法无关)，一般按定义难以算出，有了牛顿—莱布尼茨(Newton—Leibniz)公式才与原函数挂上钩. 再如微元分析法(积分元素法)在定积分、微分方程的应用中是基本的一环，要注意，你所找到的 ΔS 应该满足 $\Delta S=f(x)\Delta x+o(\Delta x)$，否则就找错了.

解题之后，还应考虑有无其他的解法，并比较各解法的优劣、异同，做到举一反三. 发现错误，不但要及时改正，更要找出错误的原因，"吃一堑，长一智"，有疑问一定要记下来继续研究.

(2) 搞些“小改革”，如更改题目条件，探索能否求解，将导致什么结论等.

(3) 重视联系实际. 经常考察各种数学知识的现实背景，设法解决一些实际问题.

(4) 开展研究工作. 这是更高的境界，有兴趣的读者可以参看华罗庚教授的《学习和研究数学的一些体会》(《数学通报》1979,1)等文.

总之，要开动脑筋，独立思考，创造性地学习. 提高知识质量，培养创新的意识，开发智力(观察力、记忆力、思维力、想象力等)，增强能力(数学的逻辑思维能力,运算能力,空间想象能力,应用数学知识解决实际问题的能力等)，锲而不舍，功到自然成.

第 1 章　空间向量与空间解析几何初步

一、学习目标

1. 理解空间向量的概念，熟悉向量及向量的几何表示方法，向量的模与单位向量，向量的共线与向量的共面，两向量相等的基本概念.

2. 了解空间直角坐标系的概念，掌握向量的坐标表示方法，理解向量的方向角和方向余弦的概念.

3. 掌握向量的线性运算(包括几何表示与坐标表示下的运算)及其规律和向量的共线与平行的条件.

4. 理解向量的数量积的概念，熟练掌握向量的数量积的计算方法，了解向量积的概念，掌握向量垂直的条件，会求两向量的夹角.

5. 了解曲面及其方程、曲线及其方程的概念，知道以坐标轴为旋转轴的旋转曲面、母线平行于坐标轴的柱面及常用的二次曲面，知道空间曲线的一般方程.

6. 掌握空间平面与直线的概念、根据条件求平面方程的方法(点法式,一般式)和直线方程的方法(点向式,参数式,一般式).

二、重点与难点解析

1. 空间向量是讨论空间的平面与直线、空间的曲面与曲线等问题的有力工具. 使用它可以使这些空间几何问题变得简单明晰. 实际上，空间向量是平面向量的拓展，向量的线性运算及数量积的运算也可直接推广. 学习时常与平面向量的相关结论进行对比，有助于理解这些基本概念.

掌握和运用解决空间几何问题的方法与技巧. 应用时，要注意用好方向向量和法向量.

2. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的是一个向量，这是它与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间的数量积的本质区别. 两非零向量的向量积是垂直于两向量所在的平面的新向量，其方向按右手法则确定. 新向量的模是以两向量为边的平行四边形面积. 两向量的向量积不满足交换律，但满足反交换律，这也是向量积与数量积另一个质的区别.

3. 与平面 Π 垂直的向量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面 Π 的法向量，法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标也叫法向方向数. 一般说来，平面的方程是由点法式引入的，即知道平面的法向量$(A,B,$

C)和平面内的已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，取任意点 $M(x,y,z)$，作向量$\overrightarrow{M_0M}$与法向量的数量积，所得到的方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

称为平面的点法式方程.

将平面的点法式方程化简，整理就得到平面的一般方程. 讨论平面与平面，直线与平面之间的位置关系等问题时，采用平面方程的哪种形式视具体的题设条件而定.

4. 对空间直线的方程来说，主要有一般式和点向式两种. 直线的一般式方程是两个平面方程联立表示的. 点向式直接由平面直线的点向式方程推广而得到，也就是只要给出直线的方向向量和直线上的一个已知点，依向量共线的充分必要条件而得的下列方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

称为平面的点向式方程. 这个方程在形式上是对称的，因此又叫做对称式方程. 由点向式方程中的方向向量可以直接得到直线的方向数. 这一点在讨论直线与直线、直线与平面的位置关系时是相当方便的. 读者可以根据自己解题的经验来总结体会.

5. 讨论旋转曲面的方程时，要注意弄清楚的是哪个平面上的曲线绕哪个轴旋转，正确地按所给的规律写出此旋转曲面的方程.

6. 讨论柱面方程时，要注意柱面与平面曲线的区别. 在平面上，方程表示曲线；在空间里，方程则表示母线沿该曲线垂直运动而得到的柱面. 要弄清楚柱面方程的母线与哪个轴平行.

三、质疑与解惑

1. 空间解析几何的特点及在本课程中的作用如何?

解析几何是用代数的方法研究几何图形的科学. 用代数方法研究平面几何图形就叫做平面解析几何；研究三维空间的几何图形就叫做空间解析几何. 整个解析几何的理论基础主要建立在点与有序实数组之间的一一对应关系和代数方程与曲面、曲线之间的一一对应关系，从而能用代数的方法来研究几何问题.

解析几何的基本问题不外乎下述两类：

(1) 已知点的轨迹，如何建立代数方程?

(2) 已知代数方程，如何确定几何轨迹?

平面解析几何能给出一元函数的几何解释，空间解析几何能给出二元函数的几何解释. 使人们能够直观地理解利用微积分学推导出来的公式或结论的几何意义.

2. 向量在空间解析几何中的作用与地位如何？

向量为人们提供了用代数方法研究几何图形的有力工具，使得用代数的方法研究几何图形更方便快捷. 空间解析几何中，平面与直线方程的建立，直线与直线，直线与平面，平面与平面之间的位置关系等问题，都是以向量为工具进行讨论的. 向量在后续课程中(如工程力学)也要用到. 在这里，向量的坐标表示及在此表示之下的运算尤为重要.

3. 实数和向量都有相等的概念. 此外，实数还有大小关系，那么，这种大小关系能否推广到向量上面去呢？

注意，对向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=2$ 都是没有意义的，而 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|=2$ 是有意义的. 这是向量与实数的重要区别.

4. 向量的数量积与向量积满足消去律吗？

对于向量的数量积和向量积都不满足消去律，即对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 不能得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这一点可用图 1-1 加以说明. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的射影向量相等，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$. 显然只有当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 平行且不与 $\boldsymbol{a}$ 垂直时，才能由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的结论.

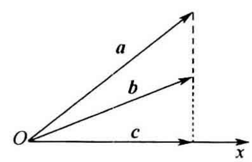

图 1-1

对于向量积只有当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$ 时，才能由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

由于向量是由大小与方向两个要素构成的，故两向量的商是没有意义的.

5. 方程 $F(x,y,z)=0$ 一定表示曲面吗？方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 一定表示曲线吗？

一般地，在空间直角坐标系下，方程 $F(x,y,z)=0$ 表示一个曲面，但必须注意以下三种特殊情况：

(1) 如果方程可分解为两个因式，如 $F(x,y,z)=f(x,y,z)g(x,y,z)$，则原方程表示两个曲面，它们的方程分别是 $f(x,y,z)=0$ 和 $g(x,y,z)=0$.

(2) 方程 $F(x,y,z)=0$ 表示的图形可能退化为一个点或一条曲线. 如 $x^2+y^2+z^2=0$ 就表示空间中的一个点，而 $x^2+y^2=0$ 就表示空间中的直线 z 轴.

(3) 方程 $F(x,y,z)=0$，也可能不表示任何曲面. 如 $x^2+y^2+z^2+1=0$，这时我们就说它是虚曲面. 同样，方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 也不一定代表空间曲线，如 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 就不表示任何曲线，从代数上看，这是一个矛盾方程组，不存在同时满足这两个方程的解. 从几何上看这是两个没有公共点的同心球.

6. 建立平面方程时，一个几何条件是否一定对应一个代数条件？如何解释

三个代数条件确定一个平面？

建立平面方程时，一个几何条件不一定对应一个代数条件，例如，平面 $Ax+By+Cz+D=0$（A、B、C 不全为 0）过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 这一条件，就相当于一个代数条件 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. 如果说平面过 z 轴这一几何条件，就相当于 $C=0$ 和 $D=0$ 这两个代数条件.

因为，平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，要求 A，B，C 不全为0. 不失一般性，可以设 $A\neq0$，则方程变为 $x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0$，这个式子中含有三个参数 $\frac{B}{A}$，$\frac{C}{A}$，$\frac{D}{A}$ 需要确定，故需要三个代数条件来确定一个平面. 对于三个条件的其他各种情况，感兴趣的读者可以自行讨论.

做一做：对确定平面的三个条件的各种基本情况进行讨论.

四、典型例题选讲

例 1：已知两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,3,4)$.

（1）写出向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示；

（2）求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦；

（3）求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量.

解：（1）$\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2,4-3)=(1,1,1)$

（2）$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

设 $\overrightarrow{AB}$ 与三个坐标轴的夹角依次为 α，β，γ，则 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

（3）因为，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}\neq1$，故 $\overrightarrow{AB}$ 不是单位向量，与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量是

$$\boldsymbol{e}_{AB}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

例 2：下列说法正确的是(　　).

（A）任何向量都有确定的大小和方向

（B）任何向量除以自己的模，都是单位向量

（C）只有模为 0 的向量，才是零向量

（D）0 乘以任何向量都是数 0

解：C 正确. 因为由零向量的定义可知，一个向量为零当且仅当它的模为 0. 由于零向量的方向不能确定，故 A 错；由于零向量的模为 0，而 0 不能作除数，因此，B 不正确；任何数与零向量的积都是零向量，数 0 与任何向量的积都是零向量，因此 D 错.

例 3：设 $\boldsymbol{a}=(3,2,1)$，$\boldsymbol{b}=\left(2,\ \frac{4}{3},\ m\right)$，试求 m，使得：

（1）$\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$；

（2）$\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$.

解：（1）如果 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$3\times2+2\times\frac{4}{3}+1\times m=0$$

由此式求得 $m=-\frac{26}{3}$.

（2）如果 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，应有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即它们的分量对应成比例

$$\frac{3}{2}=\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{m}=\lambda$$

由此解得 $\lambda=\frac{3}{2}$，$m=\frac{2}{3}$.

例 4：设 $A(3,4,-1)$，$B(2,0,3)$ 和 $C(-3,5,4)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：由向量积的几何意义知，$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$，而

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-4,4),\ \overrightarrow{AC}=(-6,1,5)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & -4 & 4\\ -6 & 1 & 5\end{vmatrix}=-24\boldsymbol{i}-19\boldsymbol{j}-25\boldsymbol{k}$$

所以 $$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-24)^2+(-19)^2+(-25)^2}=\sqrt{1562}$$

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\sqrt{1562}$.

例 5：求过点 $M_0(2,3,5)$，且平行于平面 $5x-3y+2z-10=0$ 的平面方程.

解：已知平面 Π_1：$5x-3y+2z-10=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(5,-3,2)$，由于所求平面 Π 与已知平面 Π_1 平行，所以平面 Π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与所求平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 平行，取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1$，写出平面 Π 的点法式方程为

$$5(x-2)-3(y-3)+2(z-5)=0$$

化简即得所求平面方程为 $$5x-3y+2z-11=0$$

例 6：已知三平面的方程分别为，Π_1：$x-5y+2z+1=0$；Π_2：$3x-2y+5z+8=0$；Π_3：$4x+2y+3z-9=0$，则必有(　　).

（A）Π_1 与 Π_2 平行　　（B）Π_1 与 Π_3 垂直

（C）Π_2 与 Π_3 垂直　　（D）Π_2 与 Π_3 平行

解：记 Π_1，Π_2，Π_3 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，$\boldsymbol{n}_3$，由于 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3=1\times4+$

$(-5)\times 2+2\times 3=0$，故 Π_1 与 Π_3 垂直，B 正确．由 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 不平行，所以，Π_1 与 Π_2 不平行，A 错．又因 $\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3=23\neq 0$，故平面 Π_2 与 Π_3 不垂直，C 错．最后 $\boldsymbol{n}_2$ 与 $\boldsymbol{n}_3$ 不平行，故 D 错．

所以本题选 B．

例 7：求通过点 $M_0(1,2,1)$，且垂直于两平面 $x+y=0$ 和 $5y+z=0$ 的平面方程．

解：设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$，平面 $x+y=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$，平面 $5y+z=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,5,1)$，由题意知 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1,-1,5)$，由点法式，有

$$(x-1)-(y-2)+5(z-1)=0$$

即

$$x-y+5z-4=0$$

为所求平面的方程．

例 8：求过三点 $A(0,4,-5)$，$B(-1,-2,2)$ 和 $C(4,2,1)$ 的平面方程．

解：[方法 1] 由于点 A，B，C 在平面上，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 应满足 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$．于是 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 共线，取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-22,34,26)$$

依点法式，得

$$-22(x-4)+34(y-2)+26(z-1)=0$$

即

$$11x-17y-13z+3=0$$

为所求平面．

[方法 2] 设所求平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

由于 A，B，C 三点在平面上，故此三点的坐标都应满足上述方程，即

$$\begin{cases}4B-5C+D=0\\-A-2B+2C+D=0\\4A+2B+C+D=0\end{cases}$$

由此解得

$$A=\frac{11}{3}D,\ B=-\frac{17}{3}D,\ C=-\frac{13}{3}D$$

取 $D=3$，则 $A=11$，$B=-17$，$C=-13$ 故所求的平面方程为

$$11x-17y-13z+3=0$$

想一想：平面的一般式方程中含有四个待定常数 A，B，C，D，而题设只有三个条件，不能完全确定这四个待定常数，能否说所求的平面方程是不唯一的？

例 9：试分别决定参数 k 的值，使得平面

$$\Pi: x+ky-2z-7=0$$

满足下列条件:

(1) 经过点 $P(3,-2,5)$;

(2) 与平面 Π_1: $2x+3y+7z-5=0$ 垂直;

(3) 与平面 Π_2: $2x-3y+z=0$ 成$\frac{\pi}{4}$角;

(4) 与平面 Π_3: $3x-7y-6z-1=0$ 平行.

解: (1) 若平面经过点 P, 则 P 点的坐标满足平面 Π 的方程, 即

$$3+k\times(-2)-2\times5-7=0$$

解得 $k=-7$, 即, 当 $k=-7$ 时, 平面过 P 点.

(2) 平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,k,-2)$, 而平面 Π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(2,3,7)$. 于是, $\Pi_1\perp\Pi$ 当且仅当 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}=0$ 时, 即

$$1\times2+3\times k-2\times7=0$$

解得 $k=4$, 所求的平面为

$$x+4y-2z-7=0$$

(3) 平面 Π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(2,-3,1)$, 则由两平面的夹角计算公式, 有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1\times2-3\times k-2\times1}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解此方程得 $k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$, 于是, 所求的平面为

$$2x+\sqrt{70}y-4z-14=0$$

或

$$2x-\sqrt{70}y-4z-14=0$$

(4) 若平面 Π 平行于平面 Π_3, 则有

$$\frac{1}{3}=\frac{k}{-7}=\frac{-2}{-6}$$

解得 $k=-\frac{7}{3}$, 故所求的平面方程为

$$3x-7y-6z-21=0$$

例 10: 已知平面 Π 的一般方程为: $2x+y+5z+4=0$.

(1) 求 Π 的点法式方程;

(2) 求平面 Π 与坐标轴的交点.

解: (1) 先在平面 Π 上找一点 P, 比如, 令 $x=2$, $y=2$, 代入到平面 Π 的方程中, 得

$$4+2+5z+4=0$$