X I A N X I N G D A I S H U

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

# 线性代数

同济大学数学系　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育数学基础课程"十二五"规划教材

# 线性代数

同济大学数学系　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要


本书按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程(线性代数)教学基本要求”,结合作者的多年教学经验及编写同类教材的体会编写而成. 全书内容包括行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵和二次型及线性空间等基本知识与基本理论. 本书突出线性代数的计算和方法,着重矩阵的行初等变换并用行初等变换对相关线性代数问题作讨论,把抽象的内容与具体例子相结合,融学习指导于教材内容中,书后附有习题参考答案与部分习题解答或提示,不论是在教学还是在自学方面,本书都是一部使用比较方便的教材.

本书可供普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)及经济管理类各专业学生使用,也可供自学者和科技工作者阅读.



**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数 / 同济大学数学系编著. -- 上海:同济大学出版社,2011.7

ISBN 978-7-5608-4586-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①同… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 105802 号

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

**线性代数**

同济大学数学系　编著

**组稿** 曹　建　吴丽丽　**责任编辑** 曹　建　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www. tongjipress. com. cn

(上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021 - 65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　13.5

字　数　270 000

印　数　1—4 100

版　次　2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 978 - 7 - 5608 - 4586 - 9

定　价　22.00 元

# 前　　言

“线性代数”是大学数学的一门重要课程.作为体现教学内容和教学方法的载体，教材对教与学的效果起着重要作用.我们根据当前工科类、理科类(非数学专业)及经济管理类线性代数各专业的教学要求，总结多年教学经验以及编写同类教材的体会，编写了这本《线性代数》教材.

本书在编写时努力做到概念清楚，重点突出，分散难点，解说准确，便于教与学.在内容的选取和安排上侧重学生基本能力的培养，突出计算和方法.例如，用递推归纳的方法引出 $n$ 阶行列式的定义，使问题的叙述较为直接明了，然后用实例介绍计算行列式的方法，尤其把矩阵的初等变换放在十分重要的位置.例如，从线性方程组的消元法引出矩阵的初等变换；强调利用矩阵的行初等变换求解相应问题；注意到矩阵方法和线性方程组解法之间的联系，利用矩阵秩和矩阵的行初等变换方便地得出线性方程组解的充分必要条件及解法.又利用线性方程组的有关结果以及行初等变换讨论了列向量组的线性相关性和相应的线性关系，从而得出线性方程组解结构的确定性，这种讨论过程使抽象的概念变得较易掌握与理解.

在编写教材的过程中，既注意到教材内容的实用性，又注意到教学内容的完整性，故编入第 6 章“线性空间”，并用较详尽的列举来说明抽象的概念，目的在于开阔学生的思路，对线性代数问题有更深入的理解和认识，以供有教学要求的工科专业学生选学.

本书融部分学习指导内容于教材内容中，且针对学生在学习中常见的错误作了相应的叙述和分析.同时，对书中非必读内容作小字排版或标有星号(*)，书后附有参考答案与部分习题解答及提示，便于学习.

本书由黄临文编写.在编写过程中，编者广泛参阅了许多兄弟院校的同类教材及有关资料，在此表示衷心的感谢!

限于编者水平，书中难免存在不足与疏漏之处，恳请广大读者批评、指正.

**编　者**

2011 年 6 月于同济

# 目　　录

# 第 1 章　行　列　式

本章介绍 $n$ 阶行列式的定义、性质和计算方法，还介绍用 $n$ 阶行列式求解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

## 1.1　$n$ 阶行列式的定义

### 1.1.1　二元线性方程组和二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & ② \end{cases} \tag{1-1}$$

为消去未知数 $x_2$，以 $a_{22}$ 乘①式减去 $a_{12}$ 乘②式(记作 $a_{22}\times①-a_{12}\times②$)，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

为消去未知数 $x_1$，以 $a_{11}$ 乘②式减去 $a_{21}$ 乘①式(记作 $a_{11}\times②-a_{21}\times①$)，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

从式(1-2)可以看到：两式的分母都等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，两个分子都是两数乘积项的代数和. 为此，引入二阶行列式，并用二阶行列式对线性方程组(1-1)的解作讨论.

设有 $2^2$ 个数 $a_{ij}\,(i,\ j = 1,\ 2)$ 排成 2 行 2 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

称为**二阶行列式**. 其中，$a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 称为行列式中第 $i$ 行、第 $j$ 列的**元素**，$i$ 称为**行标**，$j$ 称为**列标**. 行列式一般用字母 $D$ 表示.

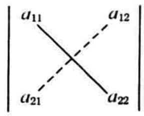

图 1-1

二阶行列式又可以用对角线法则来记忆，如图 1-1 所示.

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 就是方表中用实线表示的对角线(称为**主对角线**)上的两个数的乘积减去用虚线表示的对角线(称为**副对角线**)上两个数的乘积所得的差.

利用二阶行列式的定义，二元线性方程组(1-1)未知数前面的系数按它们在方程组中原来位置构成二阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二元线性方程组的**系数行列式**，且记二阶行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$，则当系数行列式 $D \neq 0$ 时，二元线性方程组(1-1)的唯一解可用行列式表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

**例 1.1** 用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 2. \end{cases}$$

**解** 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 它们是

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

### 1.1.2 三阶行列式

三阶行列式定义如下：

设有 $3^2$ 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 排成 3 行 3 列的数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{matrix}
$$

记

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},
$$

称为**三阶行列式**.

三阶行列式是 3! 项的代数和，每一项都是不同行不同列的三个数的乘积再冠以正负号，三项冠正号，三项冠负号. 它也可用对角线法则来记忆(图 1－2). 图中三条实线看做是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于副对角线的连线，实线上三个不同行不同列的元素的乘积冠正号，虚线上三个不同行不同列的元素的乘积冠负号.

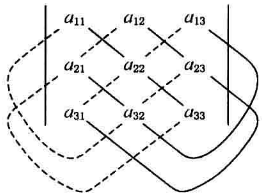

图 1-2

**例 1.2** 计算三阶行列式

$$
D = \begin{vmatrix}
1 & -2 & 3 \\
-4 & 5 & -6 \\
7 & -8 & 9
\end{vmatrix}.
$$

**解** 由对角线法则，得

$$
\begin{aligned}
D &= 1\times 5\times 9 + (-2)\times(-6)\times 7 + 3\times(-4)\times(-8) - \\
&\quad 1\times(-6)\times(-8) - (-2)\times(-4)\times 9 - 3\times 5\times 7 \\
&= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 = 0.
\end{aligned}
$$

类似地，我们可以利用三阶行列式来解三元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.
\end{cases}
$$

记

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}, \quad
D_1 = \begin{vmatrix}
b_1 & a_{12} & a_{13} \\
b_2 & a_{22} & a_{23} \\
b_3 & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix},
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix}
a_{11} & b_1 & a_{13} \\
a_{21} & b_2 & a_{23} \\
a_{31} & b_3 & a_{33}
\end{vmatrix}, \quad
D_3 = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & b_3
\end{vmatrix}.
$$

其中，$D$ 称为三元线性方程组的系数行列式，$D_j$ 是以常数项 $b_1$，$b_2$，$b_3$ 分别替换系数行列式中 $a_{1j}$，$a_{2j}$，$a_{3j}$（未知数 $x_j$ 的系数，$j=1,2,3$）所得的行列式. 于是，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

### 1.1.3 *n* 阶行列式

我们用递归法给出 $n$ 阶行列式的定义.

由二阶和三阶行列式的定义，可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\&\quad a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+\\&\quad a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

从上式可以看到，三阶行列式等于它的第一行的每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和. 为了进一步说明这些二阶行列式与原来三阶行列式的关系，下面引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

中，划去元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在的第 1 行和第 $j$ 列的元素，剩下的元素按原来位置顺序组成的二阶行列式叫做元素 $a_{1j}$ 的**余子式**，记作 $M_{1j}(j=1,2,3)$，且记 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，称 $A_{1j}$ 为元素 $a_{1j}$ 的**代数余子式**.

例如，在三阶行列式 $D$ 中，元素 $a_{13}$ 的余子式为 $M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$，而元素 $a_{13}$ 的代数余子式为 $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$. 另外 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$ 分别是元素 $a_{11}$，$a_{12}$ 的代数余子式.

利用代数余子式,三阶行列式可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j},$$

这表明：三阶行列式等于它的第一行的每一个元素与对应的代数余子式乘积的和.

如果规定一阶行列式 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$,并记二阶行列式中元素 $a_{1j}(j=1,2)$ 的代数余子式分别为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|=-a_{21},$$

于是,二阶行列式也可类似写成

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=\sum_{j=1}^{2}a_{1j}A_{1j},$$

这也表明：二阶行列式等于它的第一行的每一个元素与对应代数余子式乘积的和.

**定义 1.1** 设有 $n^2$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots n)$ 排成 $n$ 行 $n$ 列的数表,定义 ***n* 阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{cases}|a_{11}|=a_{11}, & n=1,\\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, & n>1.\end{cases}$$

其中,$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 是元素 $a_{1j}$ 的代数余子式,$M_{1j}$ 是元素 $a_{1j}$ 的余子式(也就是在 $n$ 阶行列式中,划去元素 $a_{1j}$ 所在的第一行第 $j$ 列的元素,剩下的元素按原来位置组成的 $n-1$ 阶行列式).

用递归法给出的 $n$ 阶行列式的定义表明：$n$ 阶行列式等于它的第一行的每一个元素与对应代数余子式乘积的和.这个和式给出了计算 $n$ 阶行列式的具体公式：我们可以用二阶行列式来计算三阶行列式,用三阶行列式来计算四阶行列式;如此,可用 $n-1$ 阶行列式计算 $n$ 阶行列式.一般又称这个和式为 $n$ 阶行列式按行列式的第一行的展开式.

二阶行列式的展开式是 2! 项的代数和,三阶行列式的展开式是 3! 项的代数和,类似地,归纳法可以证明:$n$ 阶行列式的展开式是 $n!$ 项的代数和;每一项都是按行次序取,取之不同行不同列的 $n$ 个数的积,全部 $n!$ 项中带正号项与带负号项的项数各占一半.

**例 1.3** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&0&-5\\-4&1&0&2\\6&5&7&0\\-3&4&-2&1\end{vmatrix}.$$

**解** 由行列式的定义，把行列式按第一行展开，得

$$D=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&2\\5&7&0\\4&-2&-1\end{vmatrix}+(-5)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-4&1&0\\6&5&7\\-3&4&-2\end{vmatrix}$$

$$=3\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&0\\-2&-1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}\right]+$$

$$5\left[(-4)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&7\\-3&-2\end{vmatrix}\right]$$

$$=3[-7+2(-10-28)]+5[(-4)\times(-10-28)-(-12+21)]$$

$$=466.$$

**例 1.4** 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}.$$

**解** 由行列式的定义，把行列式按第一行展开，得

$$D=a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b&1&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&1&0\\0&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}$$

$$=a\left[b\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}c&1\\-1&d\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&1\\0&d\end{vmatrix}\right]-$$

$$(-1)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}c&1\\-1&d\end{vmatrix}=a[b(cd+1)-(-d)]+cd+1$$

$$=abcd+ab+ad+cd+1.$$

**例 1.5** 证明下三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\text{\Large 0}\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角形行列式的特点是：主对角线下方的元素不全为零，上方的元素全为零.

**证**　由行列式定义，下三角形行列式等于它的第一行元素与第一行元素对应代数余子式乘积的和，把行列式按第一行展开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & & & 0 \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{再由行列式定义}}$$

$$= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & & & 0 \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{以此类推}} \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角线行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

一般地，在 $n$ 阶行列式中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列的元素，剩下的 $n-1$ 阶行列式即为元素 $a_{ij}$ 的余子式，记作 $M_{ij}$，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在余子式 $M_{ij}$ 前面加符号 $(-1)^{i+j}$，即为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，记作 $A_{ij}$，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

应注意：行列式中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式（余子式连同其代数符号）只与元素 $a_{ij}$ 在行列式中的位置有关，而与元素本身无关，例如，在行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

中，第一行元素对应的代数余子式分别都是

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&9\end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&9\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}=2.$$

而将上述行列式按第一行展开，分别为

$$D_1=1\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+1\cdot A_{13}=2,$$
$$D_2=0\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}=0.$$

**定理 1.1** $n$ 阶行列式等于它的第一列的 $n$ 个元素与对应代数余子式乘积的和，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}.$$

为了表述方便，在此记元素 $a_{ij}$ 的余子式 $M_{ij}=M\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}$. 并且用 $M\begin{pmatrix}i&k\\j&l\end{pmatrix}$ 表示在 $n$ 阶行列式中划去元素 $a_{ij}$ 以及 $a_{kl}$ 所在行和列，剩下的元素按原来位置所组成 $n-2$ 阶行列式. 显然，$M\begin{pmatrix}1&i\\j&1\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}i&1\\1&j\end{pmatrix}$.

**证** 对行列式的阶数 $n$ 用归纳法.

当 $n=2$ 时，结论成立.

设对 $n-1$ 阶行列式结论成立，考虑 $n$ 阶行列式的情形. 由定义把列式 $D$ 按第一行展开：

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}=a_{11}M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix},$$

其中，$M\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}$是 $n-1$ 阶行列式，由归纳假设，对 $M\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}$按第 1 列展开

$$M\begin{pmatrix}1\\j\end{pmatrix}=\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i-1+1}M\begin{pmatrix}1&i\\j&1\end{pmatrix},$$

代入上式，得

$$\begin{aligned}D&=a_{11}M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}\cdot\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}M\begin{pmatrix}1&i\\j&1\end{pmatrix}\\&=a_{11}M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}\cdot\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{j}M\begin{pmatrix}i&1\\1&j\end{pmatrix}\\&=a_{11}M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}.\end{aligned}$$

## 1.2 n阶行列式的性质与按行(列)展开

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 为行列式 $D$ 的**转置行列式**.

**性质1 行列式 $D$ 与它的转置行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 相等.**

**证** 用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时,结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式上述结论成立,即 $n-1$ 阶行列式与它的转置行列式相等. 现证明对 $n$ 阶行列式结论也成立. 将 $D$ 按第一行展开,得

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k},$$

其中, $A_{1k}=(-1)^{1+k}M_{1k}$. $D^{\mathrm{T}}$ 中第一列的元素就是 $D$ 的第一行的元素,将 $D^{\mathrm{T}}$ 按第一列展开,得

$$D^{\mathrm{T}}=a_{11}\widetilde{A}_{11}+a_{12}\widetilde{A}_{21}+\cdots+a_{1n}\widetilde{A}_{n1}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\widetilde{A}_{k1},$$

其中, $\widetilde{A}_{k1}=(-1)^{k+1}\widetilde{M}_{k1}$. 由于 $\widetilde{M}_{k1}$ 是 $M_{1k}$ 的转置行列式,且都是 $n-1$ 阶行列式,由归纳假设, $\widetilde{M}_{k1}=M_{1k}$,故 $\widetilde{A}_{k1}=(-1)^{k+1}\widetilde{M}_{k1}=(-1)^{1+k}M_{1k}=A_{1k}$,由此证得

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}=D.$$

性质1说明了在行列式中行与列有相同的地位. 凡是行所具有的性质,对于列也成立,反过来也是对的.

由例1.5知下三角形行列式等于对角线上元素的积,从而上三角形行列式也等于对角线上元素的积,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**性质2 对换行列式的两行(列),行列式变号**(对换行列式的第 $i$ 行与第 $j$ 行,记作 $r_i\leftrightarrow r_j$;对换第 $i$ 列与第 $j$ 列,记作 $c_i\leftrightarrow c_j$).

**证** 先证对换行列式的相邻两行的情形. 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } i+1 \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

对换第 $i$, $i+1$ 两行后,得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } i+1 \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

用归纳法证明 $D_1=-D$.

当 $n=2$ 时,结论成立.

设对 $n-1$ 阶行列式结论成立,考察 $n$ 阶行列式的情形.由定理 1.1,将 $D$ 和 $D_1$ 都按行列式的第一列展开:

$$D=a_{11}A_{11}+\cdots+a_{i1}A_{i1}+a_{i+1\,1}A_{i+1\,1}+\cdots+a_{n1}A_{n1},$$

$$D_1=a_{11}\widetilde{A}_{11}+\cdots+a_{i+1\,1}\widetilde{A}_{i1}+a_{i1}\widetilde{A}_{i+1,1}+\cdots+a_{n1}\widetilde{A}_{n1},$$

其中,$A_{k1}=(-1)^{k+1}M_{k1}$, $\widetilde{A}_{k1}=(-1)^{k+1}\widetilde{M}_{k1}$, $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

当 $k\neq i,\ i+1$ 时,$\widetilde{M}_{k1}$ 通过对换相邻两行变为 $M_{k1}$,由归纳假设 $\widetilde{M}_{k1}=-M_{k1}$,此时,$\widetilde{A}_{k1}=-(-1)^{k+1}M_{k1}=-A_{k1}$.

当 $k=i$ 时,$\widetilde{M}_{i1}=M_{i+1\,1}$,此时,$\widetilde{A}_{i1}=(-1)^{i+1}\widetilde{M}_{i1}=-(-1)^{i+1+1}M_{i+1\,1}=-A_{i+1\,1}$,

当 $k=i+1$ 时,$\widetilde{M}_{i+1\,1}=M_{i1}$,此时,$\widetilde{A}_{i+1\,1}=(-1)^{i+1+1}\widetilde{M}_{i+1\,1}=-(-1)^{i+1}M_{i1}=-A_{i1}$.

得

$$D_1=-(a_{11}A_{11}+\cdots+a_{i+1\,1}A_{i+1\,1}+a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{n1}A_{n1})=-D.$$

再证对换任意两行的情形.不妨设对换第 $i$, $j$ 两行,且设 $j-i=l\ (0<l<n)$.对换步骤如下:

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \qquad (j-i=l), \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$