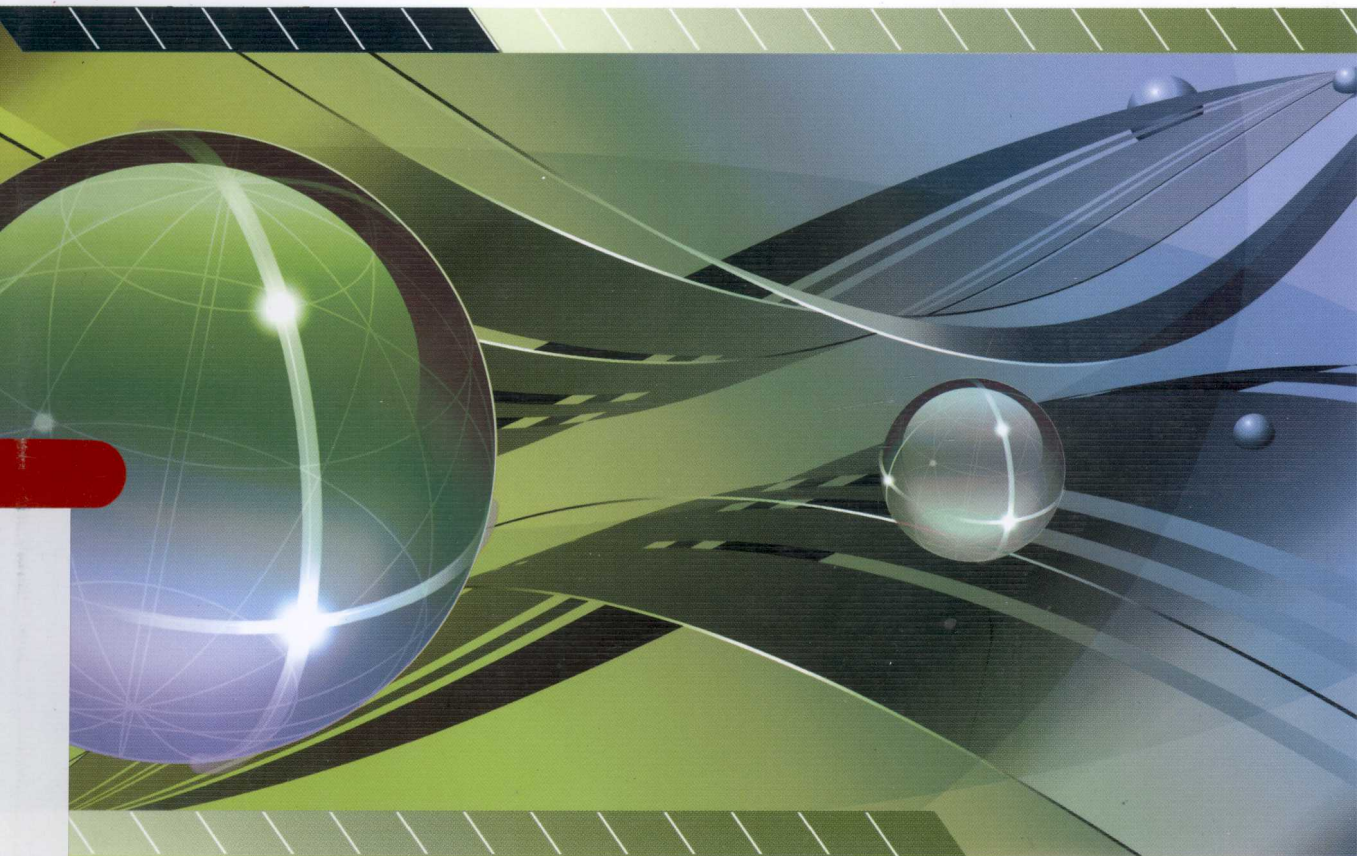




普通高等教育“十二五”规划教材
高等学校教材

数学物理方程 与特殊函数

闫桂峰 张琼 姜海燕 编



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

013032458

0411.1-43

27

普通高等教育“十二五”规划教材
高等学校教材

数学物理方程与特殊函数

闫桂峰 张琼 姜海燕 编



0411.1-43

27

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING



北航

C1640046

内 容 简 介

本书是编者在多年教学经验的基础上,根据工科本科生数学基础课程教学基本要求编写而成的。本书结构严谨,内容丰富,阐述明了,层次分明,配有大量应用实例。全书共分8章,其内容有典型数学物理方程的导出和定解问题的提法、求解数学物理方程定解问题的几种方法(包括行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法和差分法),以及两类特殊函数——贝塞尔函数和勒让德多项式的性质及其应用。

本书可以作为高等院校工科本科生“数学物理方程”课程的教材或教学参考书,也可以作为广大工科研究生和相关领域的科研工作者的参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数 / 闫桂峰, 张琼, 姜海燕编. —北京: 电子工业出版社, 2013.3

高等学校教材

ISBN 978-7-121-19879-3

I. ①数… II. ①闫… ②张… ③姜… III. ①数学物理方程—高等学校—教材
②特殊函数—高等学校—教材 IV. ①O175.24 ②O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 052454 号

策划编辑: 余 义

责任编辑: 余 义

印 刷: 涿州市京南印刷厂

装 订: 涿州市京南印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 14.5 字数: 371 千字

印 次: 2013 年 3 月第 1 次印刷

定 价: 33.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlls@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010)88258888。

前 言

数学物理方程与特殊函数是高等院校一门重要的专业基础课，是通信工程、电子工程、自动控制等专业本科生的一门必修课程，它前承高等数学、复变函数等基础数学课程，后启电路信号系统、电路分析等专业课程，是理工科本科生深入学习专业知识不可或缺的工具。

本书编者以十多年来为本校电子、信息、控制等工科专业讲授“数学物理方程与特殊函数”课程的教学经验为基础，参阅了国内外大量教材和文献，编写了这本适合新时期研究型教学任务的教材。本教材在编写时特别注意理论联系实际，详细地描述了数学、物理等基础知识与实际问题的紧密联系，针对工程实际中最常出现的三类典型问题建立了相应的数学模型，介绍了这些问题的分析和求解过程、结果的物理意义及其图像，使内容更加丰富、完整，有利于提高教学效果，加深学生对知识的理解，进而培养他们解决实际问题的能力。本书可以作为工科本科生“数学物理方程”课程的教材或教学参考书，也可以为广大工科研究生和相关领域的科研工作者提供参考。

本书包括 8 章内容。第 1 章介绍了三类典型方程的推导过程及定解问题的提法。第 2 章介绍了求解波动问题的特征线法、球面平均值方法和降维法，给出了一维波动方程的达朗贝尔公式和二维、三维波动方程的泊松公式。第 3 章叙述了求解有界域上数学物理方程最常用、最基本的方法——分离变量法。第 4 章讨论了傅里叶变换和拉普拉斯变换，它们是求解无界域上数学物理方程定解问题的两种常用的方法。第 5、6、7 章分别介绍了格林函数法、贝塞尔函数和勒让德多项式。第 8 章对偏微分方程的差分方法进行了简单介绍。作为预备知识和辅助教学材料，附录 A 汇总了线性常微分方程的基本理论和方法，附录 B 介绍了傅里叶级数的基本理论，附录 C 给出了常用的变换表。

本书各章都配有精心挑选的习题，以供读者选择，书后附有所有计算题目的答案。特别地，本书还增加了一些计算机实践题目，这些题目需要使用计算机进行数值计算或辅助作图。

本书第 4 章由张琼编写，第 8 章由姜海燕执笔，其余章节的编写由闫桂峰负责。

本书是北京理工大学“十二五”校级规划教材，在编写和出版过程中得到了电子工业出版社和北京理工大学教务处的大力支持和帮助，北京理工大学数学学院多位同事给予了关心与帮助，在此一并表示感谢。

由于编者学识水平有限，书中一定还存在不少缺点和错误，衷心希望广大读者批评指正。

编 者

2012 年 12 月

目 录

第 1 章 数学物理方程的导出和定解问题	1
1.1 数学物理方程的导出	1
1.1.1 弦的微小横振动	1
1.1.2 热传导方程	4
1.1.3 静电场的势方程	6
1.2 定解条件及定解问题	7
1.2.1 初始条件	8
1.2.2 边界条件	9
1.3 二阶线性偏微分方程的分类、化简及叠加原理	13
1.3.1 基本概念	13
1.3.2 分类和化简	14
1.3.3 线性方程的叠加原理	18
习题	20
第 2 章 行波法	22
2.1 一维波动方程的柯西问题	22
2.2 齐次化原理及非齐次方程柯西问题	30
2.2.1 齐次化原理	30
2.2.2 非齐次方程柯西问题	31
2.3 半无限长弦的振动	33
2.4 二维与三维波动方程	39
2.4.1 球对称情形	39
2.4.2 一般情况	40
2.4.3 二维波动方程的降维法	43
2.4.4 解的物理意义	45
习题	45
第 3 章 分离变量法	48
3.1 有界弦的自由振动	48
3.1.1 分离变量法	48
3.1.2 解的物理意义	52
3.2 有限长杆的热传导问题	65
3.3 有限区域上的拉普拉斯方程边值问题	70
3.3.1 矩形域上拉普拉斯方程边值问题	70
3.3.2 圆域上拉普拉斯方程边值问题	72

3.4	非齐次方程的问题	75
3.4.1	傅里叶级数法	75
3.4.2	冲量定理法	79
3.4.3	泊松方程的特解法	80
3.5	非齐次边界条件问题	82
3.6	施特姆-刘维尔问题	87
	习题	89
第4章	积分变换法	94
4.1	傅里叶变换的概念和性质	94
4.2	傅里叶变换的应用	98
4.2.1	一维热传导方程的初值问题	98
4.2.2	一维波动方程的初值问题	100
4.2.3	二维拉普拉斯方程的边值问题	101
4.3	拉普拉斯变换的概念和性质	103
4.4	拉普拉斯变换的应用	105
	习题	110
第5章	格林函数法	111
5.1	拉普拉斯方程边值问题与基本解	111
5.1.1	拉普拉斯方程边值问题	111
5.1.2	拉普拉斯方程的基本解	112
5.2	格林公式和调和函数的性质	113
5.2.1	格林公式	113
5.2.2	调和函数的性质	114
5.3	格林函数法	117
5.4	电像法	121
	习题	125
第6章	贝塞尔函数	126
6.1	贝塞尔方程的导出与求解	126
6.1.1	贝塞尔方程的导出	126
6.1.2	贝塞尔方程的求解	128
6.2	贝塞尔函数的递推公式	131
6.3	函数展开成贝塞尔函数的级数	134
6.3.1	贝塞尔函数的零点	134
6.3.2	贝塞尔函数正交性	136
6.3.3	函数在贝塞尔函数系上的展开	136
6.4	贝塞尔函数的应用	137
6.5	贝塞尔函数的其他类型及渐近公式	142

6.5.1	第三类贝塞尔函数	142
6.5.2	虚宗量的贝塞尔函数	142
6.5.3	开尔文函数	144
6.5.4	贝塞尔函数的渐近公式	144
习题		146
第 7 章	勒让德多项式	149
7.1	勒让德方程的引入	149
7.2	勒让德方程的求解和勒让德多项式	151
7.2.1	求解勒让德方程	151
7.2.2	勒让德多项式	152
7.3	勒让德多项式的微分表达式及递推公式	154
7.4	函数展开成勒让德多项式的级数	156
7.4.1	勒让德多项式的正交性	156
7.4.2	勒让德多项式的应用	159
7.5	连带的勒让德多项式	161
习题		163
第 8 章	偏微分方程的差分方法	165
8.1	波动方程的差分格式	168
8.2	抛物型方程的差分方法	170
8.2.1	常数系数扩散方程差分方程	170
8.2.2	第三类边界条件的处理	173
*8.2.3	变系数初值问题	174
*8.2.4	多维问题	174
8.3	椭圆型方程的差分方法	176
8.3.1	直角坐标系下的差分格式	176
8.3.2	极坐标系下的差分格式	177
*8.3.3	变系数问题	178
习题		179
附录 A	线性常微分方程	181
附录 B	傅里叶级数	194
附录 C	变换表	211
部分习题参考答案		214
参考文献		221

第 1 章 数学物理方程的导出和定解问题

在这一章里，将通过弦振动、热传导、静电场的势等物理模型说明如何从实际问题导出数学物理方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念。它们将是本课程所介绍的理论与方法的主要研究对象。

1.1 数学物理方程的导出

常微分方程的未知函数都是单变量函数，如质点的位移、电路中的电流和电压等物理量都是时间 t 的函数，这些物理量的变化规律在数学上的表示就是常微分方程。但是，在科学研究和生产实际中，还有许多物理量不仅与时间 t 有关，而且与空间位置 (x, y, z) 有关。如描述声波在介质中的传播、电磁波的电场强度和磁感应强度随空间和时间变化等规律时，就会得到含有未知函数及其偏导数的关系式，这些关系式就称为数学物理方程。下面以几个典型方程的推导为例，说明如何从实际研究对象出发，抓住主要因素，利用有关的物理定律，如牛顿第二定律、能量守恒定律、质量守恒定律等，建立数学物理方程。

1.1.1 弦的微小横振动

在演奏乐器时，被拨动的弦只是一小段，但是弦是拉紧的，各小段之间有相互作用力，即张力。在张力的作用下，一小段弦的振动会引起邻近小段弦的振动，这种振动的传播称为波。现在研究弦的微小横振动。设有细长柔软的弦，紧绷于 A, B 两点之间，在平衡位置 AB 附近，弦受垂直外力作用后产生振幅极小的横振动，确定弦的运动状态。

1. 假设与结论

(1) 横振动：如图 1.1 所示，取弦的平衡位置为 x 轴，横振动是指弦上各点的振动发生在一个平面内，且各点的运动方向垂直于平衡位置。选坐标系 Oxu ，以 $u(x, t)$ 表示弦上点 x 在时刻 t 离开平衡位置的位移。

(2) 微小振动：弦上各点位移与弦长相比很小，且振动很平缓，即各点斜率变化很微小，也即 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$ ，

于是

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x$$

即在微小横振动过程中，弦长基本上不发生改变。

(3) 弦是柔软的：弦线对形变不产生任何抗力，张力 $T(x, t)$ 的方向总沿着弦在点 x 的切线

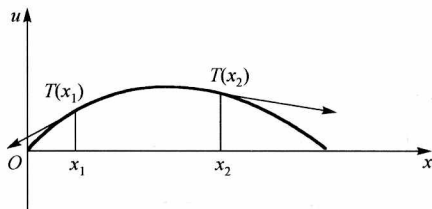


图 1.1 弦的微小横振动

方向, 并且由于在振动过程中, 弦长不发生变化, 因此各点张力 $T(x, t)$ 与时间无关, 即 $T(x, t) = T(x)$, 记 $|T(x)| = T(x)$ 。

(4) 弦是均匀的: 弦上各点密度为常数, 记其为 ρ 。

(5) 弦的重力与张力相比很小, 可以忽略。

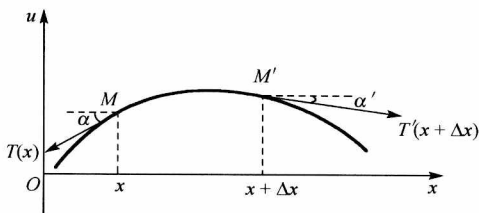


图 1.2 微元 $\widehat{MM'}$ 的受力分析

2. 建立方程

如图 1.2 所示, 任取弦上一小弧段微元 $\widehat{MM'}$, 研究 $\widehat{MM'}$ 在水平方向和铅垂方向上的运动情况。

1) 受力分析

设弦在点 M 、 M' 的切线与 x 轴的夹角分别为 α 、 α' , 微元在端点 M 受张力 $T(x)$ 作用, 其在 x 轴方向的分量为 $-T(x)\cos\alpha$, 在 y 轴方向的分量为 $-T(x)\sin\alpha$; 在端点 M' 处受张力 $T(x+\Delta x)$ 作用, 其在 x 轴、 y 轴方向的分量分别为 $T(x+\Delta x)\cos\alpha'$ 和 $T(x+\Delta x)\sin\alpha'$ 。

2) 运动方程

由于小弧段 $\widehat{MM'}$ 在水平方向上没有运动, 故合力为零, 即

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha' - T(x)\cos\alpha = 0$$

由于 $\alpha \approx 0$, 故

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx 1$$

同理, $\cos\alpha' \approx 1$, 所以有

$$T(x+\Delta x) - T(x) = 0$$

即各点张力相等, 以常数 T 表示。

弦在垂直方向上有运动, 根据牛顿第二定律, 有

$$T\sin\alpha' - T\sin\alpha = \rho\Delta s \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2} \quad (1.1.1)$$

其中, x^* 为 $\widehat{MM'}$ 的质心。因为

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \sin\alpha' \approx \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

且 $\Delta s \approx \Delta x$, 所以有

$$T \left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2}$$

假设函数 $u(x, t)$ 二阶连续可微, 由微分中值定理

$$T \frac{\partial^2 u(\tilde{x}, t)}{\partial x^2} \Delta x = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2}$$

其中, $x < \tilde{x} < x + \Delta x$ 。令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则 $\tilde{x} \rightarrow x$, $x^* \rightarrow x$, 得

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

令 $a^2 = \frac{T}{\rho}$, 则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.2)$$

式(1.1.2)称为弦的自由振动方程。

若弦还受外力的作用, 假设外力线密度为 $F(x, t)$, 方向为 u 轴正向, 则式(1.1.1)应修改为

$$T \sin \alpha' - T \sin \alpha + F(\bar{x}, t) \Delta s = \rho \Delta s \frac{\partial^2 u(x^*, t)}{\partial t^2}$$

其中, $x < \bar{x} < x + \Delta x$, 考虑到 $\Delta s \approx \Delta x$, 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 化简移项得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (1.1.3)$$

其中, $f = \frac{F}{\rho}$ 。式(1.1.3)称为弦的强迫振动方程。

类似地, 研究平面柔软均匀薄膜的微小振动, 会得到二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = 0 \quad (1.1.4)$$

其中, $u(x, y, t)$ 为膜上各点的横向位移; $a^2 = \frac{T}{\rho}$, a 为膜上振动的传播速度, T 为膜上张力, ρ 为薄膜的面密度。如果薄膜上有横向外力作用, 设外力面密度为 $F(x, y, t)$, 则得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 u = f(x, y, t) \quad (1.1.5)$$

其中, $f(x, y, t) = \frac{F(x, y, t)}{\rho}$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维拉普拉斯算子。

利用流体力学中无黏性的理想流体的运动方程、连续性方程和绝热过程的物态方程, 通过研究空气质点在平衡位置附近的振动速度、空气的压强和密度的关系, 可以推导出描述声波在空气中传播规律的声学方程, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_3 u = 0 \quad (1.1.6)$$

其中, $u(x, y, z, t)$ 为空气密度相对变化量, 即 $u = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$; $a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$; γ 为空气定压比热与定容比热之比; p_0 、 ρ_0 分别为空气处于平衡状态时的压强和密度; $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维拉普拉斯算子。

在以上三个例子中, 方程的形式非常相似, 实际上, 在 1.3 节将看到它们是同一类方程, 式(1.1.2)、式(1.1.4)和式(1.1.6)都是波动方程, 只是维数不同而已。波动方程可以用来描述声波、电磁波、杆的振动等。

1.1.2 热传导方程

由于温度不均匀, 热量从温度高的地方向温度低的地方转移, 这种现象称为热传导。在热传导问题中, 研究的是温度在空间中的分布和随时间的变化规律。工程技术中存在大量热传导问题, 如混凝土温度应力场的计算问题, 首先应通过确定温度场得到温度梯度, 再计算温度应力。下面, 根据热传导的傅里叶定律和热量守恒定律来推导温度满足的方程。用 $u(x, y, z, t)$ 表示物体在点 $M(x, y, z)$ 、时刻 t 的温度, 通过对任意一个小的体积微元 Ω 内的热平衡关系的研究, 建立其方程。

热传导的起源是温度分布的不均匀, 温度不均匀的程度可由温度梯度表示, 热传导的强弱可用热流强度, 即单位时间内通过单位横截面积的热量来表示。关于温度梯度和热流强度的关系, 有如下傅里叶定律。

傅里叶定律 物体在 dt 时间内, 沿外法线方向 \mathbf{n} , 流过 dS 面积的热量 dQ 与 dt 、 dS 及 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 成正比, 即

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt \quad (1.1.7)$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \text{grad} u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z)$$

为温度的法向导数, 它表示温度沿方向 \mathbf{n} 的变化率, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的外法线方向。 $k(x, y, z) > 0$ 称为导热系数, 式中的负号表示热流方向与温度梯度方向相反, 温度梯度 $\text{grad} u$ 是由温度低的一侧指向温度高的一侧, 而热流的方向正好相反。

在物体中, 取任意一个封闭的区域 Ω , 设其边界为 $\partial\Omega$, 则从 t_1 到 t_2 时间段内, 流入 Ω 的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_{\partial\Omega} k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \right] dt$$

设温度函数 $u(x, y, z, t)$ 二阶连续可微, 则由奥氏公式有

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV dt$$

Ω 内各点的温度由 $u(x, y, z, t_1)$ 变到 $u(x, y, z, t_2)$ 共吸收热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c(x, y, z) \rho(x, y, z) [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV$$

其中, $c(x, y, z)$ 为各点的比热, $\rho(x, y, z)$ 为密度。而

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

由热量守恒定律, 有 $Q_1 = Q_2$, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \right\} dt = \iiint_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dt dV \quad (1.1.8)$$

由 u 的二阶连续可微性及 Ω 和 $[t_1, t_2]$ 的任意性, 得

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

若物体均匀且各向同性, 则 k 、 c 、 ρ 均为常数, 记 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ (a 称为导温系数), 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_3 u = 0 \quad (1.1.9)$$

若 Ω 内有热源, 设单位时间内单位体积产生的热量为 $F(x, y, z, t)$, 则在时间 $[t_1, t_2]$ 内热源散发的热量为

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dV dt$$

则式(1.1.8)应修改为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dV \right\} dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} F(x, y, z, t) dV dt = \iiint_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt$$

化简得到有热源的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_3 u = f(x, y, z, t) \quad (1.1.10)$$

其中, $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t) / (c\rho)$ 。式(1.1.9)和式(1.1.10)统称为三维热传导方程。

若物体是一根细长的杆, 其侧表面与周围介质不进行热交换, 垂直于轴线的同一截面上各点温度分布相同, 则可以近似地认为杆上温度分布只依赖于截面的位置, 因此若取细杆的轴线为 x 轴, 则相应的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1.1.11)$$

式(1.1.11)称为一维热传导方程。

若物体是一个薄片, 上、下底面不与周围介质进行热交换, 则热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad (1.1.12)$$

式(1.1.12)称为二维热传导方程。

热传导方程除了可以描述物体的温度变化规律外, 还可以描述很多实际问题, 如物质扩散时的浓度变化规律、长海峡的潮汐波的运动、土壤力学中的渗透问题等。对于扩散问题, 若以 $N(x, y, z, t)$ 表示扩散物质的浓度, 则根据扩散定律和质量守恒定律, 可得

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D\Delta_3 N = 0 \quad (1.1.13)$$

其中, D 称为扩散系数, $D > 0$ 。

1.1.3 静电场的势方程

由静电学知道, 静电场是有源无旋场。反映静电场基本性质的是高斯定理。下面, 根据这一定理来推导出描述静电场的数学物理方程。

假设有一个静电场, 其电场强度为 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, 介电常数 $\varepsilon = 1$, 电荷密度为 $\rho(x, y, z)$; Ω 是空间中的一个有界区域, $\partial\Omega$ 为其边界, 则有如下静电学基本定理。

高斯定理 穿过闭合曲面 $\partial\Omega$ 向外的电通量等于 $\partial\Omega$ 内所含电量的 4π 倍, 即

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$$

其中, \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的外法向量。由奥氏公式

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{\partial\Omega} [E_1 \cos(\mathbf{n}, x) + E_2 \cos(\mathbf{n}, y) + E_3 \cos(\mathbf{n}, z)] dS \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} \right] dV \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dV \end{aligned}$$

于是, 有

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho dV$$

由 Ω 的任意性, 得静电场方程

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho(x, y, z)$$

又由于静电场 \mathbf{E} 是有势场, 故存在势函数 u , 使得

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$$

于是, 有

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = f(x, y, z)$$

其中, $f(x, y, z) = -4\pi \rho(x, y, z)$, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad (1.1.14)$$

式(1.1.14)是静电场有源的电势方程, 称为三维泊松方程。若区域内无电荷, 即 $\rho(x, y, z) \equiv 0$, 则得无源的电势方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.15)$$

式(1.1.15)称为三维拉普拉斯方程。

对于流速场 \mathbf{v} , 若其无旋, 则存在势函数 φ , 使得

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi$$

若该速度场无源, 则 \mathbf{v} 的散度为零, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

故对于无源无旋的流速场 \mathbf{v} , 有

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

即

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.16)$$

实际上, 引力势、弹性力学中的调和势等均可由拉普拉斯方程(或泊松方程)描述。在无热源的热传导问题中, 经过相当长的时间后, 各点的温度随时间的推移而趋于稳定, 称为温度分布趋于稳恒状态, 这时 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, 式(1.1.9)退化为拉普拉斯方程

$$\Delta_3 u = 0$$

类似地, 若热源与时间无关, 且温度分布达到稳定状态时就有

$$\Delta_3 u = f(x, y, z)$$

所以稳恒温度场、浓度场也可由拉普拉斯方程(或泊松方程)描述。

从上述几个例子可以看出, 推导数学物理方程实质上就是找物理规律的数学表示。物理规律反映的是某个物理量在邻近地点和邻近时刻之间的联系。一般地, 数学物理方程的导出步骤可归纳如下:

- (1) 确定所研究的物理量 u , 如振动问题中弦(或膜)的位移、热传导问题中的温度等;
- (2) 根据所研究问题的区域确定适当的坐标系, 如常用的直角坐标系、平面极坐标系等;
- (3) 确定研究单元, 根据物理定律(如前面用过的牛顿第二定律、能量守恒定律、质量守恒定律等)和实验资料写出该单元与邻近单元的相互作用, 分析这种相互作用在一个短时间内对物理量 u 的影响, 表达为数学式;
- (4) 简化整理, 得到数学物理方程。

应该强调的一点是, 虽然这里只对几个具体的物理问题导出了方程, 但是, 这些方程所反映的规律绝不局限于这几个具体问题, 它们具有广泛的代表性, 许多不同的物理过程的变化规律可以用同一个数学物理方程来描述, 如扩散方程、土壤力学中的渗透方程都具有热传导方程的形式, 稳定的温度分布、流体的势等都满足拉普拉斯方程, 杆的扭转、建筑物的剪振动等都满足波动方程。

1.2 定解条件及定解问题

通常, 方程描述的是某一类物理过程的共同规律, 为了描述一个特定的物理现象, 除了方程外, 还必须考虑实际物理模型的初始状态和所处的环境。如弦的振动, 方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 描述了所有均匀柔软的弦做微小横振动的一般性运动规律。容易验证

$$u_1(x, t) = \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi a t}{l}$$

$$u_2(x, t) = \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l}$$

$$u_3(x, t) = \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{\pi at}{2l}$$

$$u_4(x, t) = \cos \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{\pi at}{2l}$$

都是一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 的解，但它们显然是不同的，图 1.3 给出了这 4 个解在 $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ 时的图像，从中可以看出，这些解代表着不同的波。实际上，弦端点状态的不同，如有两端固定、两端自由及一端固定而另一端按已知规律振动等，会导致所对应的振动规律 $u(x, t)$ 的不同，因此要刻画一条具体、特定的弦的振动规律，必须考虑端点的状况对解的影响。另外，由于任何一个振动物体在一个时刻的振动状态总是与此时刻前的状态有关，因此它一定与初始时刻的状态有关。如果引起弦振动的初始原因不同，那么弦的振动规律会有显著的不同。

因此，为了描述一个具体的物理问题，除了方程外，还必须考虑这个物理问题的初始状态和环境条件。在数学物理方程中，将用来说明物理模型的初始状态和边界上约束情况的条件分别称为**初始条件**和**边界条件**。下面具体说明初始条件和边界条件的表达形式。

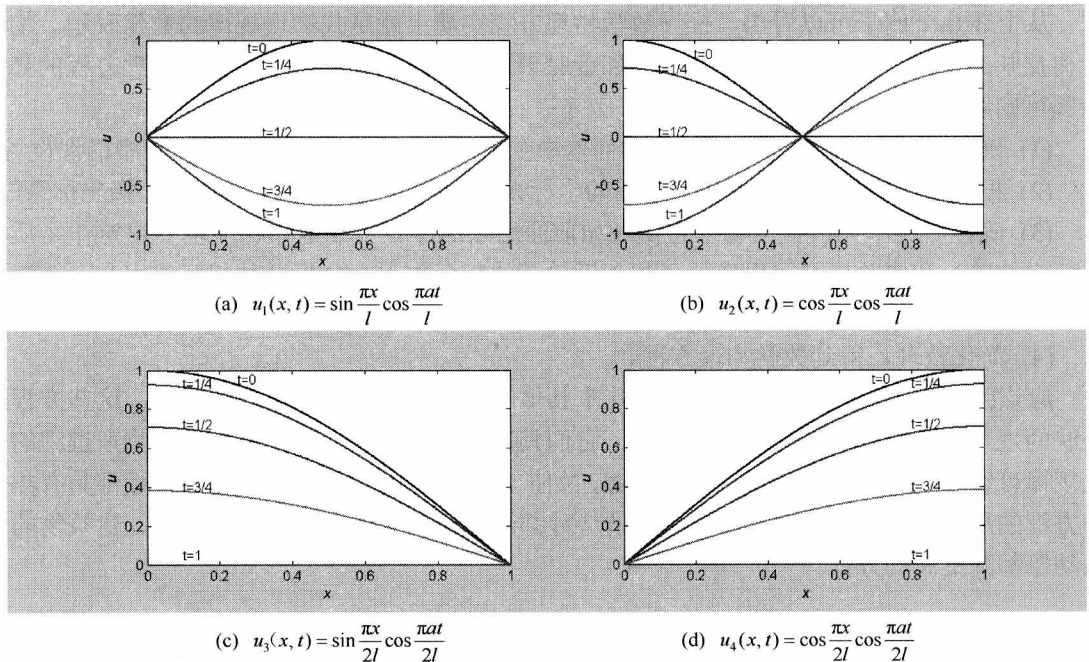


图 1.3 一维波动方程的 4 个解在 $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ 时的图像 (取 $l = 1, a = 1$)

1.2.1 初始条件

对随时间变化的问题，必须考虑研究对象在起始时刻的状态。对于振动过程，初始条件应包括初始时刻的位移和速度，设初始位移、初始速度分别为 $\varphi(x, y, z)$ 、 $\psi(x, y, z)$ ，称

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left. \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z) \quad (1.2.1)$$

为振动方程的初始条件, 当 $\varphi(x, y, z) \equiv 0$ 、 $\psi(x, y, z) \equiv 0$ 时, 式(1.2.1)称为齐次初始条件; 当 $\varphi(x, y, z)$ 或 $\psi(x, y, z)$ 不恒为零时, 它称为非齐次初始条件。

对于输运过程(扩散、热传导等), 初始状态指的是所研究物理量的初始分布(初始浓度分布、初始温度分布等), 因此, 初始条件是

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad (1.2.2)$$

其中, $\varphi(x, y, z)$ 为已知函数。

从式(1.2.1)和式(1.2.2)可以看到, 不同类型的方程, 其相应初始条件的个数不同。从数学角度看, 就时间这个变量而言, 输运过程的方程中只出现 t 的一阶导数, 它是关于 t 的一阶微分方程, 所以只需要一个初始条件; 振动方程中出现了 t 的二阶导数, 所以需要两个初始条件; 对于泊松方程和拉普拉斯方程, 由于其不包含时间变量, 所以不需要提初始条件。

另外, 需要注意的一点是初始条件应当给出整个系统的初始状态, 而非系统中个别点的初始状态。例如, 对于“长为 l 、两端固定的弦, 初始时刻时, 将弦的中点拉起 h ”, 如图 1.4 所示。其相应的初始条件应为

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{2h}{l}x & (0 \leq x < \frac{l}{2}) \\ \frac{2h}{l}(l-x) & (\frac{l}{2} \leq x \leq l) \end{cases}$$

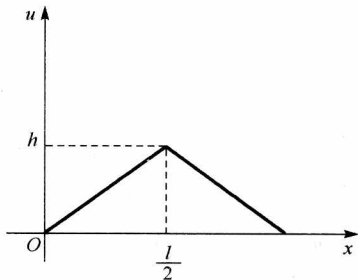


图 1.4 初始位移

1.2.2 边界条件

研究具体的物理系统, 还必须考虑周围环境对研究对象的影响, 即需要给出系统的边界条件。常用的线性边界条件主要有以下三类。

(1) 第一类边界条件: 又称为狄利克雷条件, 它直接规定未知函数在边界上的数值, 即

$$u(x, y, z, t)|_{\Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (1.2.3)$$

其中, $f(x, y, z, t)$ 为已知函数, Γ 为边界。

如弦的振动问题, 设弦长为 l , 一端固定, 一端以 $\sin t$ 规律运动, 则在其两个端点上满足

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = \sin t$$

(2) 第二类边界条件: 又称为诺伊曼条件, 它直接给出未知函数在边界上的法向导数值, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (1.2.4)$$

其中, \mathbf{n} 为边界 Γ 上点 (x, y, z) 的外法向量, $f(x, y, z, t)$ 为已知函数。

对于弦的振动, 第二类边界条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = f(t)$ 可视为在端点 $x=l$ 处有沿着 u 轴方向的外力

$Tf(t)$, 其中 T 为弦中张力。而齐次条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$ 则表示该端点不受垂直方向外力的作用, 所以称其为自由端。

而对于热传导方程, 由傅里叶传热定律得

$$k \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = - \frac{dQ}{dSdt}$$

故第二类边界条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f(x, y, z, t)$ 表示在单位面积、单位时间内沿边界外法线方向流出的热量为 $kf(x, y, z, t)$, 若在边界没有热量交换, 则称边界是绝热的, 此时有 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$ 。如长为 l 的导热杆, 在 $x=0$ 端有热量流出, 热流密度为 $q(t)$, $x=l$ 端绝热, 则杆两端的边界条件为 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{q(t)}{k}$ 和 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$ 。

(3) 第三类边界条件: 又称为混合边界条件。它给出了未知函数和它的法向导数的线性组合在边界上的值, 即

$$\left[u + h \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (1.2.5)$$

式中, $h(x, y, z)$ 、 $f(x, y, z, t)$ 为已知函数。

如在弦的振动问题中, 若端点 $x=l$ 固定于弹簧的一端, 弹簧的另一端固定, 且弦处于平衡位置, 则弹簧也处于平衡位置, 此种连接称为弹性连接。设弦的位移为 $u(x, t)$, 则在 $x=l$ 处, 弹性力为 $-ku|_{x=l}$, 其中 k 为弹簧的弹性系数, 而张力的垂直分量为 $T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}$, 由力的平衡, 有

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -ku|_{x=l}$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \Big|_{x=l} = 0$$

其中, $h = \frac{k}{T}$ 。若 $x=0$ 端也固定在弹性支承上, 则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu \right) \Big|_{x=0} = 0$$

又如杆的导热问题, 若端点 $x=l$ 自由冷却, 且周围介质温度为 u_1 , 则由牛顿冷却定理, 在 dt 时间内通过杆的端点横截面散失的热量和杆端点上的温度与介质的温度差、杆的横截面积及 dt 成正比, 即

$$dQ_1 = H(u - u_1) dSdt$$

其中, H 为热交换系数, $H > 0$; dS 为杆的横截面积。同时, 从杆的内部流到边界的热量为