高等学校教学用書

矢算概論

И. А. 高里德凡著

商务印書館

高等学校教学用書

矢 算 概 論

И. А. 高里德凡著
卜 元 震 譯

商 务 印 書 館

本書系根据苏联國营技術理論書籍出版社（Гостехиздат）出版的高里德凡（И. А. Гольдфайн）所著“矢算概論”（Элементы векторного исчисления）1948年第二版譯出的。原書經苏联高等教育部審定为高等工業学校教学参考用書。

矢　算　概　論

卜元震譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

[上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號]

新　華　書　店　總　經　售

上　海　大　華　印　刷　廠　印　刷

(13017·67)

1953年5月初版	開本 850×1168 1/32
1956年10月5版	字數 118,000
1956年12月上海第9次印刷	印數 16,001—20,000
印張 4 14/16	定價（8）¥0.60

目　　録

第二篇 矢量分析

序　　言

作者过去几年在全苏函授工業学院动力系教学，本書是將当时的講义經修改而成，內容有矢量代数、矢量分析以及动力学院的学生所要求的基本概念，但是在任何專業的技術大学中，当学習解析几何和分析的適当的各章时，也是有用的。

在这教材中，所敍述的內容是相当廣的，所有的定理都經詳細証明，而且強調矢量固有的特征。在敍述場論的初步时，特别注意說明它的物理意义。基本定理的証明是几何的形式而強調它們的物理意义。

本書第一次是由全苏函授工業学院出版。在本版，除去無关重要的文字修改外，有下面几点的更改。在"矢量代数"部分增加矢量形式的比屋薩伐定律，在場論部分中，按照新的方式敍述矢量的旋度，并且增加調和函数和曲綫座标兩章，对于这些增补部分，我們并不想敍述得很完善，而主要的目的是引起讀者从实用的观点來注意这些重要的数学部分，要進一步認識这几章的內容，介紹讀者去讀書末所列的書籍。

И. 高里德凡。

第一篇　矢量代数

第一章　矢量的加法与减法

1. 数量　某些物理量基本上由其对应度量系統所測得的数值决定，例如物体的体積由其所含單位立方数决定，温度由度数决定，电量由庫倫來測定等等。

基本上由数值决定的量称为数量。

数量可为正量或負量，例如温度高于零度是正，而低于零度是負，电量同样有正有負。但是有些数量(体積、質量)則恆为正。数量是代数量，并且对它們可施行任何代数运算：加减乘除等。

2. 矢量　某些物理量的确定，除了知道它們的数值外，还必須指出它們的方向。例如只說有 5kg 的力是不充分的，还須要指出力的作用方向，对于速度、加速度等等，也是同样情形。

除了数值，还具有方向的量称为矢量，簡称矢。

在几何上，我們用具有箭头的綫段表示矢量(圖 1)。箭头指出矢量的方向，而且在选定的比例尺下，綫段的長度是表示矢量的数值。

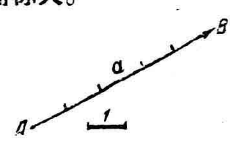

圖 1.

一般用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (开始的三个拉丁字母，用闊版鉛字印刷)，或者用 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (上面帶有短划的拉丁字母，用普通鉛字印刷)表示矢量，或者也可以用 $\overline{AB}$ 表示矢量，其中 A 是始点，B 是終点。

以后主要采用第一种方法表示矢量。

矢量的数值，取正号的，叫做矢量的長或模，或絕对值，用 $|\boldsymbol{a}|$

或 a（普通鉛字）或 $|\bar{a}|$ 來表示它；矢量的模是正数量。

註：我們应用記号时，对于表示量的字母必須極端注意，用闊版鉛字印刷的字母是表示矢量，用普通鉛字印刷的字母是表示数量；其中矢量与它的模，用同一字母表示，所不同的是用对应的闊版与普通鉛字印刷。

置有矢量的直綫称为**矢量荷載者**。

在講到矢量运算之前，我們先介紹下列的定义：

定义 1. 如果矢量的長（模）等于零，那么这矢量就等于零。

这样的矢量也称为零矢，零矢的始点与它的終点相重合，而矢量本身变为一点。

定义 2. 如果兩个矢量有等模、平行而且同向，那么这兩个矢量是彼此几何相等。

因此，例如矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$（圖 2）就是几何相等：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$（圖 2）却不几何相等，因为虽然它們的模相等，但是它們的方向不同。因此从兩个矢量模的相等还不能得出矢量本身的几何相等。

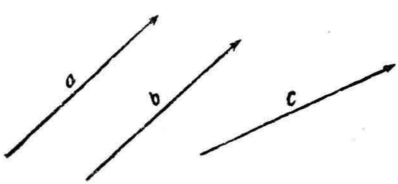

圖 2.

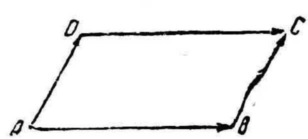

圖 2a.

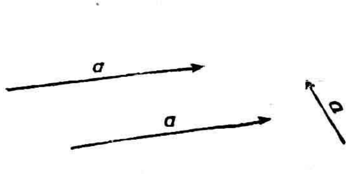

圖 2b.

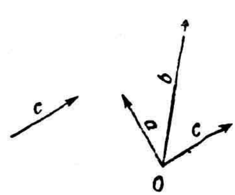

圖 2c.

平行四边形的对边是几何相等的矢量(圖 2a)：

$$\overline{AB}=\overline{DC} \quad 及 \quad \overline{AD}=\overline{BC}。$$

以后我們对几何相等的矢量不加区别，并且用同一符号來表示它們(圖 2b)。

由此推得，矢量可以平行移动到任意一点，因而当研究几个矢量时，我們总可以將它們的始点移到一点 O (圖 2c)。而把这一点看作它們的公共始点，这种情形，我們以后將常常用到。

我們必須注意，当我們采納这些定义时，不能將力与矢量同样看待，因为力的作用点只能沿着力的作用綫移动，而不能移向任意点。

註：兩矢量的几何相等就意味着它們具有同一数值，平行而且同指向。因此几何相等，按照它的性質來說，与一般代数相等是截然不同的。虽然如此，几何相等一如代数相等亦用符号＝表示。它們的区别如下：所給等式是几何相等或是代数相等，就視等式兩边是矢量还是数量。

同样，我們指出，大小的概念只能应用于数量，因此只有矢量的模才能適用不等式。

3. 矢量加法　假設我們有几个矢量，例如四个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ (圖 3)。

这些矢量的几何和可了解为矢量 $\boldsymbol{e}$，它的作法如下：

取任意点 O，作与矢量 $\boldsymbol{a}$ 几何相等的矢量 $\overline{OA}$；再以得到的 A 点做始点，作与矢量 $\boldsymbol{b}$ 几何相等的矢量 $\overline{AB}$，余类推(圖 3)。这样的作圖法直至取尽所有的矢量为止，在已知的情况就是取尽矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$。結果就得到折綫 $OABCD$。这折綫的封閉綫 OD 就是所求的几何和。

$$\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD} \text{ (多边形規則)}$$

或

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

其中，两个矢量的几何和(圖 3a)，就是由这两个矢量所構成的平行四边形的对角綫(平行四边形規則)；不在一个平面上的三个矢量的几何和，就是由它們所組成的平行六面体的对角綫(圖 3b)。

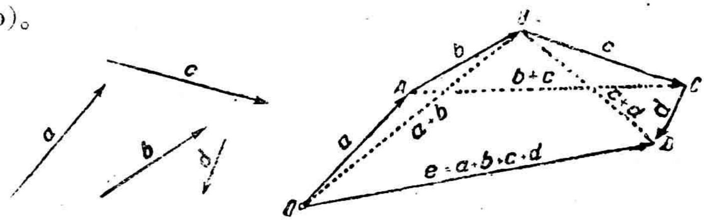

圖 3.

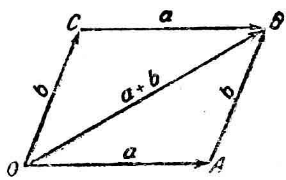

圖 3a.

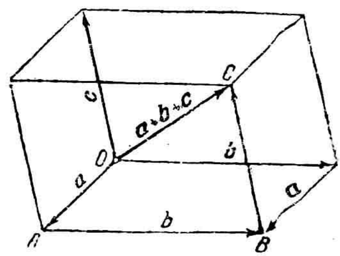

圖 3b.

因为折綫的封閉綫小于或等于折綫的周界，所以几何和的模小于或等于各項矢量的模的算術和：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|.$$

如果在作圖时，各項矢量構成封閉多边形，那么几何和就等于零。这可以从定义 1 直接得出。因此，如果三个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的几何和等于零，那么它們就可以構成三角形(圖 4)。

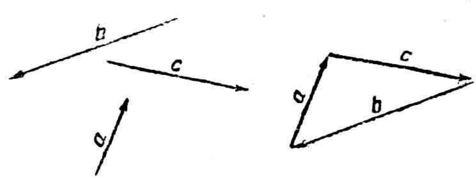

圖 4.

問題 1. 設四边形的对角綫互相平分，証明它是平行四边形(圖 5)。

解 按照已知条件可得矢量等式: $\overline{AO}=\overline{OC}$, $\overline{BO}=\overline{OD}$, 由此可知 $\overline{AO}+\overline{OD}=\overline{BO}+\overline{OC}$, 或 $\overline{AD}=\overline{BC}$。

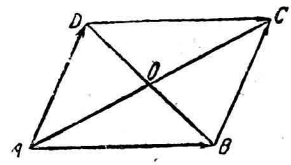

圖 5.

这就是説，AD 与 BC 相等而且平行，亦即四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

註：各項矢量可以不在一个面上。这样我們的敍述仍旧正确，不必作任何改变，在这样情况，所得折綫不过是空間折綫而已；圖 3b 就是这种情形。

4. 几何和的性質 1° 几何和与各項的次序無关。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\text{（交換律）。}$$

其实从圖 3a 可以得到:

$$\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \quad 及 \quad \overline{OB}=\overline{OC}+\overline{CB}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

即是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

2° 在矢量几何相加时，各項矢量可以結合成个别的組合。例如，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}$$

（結合律）。

实际上，从圖 3 可得:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{OB} \quad 及 \quad \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overline{BD}.$$

由此，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\overline{OB}+\overline{BD}=\overline{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

同样，

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overline{AC},$$

因此

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}=\overline{OA}+\overline{AC}+\overline{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d},$$

証訖。

5. 矢量减法 所謂兩个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的几何差是指这样的一个新的矢量而言，它与矢量 $\boldsymbol{b}$（減数）的和等于矢量 $\boldsymbol{a}$（被減数），也就是說，如果 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$（圖 6），卽得：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

由此可得矢量差 $\boldsymbol{c}$ 的如下的作圖法：

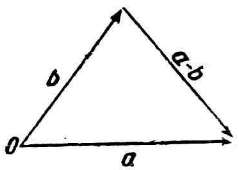

圖 6.

將 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 兩个矢量取共同始点 O，从矢量 $\boldsymbol{b}$ 的終点到矢量 $\boldsymbol{a}$ 的終点引一矢量，卽得所求矢量差 $\boldsymbol{c}$（圖 6）。

几何差的模大于或等于模的差：

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|.$$

因为任意三角形的一边大于其他兩边的差。

在平行四边形中，有一个对角綫是平行四边形兩边的几何和；而另一对角綫就是几何差（圖 6a）。所以兩个矢量的几何差的模可以大于它們几何和的模（圖 6b）。

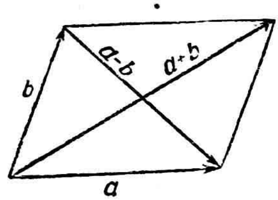

圖 6a.

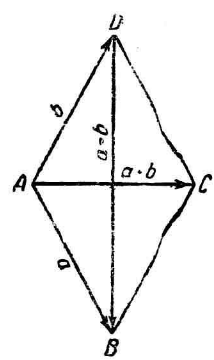

圖 6b.

定义 **与矢量 $\boldsymbol{a}$ 相逆的矢量称为逆矢量（$-\boldsymbol{a}$），它平行于矢量 $\boldsymbol{a}$，而且同模，但是指向相反（圖 7）。**

从逆矢量的定义可以得到：

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0.$$

定理 **为要減去矢量 $\boldsymbol{b}$，則与逆矢量（$-\boldsymbol{b}$）相加卽可：**

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

証　設 $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overline{AC}=(-\boldsymbol{b})$, $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$(圖 7a)。

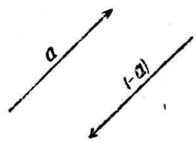

圖 7.

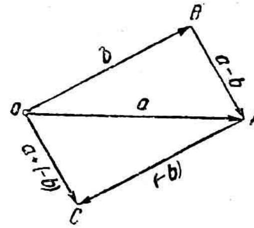

圖 7a.

当四边形 $OBAC$ 的对边 OB 与 AC 相等且平行时，也就是說我們的四边形是平行四边形。因此，

$$\overline{BA}=\overline{OC},\quad 但\quad \overline{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\quad \overline{OC}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

即是

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

故定理証訖。

从这个定理可以得到一个結論，就是矢量与代数中的数完全相当；特别是在几何等式中，可以將个别項易号后，从等式一端移到另外一端。例如，如果

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}\quad 則\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}.$$

6. 用数量乘矢量的乘法　設有矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数量 m。当以数量 m 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 时，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模改变 m 倍，而它的指向保持不变，或者变成反指向是决定于 m 的正負。在这样的运算以后，可以得到新的矢量 $m\boldsymbol{a}$，称为数量 m 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘積(圖 8)。我們可以得到：

$$|m\boldsymbol{a}|=|m|\cdot|\boldsymbol{a}|,$$

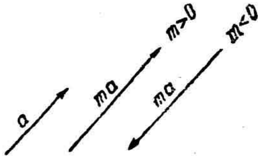

圖 8.

其中 $|m|$ 是 m 的絕对值。圖 8a 所表示的，是矢量 $3\boldsymbol{a}$ 与 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，它們是以

数量 3 及 $-\frac{1}{2}$ 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 而得到的。

用 -1 乘矢量 $\boldsymbol{a}$, 我們可以得到逆矢量$(-\boldsymbol{a})$:

$$-1\cdot\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a}).$$

用数量乘矢量的乘積適合分配律

$$m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}.$$

亦卽好像在普通代数中一样,可以去括号。

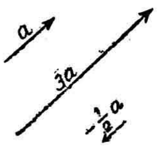

圖 8a.

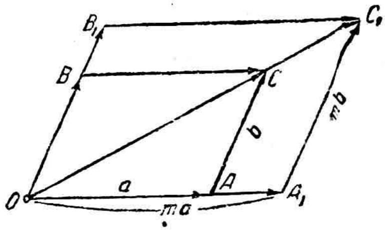

圖 8b.

实际上,我們有:

$$\overline{OA}=\boldsymbol{a},\qquad \overline{OA_1}=m\boldsymbol{a},$$
$$\overline{AC}=\boldsymbol{b},\qquad \overline{A_1C_1}=m\boldsymbol{b}.$$

由此

$$OA_1=mOA \quad 及 \quad A_1C_1=m\,AC,$$

亦卽三角形 $O\,A_1C_1$ 与 OAC 相似,因此可得:

$$OC_1=mOC,$$

因而我們可得矢量等式:

$$\overline{OC_1}=m\,\overline{OC}。$$

所以

$$m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

7. 共綫矢量　位于平行綫上的矢量称为共綫矢量。

矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (圖 9) 彼此共綫。它們可以同指向，也可以反指向。

根据数量乘矢量的乘積的定义，矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $m\boldsymbol{a}$ 共綫。反之，如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{b}$ 共綫，那么其中的一个，例如 $\boldsymbol{b}$，是用某数量 m 乘另外一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘積。其实，先假設共綫矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同指向(圖 9a)。用 m 表示它們模的比例。

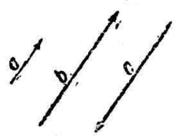

圖 9.

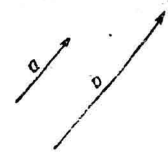

圖 9a.

$$m=\frac{b}{a}.$$

那么矢量 $m\boldsymbol{a}$ 和矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 同方向；而且它的模等于：

$$\frac{b}{a}\cdot|\boldsymbol{a}|=b=|\boldsymbol{b}|.$$

因此，$\boldsymbol{b}$ 与 $m\boldsymbol{a}$ 同模同方向，亦即它們互相几何相等，而这正意味着 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$。如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反方向，那么数量乘数 m 应当是 $-\frac{b}{a}$，而我們的論述仍旧正确。

8. 單位矢量 現在我們來考察空間任意矢量 $\boldsymbol{a}$。**如 $\boldsymbol{a}^0$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，但是它的模等于一單位：$|\boldsymbol{a}^0|=1$，那么，就称 $\boldsymbol{a}^0$ 为在矢量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的單位矢量**(圖 10)。我們有：

$$\boldsymbol{a}=a\cdot\boldsymbol{a}^0$$(a 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模)，

因为矢量 $a\cdot\boldsymbol{a}^0$ 是以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向为方向，而且它的模等于

$$|a\cdot\boldsymbol{a}^0|=a|\boldsymbol{a}^0|=a.$$

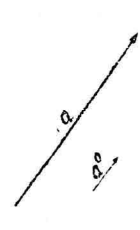

圖 10.

單位矢量可以确定空間的方向；任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘对应單位矢量 $\boldsymbol{a}^0$ 的乘積表示。

9. 共面矢量 **位于同一平面的矢量称为共面矢量**，而且預先

假定它們有公共始点 O。

設 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 兩矢量不共綫，那么矢量 $\mathbf{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ 位于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的平面內(m 与 n 是任意数量乘数)。例如在圖 11 a 中給出 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的作法。因此，矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 共面。

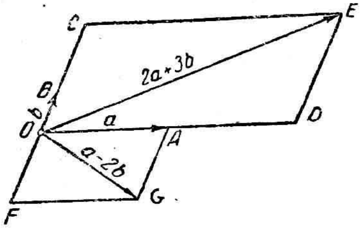

圖 11 a.

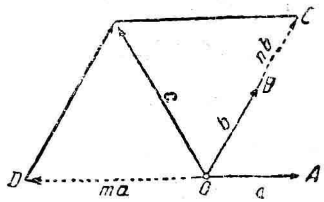

圖 11 b.

反之，如果三矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$ 共面，那么总能找得兩数量 m 与 n，使

$$\mathbf{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}.$$

在圖 11 b 的情形，$m=-\dfrac{OD}{OA}$；$n=\dfrac{OC}{OB}$.

空間任意矢量 $\boldsymbol{d}$ 可以用下式表示：

$$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}+p\mathbf{c},$$

其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$ 是預先給出的三个不共面的矢量，而 m, n, p 是数量，亦即空間任意矢量可分解为三个平行于已知矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$ 的組成矢量(圖 12)。

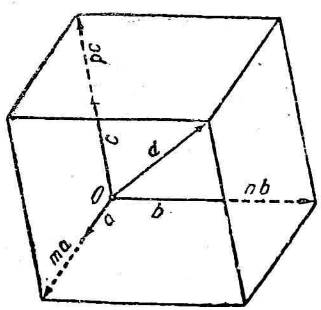

圖 12.

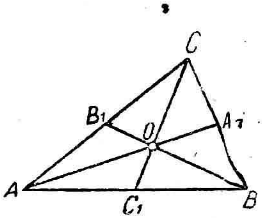

圖 13.