



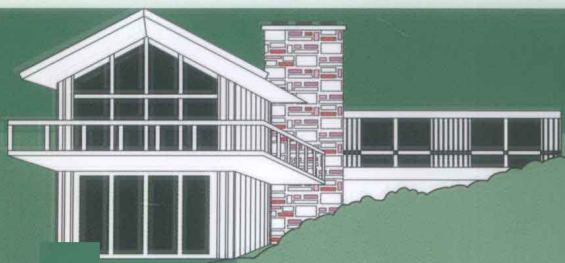
普通高等教育土木类专业“十二五”规划教材

JIEGOU LIXUE



结 构 力 学 (下册)

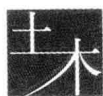
●主 编 樊友景 高洪波



郑州大学出版社

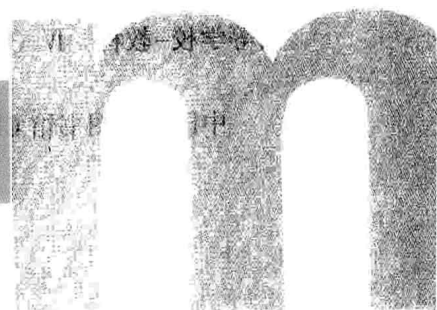
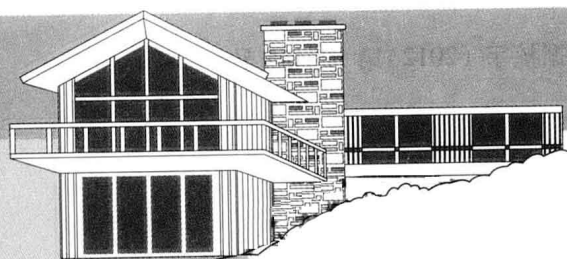
JIEGOU LIXUE

普通高等教育土木类专业“十二五”规划教材



结 构 力 学 (下册)

●主 编 樊友景 高洪波



 郑州大学出版社

郑 州

内 容 简 介

本书系统介绍了通用技术课程的基础知识和应用。全书共分为12章,包括通用技术课程的基本理念、设计基础、结构设计、流程与设计、系统与设计、控制与设计、电子控制技术、简易机器人制作技术、现代农业技术、服装与家政、汽车驾驶与保养、建筑与设计等。本书重点阐述了通用技术基本理念与基本方法,在高中通用技术课程标准的基础上,扩充了很多相关的专业知识内容。

本书可作为普通本科院校通用技术课程辅修或选修的教材,也可供从事通用技术课程教学的高中老师自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

通用技术 / 周晓林主编. —北京: 科学出版社, 2012.8

国家级实验教学示范中心师范生能力实训系列教材

ISBN 978-7-03-035411-2

I. ①通… II. ①周… III. ①通用技术-师范大学-教材②通用技术-高中-教学参考资料 IV. ①G634.933

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 200693 号

责任编辑: 杨 岭 高映雪 / 封面设计: 陈思思

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

成都创新包装印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本: 787*1092 1/16

2012年8月第一次印刷 印张: 18

字数: 400千字

定价: 36.00元

编写指导委员会

The compilation directive committee

.....

名誉主任 王光远

主 任 高丹盈

委 员 (以姓氏笔画为序)

王 锋 王新武 司马玉州 刘立新

刘希亮 关 罡 李广慧 李纪周

李晓峰 张 伟 张 玲 张国强

陈 淮 赵顺波 姚庆钊 祝彦知

夏锦红 原 方 钱文军 陶炳海

鲍 鹏

秘 书 崔青峰 刘 开

再版说明

Publication intro

.....

2006年以来,国家实施了“高等学校本科教学质量与教学改革工程”,进一步明确提出:提高质量是高等教育发展的核心任务;提高质量的核心是大力提升人才培养水平;提高质量的关键是明确人才培养目标,加快专业改革与建设步伐,加大课程改革与建设的力度。几年来,各院校在专业建设、课程建设方面取得了丰硕的成果,而教材既是教育教学成果的直接体现,也是深化教学内容和改革教学方法的重要推动力。为此,教育部要求加强新教材和立体化教材建设,提倡和鼓励根据教学需要编写适应不同层次、不同类型院校,具有不同风格和特点的高质量教材。

为更好地贯彻落实《国家中长期教育改革和规划纲要(2010—2020年)》和推进高等教育改革与发展,服务高等教育事业,在前版的基础上,我们总结了各校教育教学改革成果,分专业多次召开了教育教学研讨和教材编写会议,组织学术水平高、教学经验丰富的一线教师,使用最新的规范标准编写了本版教材。

希望本版教材的出版对高等教育土木类专业教育教学改革和教学质量提高起到更大的推动作用,也希望使用本版教材的师生多提意见和建议,以便修订完善。

编写指导委员会

2011年8月

前言 (第二版)

Preface

.....

本书作为普通高等教育土木类专业“十二五”规划教材之一,根据教育部结构力学教学指导委员会 2004 年通过的土木工程专业结构力学教学基本要求和结构力学在土木工程专业中的地位,由郑州大学、河南科技大学、河南理工大学、信阳师范学院、安阳工学院、湖北工程学院联合编写完成。参编教师均长期工作在教学、科研第一线,具有坚实的理论基础、丰富的教学经验和工程实践。

本书将“创新实用”作为教材编写的基本原则,既吸取了以往教材的长处,又反映了作者长期积累的教学经验;教材既注重结构力学内容的系统性和完整性,满足土木工程专业各方向的教学要求,又注重其实用性,尽量与相关课程和工程实际相联系。编写时精选内容,理论联系实际,注意文字简练,叙述深入浅出,通俗易懂,图文配合紧密。

参加本书编写工作的有湖北工程学院曾宪桃(第 1 章),河南理工大学孟海平(第 2 章),安阳工学院李珂(第 3 章 3.4~3.7、第 7 章),郑州大学宁永胜(第 4 章),河南科技大学徐红玉(第 5 章),湖北工程学院任振华(第 6 章),河南理工大学蔺新艳(第 8 章),信阳师范学院高洪波(第 9 章、第 10 章),郑州大学樊友景(第 3 章 3.1~3.3、第 11 章、第 12 章)。全书由樊友景、高洪波通稿,其中,高洪波负责第 7 章、第 8 章、第 9 章、第 10 章,其余均由樊友景负责。

限于编者水平,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正。

编者

2012 年 5 月

前言 (第一版)

Preface

.....

本书作为普通高等教育土木工程专业“十一五”规划教材之一,内容紧扣“高等学校土木工程专业本科教育培养目标和培养方案及课程教学大纲”,严格按照教育部结构力学教学指导委员会 2004 年年会通过的土木工程专业结构力学教学基本要求,本着实用创新、面向对象的原则,由学术水平高、教学经验丰富的一线教师编写。

本书具有以下特点:一、注重实用创新的基本原则,吸取了以往的教学经验及有关教材的长处,既保持结构力学基本理论的系统性,又在内容上满足土木工程专业中各个专业方向的教学要求,便于学生自学,深入浅出,反映作者在工程结构分析中的新成果;二、注重对学生知识转化为能力的培养,理论联系实际,教材内容方便课堂教学精讲精练,课后作业按难易程度逐步展开,循序渐进;三、关注现代结构和结构设计技术的发展,教材内容与相关课程和工程实际密切相联。

本书由曾宪桃、樊友景任主编,参加本书编写的有:河南理工大学曾宪桃(第 1 章),平顶山工学院杜留记(第 2 章),黄淮学院李纪周(第 3 章),河南工业大学陈丽(第 4 章、第 8 章部分内容),郑州大学宁永胜(第 5 章),河南科技大学徐红玉(第 6 章),华北水利水电学院唐克东(第 7 章、第 8 章部分内容),河南理工大学王有凯(第 9 章),信阳师范学院高洪波(第 10 章),郑州大学樊友景(第 11、12 章)。

本教材在编写出版过程中得到了兄弟院系领导、专家和郑州大学出版社的大力支持,在此深表谢意。另外,在编写过程中,还学习、参阅、引用了许多优秀的文献资料,在此,对相关文献资料的作者也一并表示由衷的感谢。

限于编者水平,书中难免有疏漏和不足之处,敬请专家、读者指正,提出建议,以便作进一步修订完善。

编者

2007 年 5 月

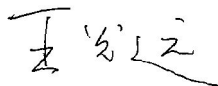
序

Preface

近年来,我国高等教育事业快速发展,取得了举世瞩目的成就。随着高等教育改革的不断深入,高等教育工作重心正在由规模发展向提高质量转移,教育部实施了高等学校教学质量与教学改革工程,进一步确立了人才培养是高等学校的根本任务,质量是高等学校的生命线,教学工作是高等学校各项工作的中心的指导思想,把深化教育教学改革,全面提高高等教育教学质量放在了更加突出的位置。

教材是体现教学内容和教学要求的知识载体,是进行教学的基本工具,是提高教学质量的重要保证。教材建设是教学质量与教学改革工程的重要组成部分。为加强教材建设,教育部提倡和鼓励学术水平高、教学经验丰富的教师,根据教学需要编写适应不同层次、不同类型院校,具有不同风格和特点的高质量教材。郑州大学出版社按照这样的要求和精神,组织土建学科专家,在全国范围内,对土木工程、建筑工程技术等专业的培养目标、规格标准、培养模式、课程体系、教学内容、教学大纲等,进行了广泛而深入的调研,在此基础上,分专业召开了教育教学研讨会、教材编写论证会、教学大纲审定会和主编人会议,确定了教材编写的指导思想、原则和要求。按照以培养目标和就业为导向,以素质教育和能力培养为根本的编写指导思想,科学性、先进性、系统性和适用性的编写原则,组织包括郑州大学在内的五十余所学校的学术水平高、教学经验丰富的一线教师,吸收了近年来土建教育教学经验和成果,编写了本、专科系列教材。

教育教学改革是一个不断深化的过程,教材建设是一个不断推陈出新、反复锤炼的过程,希望这些教材的出版对土建教育教学改革和提高教育教学质量起到积极的推动作用,也希望使用教材的师生多提意见和建议,以便及时修订、不断完善。



2006年7月

本书作者

Authors

主 编 樊友景 高洪波
副 主 编 曾宪桃 徐红玉 宁永胜
编 委 (以姓氏笔画为序)
宁永胜 任振华 李 珂
孟海平 徐红玉 高洪波
曾宪桃 蔺新艳 樊友景

目录

CONTENTS

▷▷▶ 1

第9章 矩阵位移法	1
9.1 概 述	1
9.2 单元刚度矩阵	1
9.3 坐标变换	6
9.4 单元集成法和连续梁的整体刚度矩阵	9
9.5 平面刚架的整体刚度矩阵	16
9.6 等效结点荷载	18
9.7 计算步骤和算例	22
第10章 结构的动力计算	30
10.1 动力计算的特点和动力自由度	30
10.2 单自由度体系的自由振动	33
10.3 单自由度体系的受迫振动	44
10.4 多自由度体系的自由振动	57
10.5 多自由度体系主振型的正交性	69
10.6 两个自由度无阻尼体系在简谐荷载作用下的强迫振动	72
10.7 无限自由度体系的自由振动	75
10.8 计算频率的近似法	78
第11章 结构的稳定性计算	89
11.1 结构稳定性概述	89
11.2 确定临界荷载的静力法	93
11.3 确定临界荷载的能量法	104
11.4 组合压杆的稳定性计算	111
11.5 圆拱和圆环的稳定	116
第12章 结构的极限荷载	127
12.1 结构塑性分析的基本概念	127
12.2 极限弯矩、塑性铰和破坏机构的概念	128
12.3 比例加载时判定极限荷载的一般定理	136
12.4 超静定结构极限荷载的计算	138
12.5 简单刚架的极限荷载	144
12.6 用增量变刚度法求刚架的极限荷载	149
习题参考答案	162
参考文献	174

第9章 矩阵位移法

要点提示

结构矩阵分析法是用数学中的矩阵理论来描述结构力学基本方程的数值分析方法,在结构矩阵分析中,运用矩阵进行计算,不仅能使公式非常紧凑,而且在形式上规格统一,便于使计算过程程序化,因而适用于计算机进行自动化的数学计算。

前面介绍的力法、位移法和力矩分配法都是传统的结构力学方法,它与结构矩阵分析方法在原理上是相同的,只是表述方式上有所区别。

9.1 概述

结构矩阵分析的两种基本方法是矩阵力法(柔度法)和矩阵位移法(刚度法)。前者采用多余力作为基本未知量,后者采用结点位移作为基本未知量。矩阵位移法比矩阵力法便于编制通用的程序,因而在工程界应用较为广泛,所以我们只介绍矩阵位移法。

矩阵位移法与位移法一样,其基本思路是首先将杆件结构离散为有限个单元(杆件),各单元彼此在结点处相联结,以结点位移为基本未知量,然后研究各单元的杆端力与杆端位移之间的关系,此过程称单元分析;再根据结点处平衡条件建立整体平衡方程,此过程称整体分析;最后得到结点的位移值和各单元的内力。矩阵位移法的基本思路是“先分后合”,即先将结构离散然后集合,这样一分一合的过程,就把复杂结构的计算问题转化为简单杆件的分析与综合问题了。因此,它的解题方法可分为两大步骤:

- (1)单元分析。研究单元的力学特性。
- (2)整体分析。考虑单元的集合,研究整体方程的组成原理和求解方法。

9.2 单元刚度矩阵

这一节对平面结构的杆件单元进行单元分析,得出单元刚度方程和单元刚度矩阵。推导过程仍是采用前面的方法,只是重新规定正负号规则,采用矩阵表示形式讨论一般情况下的杆件单元。

9.2.1 一般单元的概念

在杆件结构矩阵分析中,一般是把结构杆件的转折点、汇交点、边界点、突变点或集中

力作用点等列为结点,结点之间的杆件部分称为单元。图 9.1 给出了平面结构中等截面杆单元变形前后的一般情况。杆件同时具有弯曲变形和轴向变形。设杆长为 l , 截面积为 A , 截面惯性矩为 I , 弹性模量为 E 。1、2 分别表示单元的始端点和终端点, 为单元的局部编号。由端点 1 向端点 2 的指向规定为杆轴的正方向, 在图中以箭头标明。

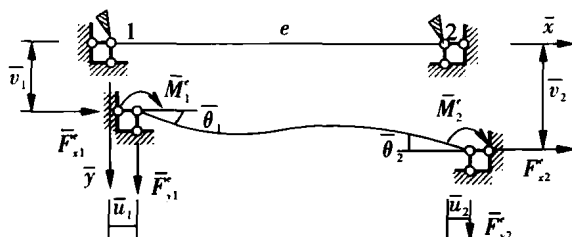
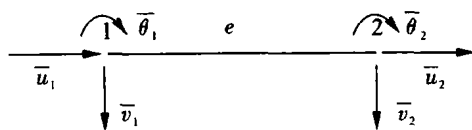


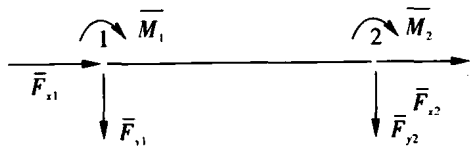
图 9.1

图中采用坐标系 $\bar{x}\bar{y}$, 约定 $\bar{x}$ 轴与杆轴重合, 指向相同; $\bar{y}$ 轴与 $\bar{x}$ 轴垂直, 符合右手法则。这个坐标系称为单元坐标系或局部坐标系。字母 $\bar{x}, \bar{y}$ 上都划有一横, 作为局部坐标系的标志。

在局部坐标系中, 平面单元每个端点一般有三个力分量 $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{M}$ 和与其对应的三个位移分量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}$ 。当 $\bar{u}, \bar{v}$ 与局部坐标系 $\bar{x}, \bar{y}$ 正向相同时为正, $\bar{\theta}, \bar{M}$ 均以顺时针转向为正, 注意它们同位移法中符号规定的区别, 如图 9.2 所示。



(a) 杆端位移



(b) 杆端力

图 9.2

把单元的六个杆端力分量和六个杆端位移分量按照一定的顺序排列, 便形成如下形式的单元杆端位移向量 $\bar{\Delta}^e$ 和单元杆端力向量 $\bar{F}^e$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}^e &= (\bar{\Delta}_{(1)} \quad \bar{\Delta}_{(2)} \quad \bar{\Delta}_{(3)} \quad \bar{\Delta}_{(4)} \quad \bar{\Delta}_{(5)} \quad \bar{\Delta}_{(6)})^{\epsilon T} \\ &= (\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2)^{\epsilon T} \\ \bar{F}^e &= (\bar{F}_{(1)} \quad \bar{F}_{(2)} \quad \bar{F}_{(3)} \quad \bar{F}_{(4)} \quad \bar{F}_{(5)} \quad \bar{F}_{(6)})^{\epsilon T} \\ &= (\bar{F}_{x1} \quad \bar{F}_{y1} \quad \bar{M}_1 \quad \bar{F}_{x2} \quad \bar{F}_{y2} \quad \bar{M}_2)^{\epsilon T} \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

向量元素的排列序号依次为(1)、(2)、…、(6)。这是在单元分析过程中的编码,称为杆端位移分量或杆端力分量的局部码,并以数字加括号作为局部码标志。

9.2.2 单元刚度方程和单元刚度矩阵

用位移法解题时,必须建立反映杆件物理性质的杆端力和杆端位移之间的关系式——转角位移方程。在矩阵位移法中,这种关系式将用矩阵的形式来表示。杆件转角位移方程的矩阵表达式称为单元刚度方程。为此,可先分别求出由各杆端位移单独引起的杆端力,如图9.3所示。其中 E 为材料的弹性模量, l 为杆长, A 为截面面积, I 为截面的惯性矩。应用叠加原理,即可得到杆端力与杆端位移之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{x1}^e &= \frac{EA}{l}(\bar{u}_1^e - \bar{u}_2^e) \\ \bar{F}_{x2}^e &= -\frac{EA}{l}(\bar{u}_1^e - \bar{u}_2^e) \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

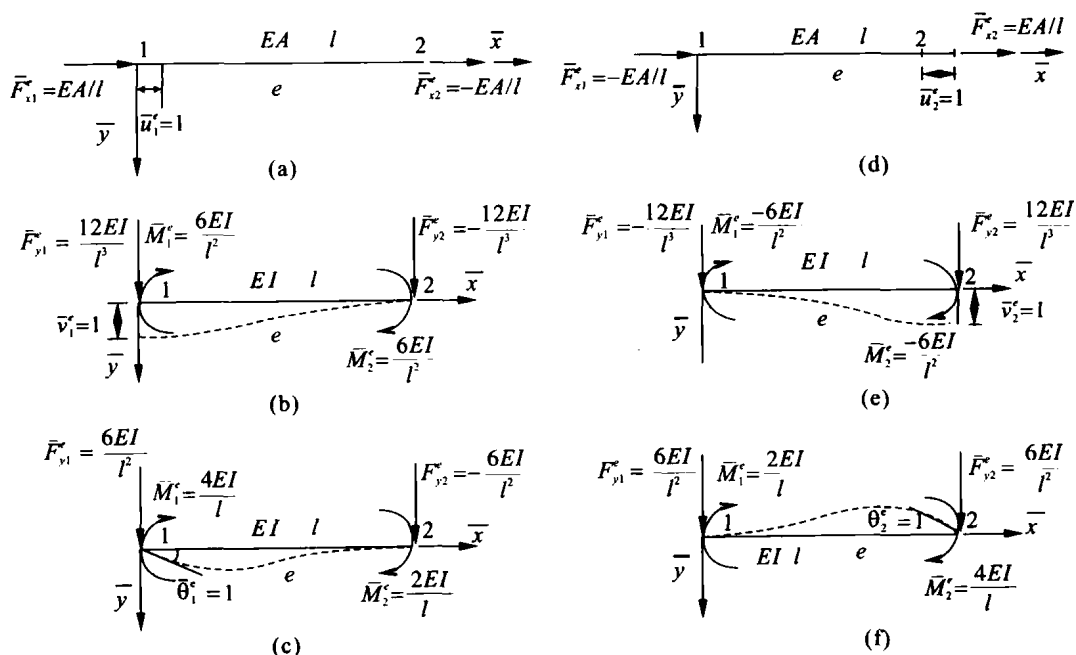


图 9.3

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1^e &= \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_1^e + \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_2^e + \frac{6EI}{l^2}(\bar{v}_1^e - \bar{v}_2^e) \\ \bar{M}_2^e &= \frac{2EI}{l}\bar{\theta}_1^e + \frac{4EI}{l}\bar{\theta}_2^e + \frac{6EI}{l^2}(\bar{v}_1^e - \bar{v}_2^e) \\ \bar{F}_{y1}^e &= \frac{6EI}{l^2}(\bar{\theta}_1^e + \bar{\theta}_2^e) + \frac{12EI}{l^3}(\bar{v}_1^e - \bar{v}_2^e) \\ \bar{F}_{y2}^e &= -\frac{6EI}{l^2}(\bar{\theta}_1^e + \bar{\theta}_2^e) - \frac{12EI}{l^3}(\bar{v}_1^e - \bar{v}_2^e) \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$



将式(9.2)和(9.3)合写成一个矩阵方程形式

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{pmatrix}^e \quad (9.4)$$

上式可记为

$$\bar{F}^e = \bar{k}^e \bar{\Delta}^e \quad (9.5)$$

其中

$$\bar{k}^e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

式(9.4)、(9.5)称为局部坐标系中的单元刚度方程。单元刚度方程的本质是反映单元在各个力的方向上处于平衡状态。矩阵 $\bar{k}^e$ 称为局部坐标系中的单元刚度矩阵。显然,单元刚度矩阵是一个6×6阶的方阵。

9.2.3 单元刚度矩阵的性质

9.2.3.1 单元刚度系数的意义

$\bar{k}^e$ 中的每个元素称为单元刚度系数,代表由于单位杆端位移所引起的杆端力。每个刚度系数都具有不同的物理含义,例如 $\bar{k}^e$ 中的第*i*行*j*列元素表示当第*j*个杆端位移分量 $\bar{\Delta}_j$ 独立发生单位位移,而其他位移分量均为零时,第*i*个杆端力分量 $\bar{F}_i$ 的值。例如,在

式(9.4)中,第6行第3列元素 $\bar{k}_{(6)(3)}^e \left(= \frac{2EI}{l} \right)$ 代表仅当第(3)个杆端位移分量 $\bar{\theta}_1 = 1$ 时引起的第(6)个杆端力分量 $\bar{M}_2$ 。

9.2.3.2 对称性

从式(9.4)可以明显看出单元刚度矩阵是对称矩阵,即

$$\bar{k}_{(i)(j)}^e = \bar{k}_{(j)(i)}^e \quad (9.7)$$

这一特性可以利用反力互等定理得到证明。

9.2.3.3 奇异性

一般情况下, $\bar{k}^e$ 是奇异矩阵,即由该矩阵元素组成的行列式

$$|\bar{k}^e| = 0 \quad (9.8)$$

直接计算(9.6)式的矩阵行列式,不难验证这一结论。这一结论表示由结点位移 $\bar{\Delta}^e$ 可以唯一确定出结点力 $\bar{F}^e$ 。但反过来,由结点力 $\bar{F}^e$ 不能唯一确定出结点位移 $\bar{\Delta}^e$ 。原因在于单元 e 的位移中包含有刚体位移,在单元不受约束时,刚体位移不能确定。

9.2.4 特殊单元的刚度矩阵

式(9.4)表示一般杆件单元的刚度方程,在结构中还有一些特殊杆单元,某些杆端位移已知为零。这些单元的刚度矩阵,可通过对式(9.4)的简化处理得到,可以看作一般杆件单元刚度方程的特例。

9.2.4.1 连续梁单元

一般取连续梁两支座间的一段作为单元,其端点位移条件

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0 \quad (9.9)$$

对于连续梁其轴向变形很小可以忽略不计,又有

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0 \quad (9.10)$$

这样连续梁单元的杆端变形仅有两个角位移 $\bar{\theta}_1$ 、 $\bar{\theta}_2$,将式(9.9)和(9.10)代入式(9.4),便得到连续梁单元的刚度方程。

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{pmatrix}^e \quad (9.11)$$

显然连续梁单元的单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^e = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}^e \quad (9.12)$$

实际上这个特殊单元刚度矩阵可由式(9.6)所示一般杆件的单元刚度矩阵,删去与零位移分量对应的(1)、(2)、(4)、(5)行和列,便得到式(9.12)。

9.2.4.2 平面桁架单元

根据桁架单元的性质,只需考虑杆端轴向位移和桁架的特性。在式(9.6)中,划去(2)、(3)、(5)、(6)行、列元素,桁架单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^e = \begin{pmatrix} \frac{EI}{l} & -\frac{EI}{l} \\ -\frac{EI}{l} & \frac{EI}{l} \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

实际应用中,只要记住一般单元的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$,把与为零的杆端位移对应的行和列去掉,就可导出其他各种特殊单元的刚度方程和刚度矩阵。

9.3 坐标变换

力和位移均是矢量,在不同的坐标系中沿坐标轴的分量是不同的,但代表的是同一物理量(矢量)。由于矩阵位移法的总体思路是将各个单元的刚度方程统一到一个整体坐标系下,形成一个整体刚度方程。在一个多单元组成的结构中,各个杆件的杆轴方向不尽相同,所建立的刚度方程是依据各自的局部坐标系。为了便于进行整体分析,必须选用一个公共的坐标系,称为整体坐标系。为了区别,用 $\bar{x}, \bar{y}$ 表示局部坐标,用 x, y 表示整体坐标。

单元的刚度方程反映的物理本质是单元结点的平衡关系,不因坐标系的不同而改变,所以推导整体坐标系中的单元刚度矩阵 k^e 的基础仍然是局部坐标中的单元刚度矩阵 $\bar{k}^e$ 。我们采用坐标变换的方法:第一步,先讨论两种坐标系中单元杆端力的转换式,得出单元杆端力的坐标转换矩阵;第二步,再讨论两种坐标系中单元刚度矩阵的转换式。

9.3.1 单元杆端力及杆端位移的坐标转换

首先讨论单元杆端力在局部坐标系和整体坐标系之间的关系。图9.4(a)所示为一杆件单元 e ,其局部坐标系为 $\bar{o}x\bar{y}$,整体坐标系为 oxy ,由 x 轴到 $\bar{x}$ 轴的夹角为 α ,以顺时针转向为正。局部坐标系中的杆端力分量用 $\bar{F}^e$ 表示,整体坐标系中的杆端力分量用 F^e 表示图9.4(b),即

$$\begin{aligned} \bar{F}^e &= (\bar{F}_{x1} \quad \bar{F}_{y1} \quad \bar{M}_1 \quad \bar{F}_{x2} \quad \bar{F}_{y2} \quad \bar{M}_2)^{eT} \\ F^e &= (F_{x1} \quad F_{y1} \quad M_1 \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad M_2)^{eT} \end{aligned}$$

$\bar{F}^e$ 又称为局部坐标系中的单元杆端力列阵;而 F^e 又称为整体坐标系中的单元杆端力列阵。

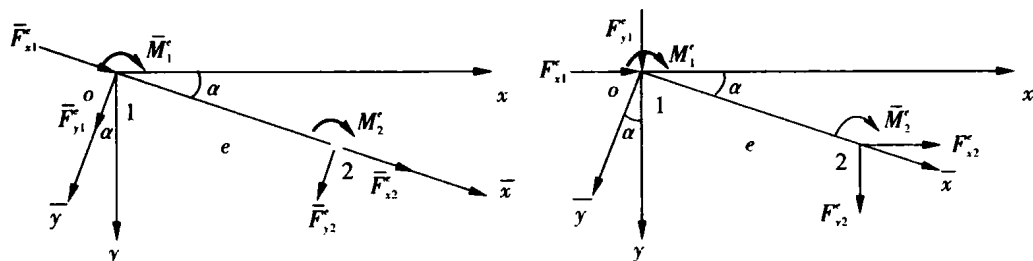


图 9.4

利用几何关系容易给出整体坐标系中的杆端力分量 F_{x1}^e 、 F_{y1}^e 、 M_1^e 、 F_{x2}^e 、 F_{y2}^e 、 M_2^e 和局部坐标系中的杆端力分量 $\bar{F}_{x1}^e$ 、 $\bar{F}_{y1}^e$ 、 $\bar{M}_1^e$ 、 $\bar{F}_{x2}^e$ 、 $\bar{F}_{y2}^e$ 、 $\bar{M}_2^e$ 之间的关系。

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{x1}^e &= F_{x1}^e \cos\alpha + F_{y1}^e \sin\alpha \\ \bar{F}_{y1}^e &= -F_{x1}^e \sin\alpha + F_{y1}^e \cos\alpha \\ \bar{M}_1^e &= M_1^e \\ \bar{F}_{x2}^e &= F_{x2}^e \cos\alpha + F_{y2}^e \sin\alpha \\ \bar{F}_{y2}^e &= -F_{x2}^e \sin\alpha + F_{y2}^e \cos\alpha \\ \bar{M}_2^e &= M_2^e \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

用矩阵形式表示, 可得

$$\begin{pmatrix} \bar{F}_{x1}^e \\ \bar{F}_{y1}^e \\ \bar{M}_1^e \\ \bar{F}_{x2}^e \\ \bar{F}_{y2}^e \\ \bar{M}_2^e \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{x1}^e \\ F_{y1}^e \\ M_1^e \\ F_{x2}^e \\ F_{y2}^e \\ M_2^e \end{pmatrix}^T \quad (9.15)$$

此式即为单元杆端力在两种坐标系之间的关系式, 可简写为

$$\bar{F}^e = T F^e \quad (9.16)$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (9.17)$$

称为单元坐标变换矩阵。