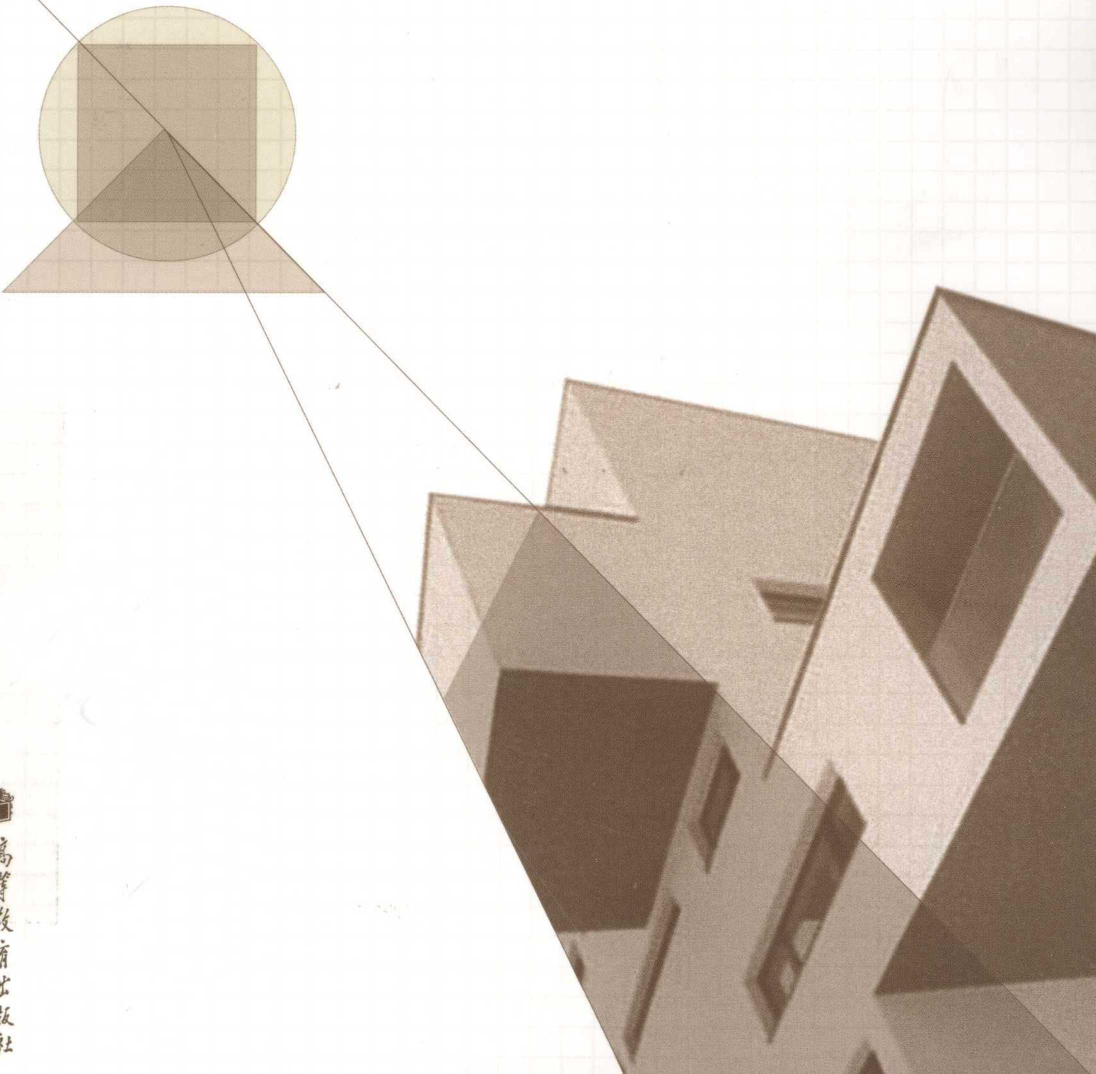
高等学校教材

Linear Algebra

线性代数

主编 焦争鸣 张万琴



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主编　焦争鸣　张万琴

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书介绍了线性代数的基本概念、理论和方法，主要内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的对角化、二次型及线性空间与线性变换。内容安排上由浅入深，概念表述清晰，语言通俗易懂，节后配有习题，章后配有综合习题，书后附有习题参考答案。

本书可作为高等学校理工类、经济管理类等专业线性代数课程的教材或参考书，也可供自学考试和相关科技工作者参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／焦争鸣，张万琴主编. -- 北京：高等教育出版社，2012.1
ISBN 978-7-04-034018-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①焦… ②张… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第242302号

策划编辑 李晓鹏 责任编辑 李晓鹏 封面设计 赵 阳 版式设计 余 杨
插图绘制 尹文军 责任校对 窦丽娜 责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	廊坊市科通印业有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	13	版 次	2012年1月第1版
字 数	230千字	印 次	2012年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	19.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 34018-00

前　言

随着科学技术的快速发展和计算机技术的广泛应用，线性代数的理论和方法在工程技术、科学研究以及经济管理中的应用愈加深入。作为高等学校非数学专业的基础课程之一，线性代数在高等教育中的地位和作用也愈显重要。

本书根据全国硕士研究生入学考试大纲要求，汇集编者多年来在河南师范大学、河南科技学院等高校为理工类、经济类和管理类本科生讲授线性代数课程的经验和体会，修改整理完成。全书共分六章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的对角化、二次型和线性空间与线性变换等线性代数的基本知识。各章内容既紧密联系又相对独立，每章增加了相关内容的应用，以增强学生的感性认识。本书前四章为基础部分，后两章为提高部分，不同专业可根据需求酌情删减。

鉴于线性代数具有较强的抽象性和逻辑性，为使学生掌握科学严谨的论述方法，理解抽象概念，了解线性代数的基本理论和方法，本书在编写过程中力求做到：内容精炼够用，编写由浅入深，语言简练，通俗易懂，兼顾科学性和直观性，多用实例引入概念，重要定理以例说明。节后配有练习题，章后配有综合习题，书后附有习题参考答案。

本书由河南师范大学和河南科技学院联合编写，焦争鸣、张万琴任主编，参加本书编写的有：赵营峰（第一章）、董丽红（第二章）、左飞（第三章）、陈玉珍（第四、五章）、马天水（第六章）。全书由焦争鸣、张万琴统稿，焦争鸣最后定稿。

本书在编写过程中，得到河南师范大学教务处、数学与信息科学学院和高等教育出版社的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不当之处，恳请广大读者和同行批评指正。

编者

2011 年 11 月

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数的一个理论分支，它是研究线性方程组、矩阵及向量相关性的有力工具. 行列式不仅在数学其他分支，而且在许多科技和经济领域都有着广泛的应用. 本章从二阶、三阶行列式出发，引入 n 阶行列式的概念，进而讨论 n 阶行列式的性质及其计算方法，最后给出用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1 二阶与三阶行列式

本节的目的是阐述行列式的由来. 为此我们首先讨论二元线性方程组与三元线性方程组这两种较简单的方程组的公式解，由此引出二阶与三阶行列式的概念.

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法从(1.1)式中消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

同样地，从(1.1)式中消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

这就是二元线性方程组(1.1)的公式解. 为便于叙述和记忆，我们引入二阶行列式的概念.

定义 1.1 我们称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

为二阶行列式，其中数 $a_{ij}(i = 1,2;j = 1,2)$ 叫做行列式的**元素**，横排叫做行，

竖排叫做**列**. 元素的第一个下标 i 叫做行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 叫做列标，表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和，这种规律可以用“对角线法则”来记忆，参见下图：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**次对角线**，二阶行列式等于主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

有了二阶行列式的概念，二元线性方程组的公式解(1.2)式可以用行列式表示，即当 $D\neq0$ 时，二元线性方程组(1.1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

其中分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式，即系数行列式. x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}(即 D 的第一列)所得的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}(即 D 的第二列)所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组有类似的规律性，请同学们学习时注意比较.

例 1.1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=-1 \\ 5x_1+3x_2=3 \end{cases}$$

解 计算二阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1,\quad D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-6,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=11$$

由公式(1.4)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=11$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

利用消元法消去相应变量可得

$$Dx_1 = D_1, \quad Dx_2 = D_2, \quad Dx_3 = D_3$$

其中

$$\begin{aligned}
D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
D_1 &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 \\
D_2 &= a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31} \\
D_3 &= a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{12}a_{21} - b_1a_{22}a_{31}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.5)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.7}$$

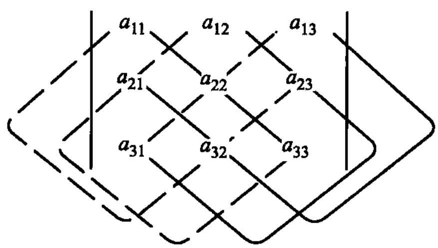
下面引进三阶行列式的概念.

定义 1.2 我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.8}$$

为三阶行列式.

我们同样可以用对角线法则来记忆三阶行列式，如下图：



由上述定义可见，三阶行列式是由三行、三列 9 个元素组成的一个表达式，展开式是 6 项的代数和，每项是由不同行、不同列的 3 个元素相乘而成，其中 3 项为正、3 项为负，正项是各实线上 3 个元素的乘积，负项是各虚线上的 3 个元素的乘积.

根据三阶行列式的定义，(1.6)可写为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

称 D 为方程组(1.5)的系数行列式. 若系数行列式 $D\neq 0$，那么三元线性方程组(1.5)有唯一解. 其解由公式(1.7)给出.

例 1.2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$$

解 用对角线法计算行列式，得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\ D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=16,\ D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=24$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3$$

习 题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

2. 证明等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5, \\ x_1-4x_2=-3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1\cos\theta-x_2\sin\theta=a, \\ x_1\sin\theta-x_2\cos\theta=b; \end{cases}$

$$
(3)\begin{cases}2x_1-3x_2+2x_3=-3,\\ x_1+4x_2-3x_3=6,\\ 3x_1-x_2-x_3=1.\end{cases}
$$

§1.2　全排列及其逆序数

从1.1节内容中可知利用二阶、三阶行列式可以表示二元、三元线性方程组的解，为求解 $n(n>3)$ 元的线性方程组，需引入 n 阶行列式，而定义 n 阶行列式必须弄清楚二阶、三阶行列式的结构，为此我们讨论排列及其逆序.

一、排列和逆序

定义2.1　由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个没有重复数字的 n 元有序数组，称为一个 **n 级排列**，简称**排列**，记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如：2级排列共有2种：12　21，3级排列共有6种：123　132　213　231　312　321.

一般地，n 级排列总共有 $n!$ 个，其中 $12\cdots n$ 称为**自然排列或标准排列**.

定义2.2　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，若数 $i_s>i_t$，则称数 i_s 与 i_t 构成一个逆序，一个 n 级排列中的逆序总数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

我们可按如下方法来计算排列的逆序数.

设在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中比 $i_s(s=1,2,\cdots,n)$ 大且排在 i_s 前面的数共有 t_s 个，则该排列的逆序数为

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{s=1}^{n}t_s$$

例2.1　求下列排列的逆序数：

(1) 31452；　(2) 13524；　(3) $n(n-1)\cdots 21$.

解　(1) 观察排列31452可知，排在3前面且比3大的数的个数为0；排在1前面且比1大的数有1个；排在4前面比4大的数的个数为0；排在5前面比5大的数的个数为0；排在2前面比2大的数的个数为3，从而所求排列的逆序数为

$$\tau(31452)=0+1+0+0+3=4$$

(2) 排在1前面且比1大的数的个数为0，排在3前面且比3大的数的个数为0，排在5前面且比5大的数的个数为0，排在2前面且比2大的数

的个数为 2，排在 4 前面且比 4 大的数的个数为 1，从而所求排列的逆序数为

$$\tau(13524)=0+0+0+2+1=3$$

（3）用相同的方法可得

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 2.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如：例 1 中排列 31452 是偶排列；13524 是奇排列；排列 $n(n-1)\cdots21$，当 $n=4k$、$4k+1$ 时，该排列为偶排列；当 $n=4k+2$、$4k+3$ 时，该排列为奇排列. 自然排列的逆序数为零，因而是偶排列.

二、对换及其性质

定义 2.4 把一个排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中某两个数 i_s、i_t 的位置互换，而其余数不动得到另一个排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个**对换**，记为$(i_s,i_t)$.

将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如：$1234\xrightarrow{(2,3)}1324$、$21345\xrightarrow{(1,4)}24315$.

对换有如下性质：

定理 2.1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说，经过一次对换，奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列.

证明 先看相邻对换的情形：设排列为 $i_1i_2\cdots i_lijj_1j_2\cdots j_m$，对换 i 与 j 排列变为 $i_1i_2\cdots i_ljij_1j_2\cdots j_m$，在对换过程中 $i_1,i_2,\cdots,i_l,j_1,j_2,\cdots,j_m$ 这些元素所构成的逆序情况不变，而 i、j 两元素所构成的逆序变化情况为：

当 $i<j$ 时，经对换 i 构成的逆序数增加 1 而 j 构成的逆序数不变，从而排列的逆序数增加 1；

当 $i>j$ 时，经对换 i 构成的逆序数不变而 j 构成的逆序数减少 1，从而排列的逆序数减少 1.

所以，排列 $i_1i_2\cdots i_lijj_1j_2\cdots j_m$ 与排列 $i_1i_2\cdots i_ljij_1j_2\cdots j_m$ 的奇偶性相反.

再看一般情况：设排列为 $i_1\cdots i_lip_1\cdots p_kjj_1\cdots j_m$，对它做 k 次相邻对换，该排列变成 $i_1\cdots i_lijp_1\cdots p_kj_1\cdots j_m$，再做 $k+1$ 次相邻对换，排列变成 $i_1\cdots i_ljp_1\cdots p_kij_1\cdots j_m$，即经过 $2k+1$ 次相邻对换，排列 $i_1\cdots i_lip_1\cdots p_kjj_1\cdots j_m$ 变成排列 $i_1\cdots i_ljp_1\cdots p_kij_1\cdots j_m$，所以这两个排列的奇偶性也相反.

推论 2.1 任意一个 n 级排列都可以经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

这是因为 $12\cdots n$ 是偶排列，而对换改变排列奇偶性．故当排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列时，必须做奇(偶)数次对换才能变成自然排列 $12\cdots n$，即所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性．

定理 2.2　n 级排列中奇偶排列各占一半，均为$\frac{n!}{2}$个．

证明　n 级排列共有 $n!$ 个，设其中奇排列的个数为 p，偶排列的个数为 q，对所有奇排列都做同一对换，则由定理 2.1 知这 p 个奇排列均变为偶排列，故 $p\leqslant q$；同理对每个偶排列都做同一对换，则这 q 个偶排列均变为奇排列，故 $q\leqslant p$，所以 $p=q=\frac{n!}{2}$．

习　题　1.2

1. 求下列排列的逆序数，并确定排列的奇偶性．

(1) 351426；

(2) $2468\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$；

(3) $1(n+1)2(n+2)\cdots(n-1)(2n-1)n(2n)$；

(4) $1357\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$．

2. 确定 i 和 j，使

(1) $26i54j7$ 为偶排列；

(2) $352i6j4$ 为奇排列．

3. 已知排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 k，求排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数．

§ 1.3　n 阶行列式

利用对角线法则计算二、三阶行列式虽然简便直观，但对于高阶的行列式该方法便不再适用．为求解 $n(n>3)$元线性方程组，我们先对二、三阶行列式的结构特点加以总结：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

易见二、三阶行列式的展开式具有如下结构特点：

(1) 项的个数：二阶行列式共有 $2=2!$ 项，三阶行列式共有 $6=3!$ 项．

(2) 项的构成：二阶行列式的每项都是取自不同行、不同列的 2 个元素的

乘积，三阶行列式的每项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的乘积.

(3) 项的符号：二阶和三阶行列式每项的符号都是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标排列是偶排列则该项取正号，列标排列是奇排列则该项取负号.

根据以上特点，可以把二、三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 和 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 分别表示对所有 2 级和 3 级排列求和，仿此我们给出 n 阶行列式的定义：

定义 3.1 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列元素乘积的代数和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，行列式常简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|_{n\times n}$，这里 a_{ij} 称为行列式的元素，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的**一般项**，行列式中从左上角至右下角元素的连线称为**主对角线**.

例 3.1 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式主对角线上方的元素都为零，我们称它为**下三角行列式**(主对角线下方的元素为零的行列式,称为**上三角行列式**).

解 我们主要考察 D 的展开式中不为零的那些项. 由于第一行除 a_{11} 外其余元素都为零，所以行列式的通项中第一个元素 a_{1j_1} 只能取 a_{11}，而通项中第二个元素 a_{2j_2} 不能选取 a_{21}，这是因为展开式的每一项中不能存在两个同列的元素，故只能选取 a_{22}. 同理 a_{3j_3} 只能取 a_{33}，…，末行只能选取 a_{nn}. 从而

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似可得

(1) 上三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(2) 对角形行列式 $\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

定理 3.1 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.9}$$

证明略.

另外，n 阶行列式 D 的一般项还可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.10}$$

例 3.2 利用行列式的定义计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 $D_n=(-1)^{\tau((n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$

$=(-1)^{\tau((n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1)}1\times2\cdots(n-1)n=(-1)^{\tau((n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1)}n!$

所以 $D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

习 题 1.3

1. 确定下列 5 阶行列式的项所带的符号.

(1) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$；(2) $a_{24}a_{32}a_{15}a_{43}a_{51}$.

2. 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{22}a_{34}$ 且符号为负的项.

3. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式的值为零.

4. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 2 & 3 \\ 2x & 2x & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3x & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix}$，问 $f(x)$ 为几次多项式？x^3 的系数是什么？

5. 利用行列式的定义计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§1.4 行列式的性质

n 阶行列式等于所有取自不同行不同列元素乘积的代数和，随着阶数 n 的增大，行列式的项数迅速增加. 为简化行列式的计算，本节将讨论行列式的性质.

定义 4.1 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，\text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证明 设 D^{T} 的第 i 行第 j 列元素为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}$，由定理 3.1 可得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D \end{aligned}$$

性质 4.1 说明行列式的行和列具有同等地位，因而所有对行成立的性质，对列也一样成立，反之亦然. 故以下所讨论的行列式性质中，只对行加以证明.

性质 4.2　若行列式的某行(列)有公因子 k，则可以把它提到行列式符号外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

也可以说，用数 k 乘一个行列式，等于用数 k 乘以行列式的某一行(列).

证明

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}ka_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4.3　对换行列式的任意两行(列)，行列式变号.

证明　设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 的一般项为