算學小叢書

代數學
一次方程式

林鶴一　高野泰藏著
崔　朝　慶　譯

商務印書館發行

算學小叢書

代數學

一次方程式

林鶴一 高野泰藏著
崔朝慶譯

商務印書館發行

序

本書所記述者，爲代數學一次方程式，因方程式爲代數學求未知數之津筏，數學科之基礎也；而一次方程式，乃方程式之第一階級，故習代數學者，必先了解一次式之解法，循序漸進，自能達於高遠之域；此篇依本叢書之方針，但求見於今時中等學校教科書之方法，包括無遺，不載高深之法理，如求聯立方程式之根之簡便法，認爲肄業及畢業於中等學校習代數者必要之事項，故揭載於後篇之中，至文字方程式之根之研究，尤關重要，而其理較深，惟就本書豫定範圍，示研究之標準.

本書分前後二篇：以數字爲係數之一次方程式各種解法，及應用問題之解法，載於前篇；以文字爲係數之一次方程式各種解法，及根之研究，載於後篇；前後篇各例題之後，每附有類題，雖微嫌繁複，然演題既多，則變化有左右逢源之妙，此著者之經驗也；練習計算，練習心思，爲習數學一定不易之法，初學者須不憚勞煩，順類題之次序，一一詳解，不宜忽略，余於文字方程式，論述較中等學校教科書爲詳，

自信堪爲畢業生補習之用；但文字之數增多，則研究之條件，愈益紛繁，如三元以上之聯立方程式之根，關係殊爲複雜，非僅具中等程度之人所能剖析，故本書之終結，至二元聯立一次方程式之解法及根之研究而止；如欲擴充知識，方程式之專書，倘有林鶴一先生之鴻著焉．

大正八年五月廿五日　高野泰藏識

目　次

前篇　數字方程式

第一章　恆等式與方程式 ………………………………………… 1
1. 等式 ………………………………………………………… 1
2. 等式之兩邊 …………………………………………………… 1
3. 等式之性質 …………………………………………………… 1
4. 等式之種類 …………………………………………………… 7
5. 未知數與既知數及方程式之根 ………………………… 9
6. 方程式之種類 ……………………………………………… 9
7. 方程式之元及方程式之次數 ……………………………10
第二章　一元一次方程式（其一）……………………………13
8. 一元一次方程式解法 ………………………………………13
問題一 ………………………………………………………………26
第三章　應用問題 …………………………………………………28
9. 以式表題意之例 ……………………………………………28
10. 應用問題解法之次序 ……………………………………33

11. 應用問題解法模範 ……36

問題二 ……50

第四章 聯立一次方程式（其一） ……60

12. 聯立方程式 ……60

13. 聯立二元一次方程式之解法 ……63

14. 特別形狀之聯立方程式例題 ……76

15. 聯立三元一次方程式解法 ……82

16. 聯立四元一次方程式解法 ……87

17. 多元聯立一次方程式雜例題 ……90

問題三 ……93

18. 聯立一次方程式應用問題 ……94

問題四 ……107

19. 負數之根 ……111

20. 不能及不定之問題 ……114

雜題 ……123

後篇 文字方程式

第五章 不等式解法 ……129

21. 不等式 ……129

22 不等式之邊 ……129

23. 不等式之性質……130
24. 不等式之解法……132
第六章　一元一次方程式(其二)……135
25. 一元一次方程式之公式形狀及根之研究……135
26. $ax+b$ 與 $ax+b=0$ 之根之關係……136
27. $ax+b=0$ 之根與他數之比較……136
28. $ax+b=0$ 之 $a>0$ 之解法……140
29. 不定方程式及不能方程式……143
30. 一元一次方程式之解法模範……145
問題五……147
31. 文字方程式之例題解法……148
問題六……153
第七章　聯立一次方程式(其二)……155
32. 特別之問題解法……155
33. 求二元一次方程式之根之簡便法……157
34. 三元聯立一次方程式用未定係數之解法……164
35. 求三元聯立一次方程式之根之簡便法……167
第八章　聯立一次方程式(其三)……170
36. 二元一次聯立方程式之根之研究……170

37. 解二元一次聯立方程式適用二公式之情形…………174
38. 二元一次聯立方程式之例題解法…………174
問題七…………184
39. 應用問題之解法及問題之研究…………187
問題八…………190
附錄 問題之答及解法指南 …………193

代數學　一次方程式

前篇　數字方程式

第　一　章

恆等式與方程式

1. 等式.

二式相等,以等號"="表之,謂之等式.

例

$$7+13=20 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{3x+4}{3}=2x+\frac{3}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

上之 (1), (2), (3) 三式, 皆爲等式.

2. 等式之兩邊.

在等號"="左之式,謂之左邊,在右之式,謂之右邊.

例　$3a+b=2a+5b$. 其 $3a+b$ 爲左邊. $2a+5b$ 爲右邊.

3. 等式之性質.

(一) 等式之兩邊，以同數(或相等之數)加之或減之，仍爲等式.

例 設 $a=b$ 兩邊各加 x，或各減 x，得 $a+x=b+x$, $a-x=b-x$. 其 x 之值無論爲何數，與所設之式加減而得之二式，仍爲等式.

又 設 $a=b$, $c=d$. 以第二式之兩邊，分加於第一式之兩邊，或從第一式之兩邊，各減第二式之兩邊. 得 $a+c=b+d$, $a-c=b-d$. 仍爲等式.

由此性質，能將等式中任意之項，變其符號，從某邊移於他邊.

例 $5+3=2+6$……(1) 此等式之兩邊各減 6. 則 $5+3-6=2+6-6$. 卽 $5+3-6=2$……(2) 觀此結果，知在等式某邊之某項移於他邊，惟須改變其項之符號而已.

又 $a+b=c-d$……(1) 此兩邊各加 d. 則 $a+b+d=c-d+d$. 卽 $a+b+d=c$……(2) 以 (1) 式之 $-d$ 變爲 $+d$. 從右邊移於左邊，卽成 (2) 式，更於 (2) 式之兩邊各減 b. 則 $a+b+d-b=c-b$. 卽 $a+d=c-b$……(3) 以 (2) 式之 $+b$ 變爲 $-b$. 從左邊移於右邊，卽成 (3) 式.

注意 凡變某項之符號，從一邊移於他邊，謂之移項.

例 1. 試以 $(a+b)(a-b)+c=a^2-b^2$ 移項化爲簡單之式.

先解原式左邊之括弧，則 $a^2-b^2+c=a^2-b^2$ 次將右邊之二項全移於左邊，則 $a^2-b^2+c-a^2+b^2=0$. 卽 $c=0$.

例 2. 設 $3a+2b=2a+3b$. 問 a 與 b 之關係如何.

先以含 a 之項移於左邊，又以含 b 之項移於右邊，則 $3a-2a=3b-2b$. 故 $a=b$. 卽所求之關係也.

例 3. 求化 $15x+7=7x+18$ 爲簡單之式.

移項則 $15x-7x=18-7$. 故 $8x=11$.

例 4. 設 $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$. 問此等式有無錯誤.

解左邊之括弧.則 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=2a^3+6ab^2$ 移項得 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-2a^3-6ab^2=0$. 左邊各同類項抵消，則 $0=0$，知所設之式不誤.

類題

1. 設 $73+42=53+62$. 取右邊之 62 移於左邊，而後計算以判定等式有無錯誤.

2. 設 $(a+b)(2a-b)=0$. 先解左邊之括弧，再移 b^2 於

右邊

3. 設 $a+2b=2(b-2)$. 求 a 之值.

4. 設 $5x-7=4x+3$. 求 x 之值.

5. 有等式 $(a+6)(2a+3)=2a^2+15a+4$. 解左邊之括弧，盡移右邊之各項於左邊，判別其等式有無錯誤.

答 1. $73+42-62=53$. 等式不誤.

2. $2a^2+ab=b.^2$ 3. $a=-4$. 4. $x=10$.

5. $2a^2+15a+18-2a^2-15a-4=0$. 即 $18-4=0$. 知等式有誤.

(二) 等式之兩邊，以同數(或相等之數)乘之或除之，仍爲等式.

例 設 $a=b$. 兩邊以 x 乘之或除之，則 $ax=bx$, $\frac{a}{x}=\frac{b}{x}$. 其 x 之值無論爲何數，與所設之式乘除所得之式，仍爲等式.(惟 x 之值爲 0 或 ∞. 以之乘除不等式之兩邊，亦爲等式).

又 設 $a=b$, $c=d$. 以第一式之兩邊，各乘第二式之兩邊，或以第二式之兩邊，各除第一式之兩邊，得 $ac=bd$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. 仍爲等式.

由此性質，能變化等式為最簡單之等式.

例 1.　設$\frac{a+b}{5}=\frac{c}{7}$兩邊同以$5\times 7$乘之. 則$7(a+b)=5c$.

注意　以適宜之數乘等式之兩邊，抵消其分母，謂之去分母.

例 2.　設 $a\neq b$. 欲化 $(a+b)^2(a-b)=a^3-b^3$ 為簡單之式. 以 $a-b$ 除等式之兩邊，則 $(a+b)^2=a^2+ab+b^2$. 卽 $a^2+2ab+b^2=a^2+ab+b^2$. 移項則 $a^2+2ab+b^2-a^2-ab-b^2=0$. 卽 $ab=0$. 由此知 a 與 b 之值，必有一為 0.

例 3.　設 $-5x+2y+8=x-3y-5$……………………(1)

求證 $5x-2y-8=-x+3y+5$.

(1) 式之兩邊,同以 -1 乘之,則 $-(-5x+2y+8)=-(x-3y-5)$.解兩邊之括弧,卽得$5x-2y-8=-x+3y+5$.

注意　以 -1 乘等式之兩邊，卽全變其等式各項之符號.

例 4.　設 $a\neq b$. 欲化 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{ab}{a^2-b^2}$ 為簡單之式.

以 a^2-b^2 乘等式之兩邊而去其分母，則$(a+b)^2=ab$. 卽 $a^2+2ab+b^2=ab$. 移項得 $a^2+2ab+b^2-ab=0$. 卽 $a^2+ab+b^2=0$. 若 $a=b$. 原式兩邊之分母皆為 0. 以 0 除任何數

皆爲 ∞. 則原式卽 $\infty=\infty$. (惟以 0 除 0. 其値無定, 不能成等式).

例 5. 求化 $\frac{3}{5}(2x+5)=\frac{3}{4}(3x+2)$ 爲簡單之式.

以 3 除等式之兩邊, 得 $\frac{1}{5}(2x+5)=\frac{1}{4}(3x+2)$. 又以 5×4 乘此等式之兩邊, 得 $4(2x+5)=5(3x+2)$. 解此等式之括弧, 則 $8x+20=15x+10$. 移項得 $8x+20-15x-10=0$. 卽 $-7x+10=0$. 變其符號, 則 $7x-10=0$. 又移項得 $7x=10$.

例 6. 求化 $\frac{2x-7}{3}+2x=3-\frac{x-3}{5}$ 爲簡單之式.

以 3×5 乘等式之兩邊,去其分母, 則 $5(2x-7)+3\times5\times2x=3\times3\times5-3(x-3)$. 卽 $10x-35+30x=45-3x+9$. 移項得 $10x-35+30x-45+3x-9=0$. 卽 $43x-89=0$. 又移項得 $43x=89$.

類題

1. 設 $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$. 問此等式有無錯誤.

2. 設 $0.35+0.24x=3.2y$. 求化各項之小數爲整數.

3. 去 $\frac{2}{3}(x-5)=\frac{x+3}{5}$ 之分母并解其括弧,化爲簡單之形.

4. 去 $\frac{4}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=9$ 之分母,化爲簡單之等式.

5. 化 $3a^2x+a^3=a^4$ 爲簡單之式.

6. 去 $\frac{(x-1)(x-2)}{3}=\frac{(2x-1)x}{6}$ 之分母并解其括弧,化爲簡單之形.

7. 化 $\frac{1}{3}-(x+3)(x+2)=x^2+2$ 爲簡單之式.

8. 去 $0.3+\frac{x-7}{5}=\frac{7}{2}-\frac{3x-7}{10}$ 之分母,化爲簡單之等式.

9. 去 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{c-a}$ 之各分母,化爲整式.

答 **1.** 等式不誤.

2. 兩邊同以 100 乘之,卽化爲整數.

3. $7x=59$.　**4.** $5x=92$.　**5.** $3x+a=a^2$.

6. $5x=4$.　**7.** $6x^2+15x+23=0$.　**8.** $5x=53$.

9. $a^2-b^2+c^2+ab-3ac+bc=0$.

---

4. 等式之種類.

等式有恆等式與方程式二種.

(一) 恆等式. 等式兩邊之形狀不同,任以何數代其式

之文字,恆能成等式者,謂之恆等式.

例 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 此等式之兩邊,形狀不同 其實爲同一之式,卽恆等式也.

注意 此類之恆等式,以任何數值代式中之文字兩邊之數值,恆相等.

例 設 $a=0$, $b=0$. 則 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 卽 $0=0$.

又 設 $a=0$, $b=1$. 代入前式, 卽 $1^2=1^2$.

又 設 $a=1$, $b=2$.代入前式, 卽 $(1+2)^2=1^2+2\times1\times2+2^2$. 卽 $3^2=1+4+4$. 卽 $9=9$. 知無論以何數代 a 與 b. 恆爲等式.

恆等式之例.

乘法之公式.

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$$

上之各等式,皆恆等式也.

(二) 方程式.

等式中之文字,非以特別之值代之,兩邊不能相等者,謂之方程式.

例　設 $x+3=15$. 任意以 1 代其 x. 則 $1+3=15$. 不合於理, 卽知非恆等式. 惟以 12 代其 x. 則 $15=15$. 故 12 爲 x 之特別之值.

凡等式限定以特別之值代其文字, 兩邊始能相等者, 卽爲方程式.

5. 未知數與旣知數及方程式之根.

凡方程式中之文字,須以特別之值代之,始能成等式,其文字謂之未知數, 至於文字之值或爲問題中所已言者, 或能改易他數者,其文字謂之旣知數,而未知數之特別之值,謂之方程式之根.

注意　旣知數有時以數字表之, 或以羅馬文字次序在前之 a, b, c, d 等文字表之, 而未知數常以次序在後之 x, y, z, u, v 等文字表之.

6. 方程式之種類.

方程式之各項,全移於等號"="之左邊,令等號"="之右邊爲0. 其左邊之各項,有同類項,依符號加減爲一項,就如是之結果而類別之如次.