

概 率 统 计 讲 义

(工 程 数 学)

(第 二 版)

无锡轻工业学院数学教研组编

一 九 八 一 年

第二部分 数理统计

§1. 样本观测值的整理

1. 频数分布

2. 表示集中位置的特征数

3. 表示离散程度的特征数

§2. 参数估计和假设检验

1. 参数的点值估计

2. 参数的假设检验

3. 参数的区间估计

§3. 方差分析

1. 方差分析的基本思想

2. 方差分析的一般步骤

§4. 回归分析

1. 一元线性回归

2. 一元非线性回归

§5. 正交试验设计

1. 多因素的试验问题

2. 用正交表安排试验

3. 试验结果的直观分析

4. 因素交互作用的试验分析

5. 试验结果的方差分析

§6. 质量管理

1. 按质控制

2. 按量控制

习题答案

附表1	正态分布表
附表2	t分布表
附表3	F分布表
附表4	F分布表
附表5	相关系数检验表
附表6	常用正交表

目 录

第一部分 概率论

§1 事件与概率

1. 随机事件与样本空间
2. 事件的关系及运算
3. 事件的概率
4. 古典概型
5. 概率的公理化体系
6. 条件概率
7. 全概率公式, 贝叶斯公式
8. 贝努里概型

习题一

§2 随机变量及其分布

1. 离散型随机变量
2. 连续型随机变量
3. 分布函数
4. n 元随机变量及其分布
5. 随机变量的函数的分布

习题二

§3 随机变量的数字特征

1. 数学期望
2. 方差

习题三

§4 极限定理

1. 大数定律
2. 中心极限定理

习题卷第

第一部分 概 率 论

以前我们所学过的数学都是研究客观世界中的确定性现象的另的规律性，例如由微分方程所描述的自然现象，在初始状态已知下以后任何时刻的状态都能由方程的解来确定。

然而在客观世界中，除确定性现象外，还广泛存在着—类随机现象。例如，新生的婴儿的性别，在出生前是无法断言的，但由以往有关婴儿的大量统计资料可知其统计规律性，又如测男某男性的直径，由于测男仪因受气候影响所产生的以及测男者观察所产生的误差，在确定的一次观察之前不能预先断言，但经多次观察可发现其统计规律性，误差较大的可能性有多少，误差较小的可能性有多少。

概率论是研究随机现象的量的统计规律性的一门学科。

§1 事件与概率

1. 随机事件与样本空间

在一定条件下必然发生的事情称为必然事件，记作 Ω ，在一定条件下必然不发生的事情称为不可能事件，记作 $\emptyset$ ，例如在标准大气压下加热到 100°C ，“水沸腾”是必然事件，在标准大气压下，加热到 100°C ，“水结成冰”是不可能事件。

但在自然现象中，除了必然事件和不可能事件外，还存在着一类与此有本质不同的事情，即在一定条件下可能发生也可能不发生的事情，称为随机事件，简称事件，常用 A, B, C 等表示。它在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量重复试验中却具有某种统计规律性。

[例1] “掷一钱币，出现正反面”是随机事件，这是因为掷一次所得结果可能出正反面，也可能出现反面，掷之前无法

预先断言，但在大男重复试验中，出现正面的次数与出现反面的次数几乎相等。

[例2] “在一批产品中任抽一件，抽得次品”是随机事件。这是因为抽一次所得结果可能抽得次品，也可能抽得合格品，事先无法断言。但在大男重复试验中，抽得次品具有一定的可能性。

必须注意，必然事件，不可能事件，随机事件都是相对一定的条件而言的，条件改变，事件的性质可以改变。

在相同的条件下，对一个随机现象进行大男重复试验，试验的每一个可能出现的结果叫做基本事件，记作 ω ，它们是试验的最简单的事件。全体基本事件的集合叫做基本事件组，记作 Ω ，借用几何术语，也常把 Ω 叫做样本空间，而基本事件 ω 叫做样本点。

[例3] 掷一钱币的试验，只有两种可能的结果，正面或反面，分别记作 ω_1, ω_2 ，所以样本空间由两个样本点组成，即
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

[例4] 电话交换机在单位时间内可能接到呼唤的次数是 $0, 1, 2, \dots$ ，用 ω_k 表示接到 k 次呼唤，那末样本空间由无穷多个样本点组成，即
$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots\}.$$

[例5] 某河流夏季可能的最高水位是3到5米内的某一数值 x ，那末样本空间为3到5米内的一切实数，即
$$\Omega = \{x | 3 \leq x \leq 5\}.$$

研究随机现象，只考虑基本事件是不够的，例如在例4中考察“在单位时间内接到不超过5次呼唤”的事件 A ，那末 A 是由 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_5$ 等6个基本事件组成的，又如例5中考察“最高水位在3.5米与4.5米之间”的事件 B ，那末 B 为 $\{x | 3.5 \leq x \leq 4.5\}$ 。可见除了研究基本事件外，还要研究由某些基

本事件组成的事件，这类事件叫做复合事件。

2. 事件的关系及运算

在同一条件下，放置多个事件时，必须注意事件之间的关系。

(1) 如果事件A发生必导致事件B发生，则称A是B的特款或称B包含A，记作 $A \subset B$ ，如果一件产品合格是指长度直径都合格，那末，“直径不合格” = “产品不合格”。

若 $A \subset B$ ， $B \subset A$ 则称A与B相等，记作 $A = B$ 。

(2) 两事件A与B中至少有一发生所构成的事件称为A与B的并，记作 $A \cup B$ 。例如“直径不合格” $\cup$ “长度不合格” = “产品不合格”。

(3) 两事件A与B同时发生所构成的事件，称为A与B的交，记作 $A \cap B$ 或 AB 。例如“直径合格” $\cap$ “长度合格” = “产品合格”。

(4) 若 $AB = \phi$ ，即A与B不能同时发生，则称A与B互不相容，例如“直径不合格”与“产品不合格”互不相容，但“直径不合格”与“长度不合格”不互不相容。

(5) 若 $A \cup \bar{A} = \Omega$ ， $A\bar{A} = \phi$ ，即两事件A与 $\bar{A}$ 必有一发生，但不能同时发生，则称 $\bar{A}$ 是A的逆事件或A是 $\bar{A}$ 的逆事件，也称A， $\bar{A}$ 互为逆事件。显然 $\bar{\bar{A}} = A$ ，例如“直径不合格”与“直径合格”互为逆事件。

3. 事件的概率

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发，事先无法判断，但并非毫无规律可言，经大量试验，人们还是可以发现其统计规律性的。在例1中我们在同一条件下，把同一钱币重复许多次，统计学家（蒲丰）（Buffon）及皮尔逊（Pearson）曾做过这种试验，所得结果如下：

试验者	掷钱币次数 n	出现正面次数 u	出现正面的频率 u/n
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005

我们看到出现正面的频率在 0.5 附近徘徊，于是，我们就有理由认为掷一钱币出现正面与出现反面几乎是同等经常的。在 1 例 2 中，由大男重复抽样的结果，也能估计抽得次品的可能性的多少。

随机事件 A 在 n 次重复试验中，发生的频率 u/n 随着试验次数 n 的增加稳定于某个实数 p ，这个频率的稳定中心 p 描述了事件 A 发生的可能性的多少，叫做事件 A 的概率，记作，

$$P\{A\} = p,$$

显然

$$0 \leq P\{A\} \leq 1.$$

如果把必然事件 Ω 和不可能事件 $\emptyset$ ，也看作随机事件的话，那末有

$$P\{\Omega\} = 1, \quad P\{\emptyset\} = 0.$$

由上可知，对随机事件除了知道随机性外，还能知道随机程度，即事件发生的概率。至于如何确定一个实数作为事件发生的概率，要看随机现象的情况而定，但对于一类最简单而又常见的随机现象，即所谓古典概型，确定事件的概率是比较容易的。

4. 古典概型

4.1 概率的古典定义

所谓古典概型，是指具有下列两个特点的一类随机现象：

(i) 基本事件的个数是有限的，记作 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ；

(ii) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 两两互不相容，且是等可能的。

如果事件 A 是由 m 个基本事件组成的，那末定义事件 A 的概率为

$$P\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{A \text{中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

根据这定义，在例1中掷一钱币“出现正”这一事件A的概率为

$$P\{A\} = \frac{1}{2}.$$

[例6] 求掷一骰子出现偶数点的概率。

解：以A表示掷一骰子出现偶数点， ω_i 表示掷一骰子出现*i*点 ($i=1, 2, \dots, 6$)，事件A由基本事件 $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ 组成，于是A中包含3个基本事件，而基本事件共有6个，从而

$$P\{A\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

在古典概型中计算事件的概率，常常要用到排列与组合的知识，为此，在下面作一简要介绍。

(2) 排列与组合

从*n*个不同的元素中任取*r*个 ($1 \leq r \leq n$) 个，按一定的顺序排成一行，叫做从*n*个元素中选*r*个的选排列所有不同的选排列的种数记作 A_n^r 。

由于从*n*个元素中任取一个排在第一个位置上，共有*n*种方法，在剩下的*n-1*个元素中任取一个排在第二个位置上，共有*n-1*种方法，如此继续下去，最后从剩下的*n-(r-1)*个元素中任取一个排在第*r*个位置上，共有*n-(r-1)*种方法，于是

$$A_n^r = n(n-1)\dots(n-r+1).$$

特别当*r*=*n*时，就是从*n*个元素中全部取出的排列，叫做全排列，全排列的种数为

$$A_n^n = n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1.$$

[例7] 从1, 2, ..., 9九个数字中，任意取出两个不同的数字，问可能排成多少种不同的两位数？

解：这是一个选排列问题，有

$$A_9^2 = 9 \times 8 = 72$$

即能排成 72 种不同的两位数。

上述排列问题中，取出的元素都没有放回去，下面举一个放回（或重复）的排列的例子。

[例 8] 一城市使用五位数字的电话号码，问最多可安装多少台不同号码的电话？

解：这个问题相当于从 0, 1, ..., 9 十个数字中，取出第一个数字后放回去再取第二个数字，再放第三个数字，如此取五个数字的排列，由于每取一个数字都有 10 种方法，所以共有 10^5 种排列，即最多可安装 10^5 台电话。

从 n 个不同的元素中任取 k ($1 \leq k \leq n$) 个构成一组，而不考虑这 k 个元素的次序，叫做从 n 个元素中取 k 个的组合，所有不同组合的种数记作 C_n^k 。

由于从 n 个元素中取 k 个进行全排列，可以看成先取 k 个进行组合，然后再对这 k 个进行全排列，于是有

$$A_n^k = C_n^k \cdot A_k^k$$

从而

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{A_k^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

[例 9] 在 30 个球队中，每两个球队都进行一次比赛，问一共要安排几场比赛？

解：一共要安排

$$C_{30}^2 = \frac{30 \times 29}{2 \times 1} = 435$$

场比赛。

(3) 概率计称举例

[例 10] 一部五卷的选集，按任意顺序放到书架上，求各卷自左至右或自右至左的卷号顺序恰为 1, 2, 3, 4, 5 的概率。

解：设事件 A 表示各卷自左至右或自右至左的卷号恰为 1,

2, 3, ..., 5, 5本书按任意顺序放到书架上相当于5个元素的全排列, 共有 $A_5^5 = 5!$ 种, 即基本事件的总数是 $5!$, 而事件A所包含的基本事件有2个, 即按1, 2, 3, 4, 5, 及5, 4, 3, 2, 1两种顺序排列, 于是所求的概率为

$$P\{A\} = \frac{2}{A_5^5} = \frac{2}{5!} = \frac{1}{60}.$$

[例11] 设100只晶体管中有5只废品, 今从中抽取15只, 恰有2只废品的概率.

解: 设事件A表示从100只晶体管中抽取15只, 恰有2只废品, 即基本事件总数是 C_{100}^{15} , 现在来求从100只晶体管中抽取15只, 其中恰有2只废品的取法的种数, 因为在5只废品中取2只有 C_5^2 种取法, 在95件合格品中取13只有 C_{95}^{13} 种取法, 把它们搭配起来可知在100只中抽取15只, 其中恰有2只废品的取法有 $C_5^2 C_{95}^{13}$ 种, 即事件A中所包含的基本事件数是 $C_5^2 C_{95}^{13}$, 于是所求的概率为

$$P\{A\} = \frac{C_5^2 C_{95}^{13}}{C_{100}^{15}} \approx 0.1377.$$

[例12] 在五位数的电话号码中, 求五个数字都不相同的概

解: 设事件A表示在五位数的电话号码中, 五个数字都不相同, 由例8知基本事件总数是 10^5 , 而从0, 1, ..., 9+个数字中取出五个不同的数字, 可能排成 A_{10}^5 个不同的数, 即事件A中包含的基本事件数是 A_{10}^5 , 于是所求的概率为

$$P\{A\} = \frac{A_{10}^5}{10^5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{10^5} \approx 0.3024.$$

[例13] 在统计物理中要讨论如下问题: 设有 n 个粒子, 每个粒子都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落在 N ($N > n$) 个格子的任一格子中, 求 (i) 指定 n 个格子中各有一个粒子的概率; (ii) 任何

n 个格子中各有一个质点的概率。

解: (i) 设 A 表示指定 n 个格子中各有一个质点, 并认为各质点是可辨别的, 由于每个质点都可以落入 N 个格子中的每一格, 所以 n 个质点共有 N^n 种分布法, 并且认为 N^n 种分布的每一分布是等可能的, 而其中使事件 A 出现的可能分布显然有 $n!$ 种, 于是所求的概率为

$$P\{A\} = \frac{n!}{N^n}.$$

(ii) 设 B 表示任何 n 个格子中各有一个质点, 由于使事件 B 出现的可能分布种数是使事件 A 出现的可能的分布种数的 C_N^n 倍, 所以

$$P\{B\} = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}.$$

(4) 加法定理

为了进一步计算复杂事件的概率, 下面就古典概型来建立概率这部分的加法定理。

加法定理: 设 A 与 B 是互不相容的两个事件, 即 $AB = \emptyset$, 那末

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

证: 设在所有 n 个基本事件中, 使 A 发生的有 m_1 个, 使 B 发生的有 m_2 个, 由于 $AB = \emptyset$, 使 $A \cup B$ 发生的就有 $m_1 + m_2$ 个, 所以

$$P\{A \cup B\} = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P\{A\} + P\{B\}.$$

推广: 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 那末

$$P\{\bigcup_{i=1}^n A_i\} = \sum_{i=1}^n P\{A_i\}.$$

证: 用归纳法证之。

[例14] 设有20个零件，其中16个是一等品，4个是二等品。于其中任取3个，求至少有一个是一等品的概率。

解：以A表示任取3个至少有一个一等品；

A_1 表示恰有一个一等品；

A_2 表示恰有两个一等品；

A_3 表示恰有三个一等品。

于是 A_1, A_2, A_3 两两互不相容，且 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 。故得：

$$P\{A\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\}$$

$$= \frac{C_{16}^1 C_4^2}{C_{20}^3} + \frac{C_{16}^2 C_4^1}{C_{20}^3} + \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}$$

$$\approx 0.9965$$

5. 概率的公理化体系

前已我们讨论了确定事件概率的两种方法，对于古典概型可直接用 $P\{A\} = \frac{m}{n}$ 来定义，对于不能归结为古典概型的事件则用频率的稳定中心来确定概率，但是这两种方法都有局限性，前者要求基本事件的个数是有限的，两两互不相容，并且是等可能的。后者用频率的稳定中心确定概率，虽然没有古典概型的那种局限性，但应建立在大量试验基础上，然而究竟试验次数应该大到怎样的程度，以及所谓稳定中心应该如何理解，都没有确切的说明。因此，在作为数学的一个分支的概率论中有必要提出一组关于随机事件概率的公理，使以后有关的推理有所依据，下节便以前述两种带有局限性的场合下概率的已知性质为背景，提出一组公理：

公理1 对于任一随机事件A，有

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

公理2 $P\{\Omega\} = 1$, $P\{\emptyset\} = 0$.

公理3 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互不相容，

那末：

$$P\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}.$$

定义 设函数 $P\{A\}$ 的定义域为所有随机事件组成的集合，且满足公理 1、2、3，则称 $P\{A\}$ 为事件 A 的概率。

在这三条公理的基础上，可以推出概率的一些性质。

性质 1，如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容，那末

$$P\{\bigcup_{i=1}^n A_i\} = \sum_{i=1}^n P\{A_i\}.$$

证：在公理 3 中，令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ ，据 $P\{\emptyset\} = 0$ ，便得

$$\begin{aligned} P\{\bigcup_{i=1}^n A_i\} &= P\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = P\{A_1\} + \dots + P\{A_n\} + 0 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^n P\{A_i\}. \end{aligned}$$

性质 2 $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$.

证：因为 $A \cup \bar{A} = \Omega$ ， $A\bar{A} = \emptyset$ ，由性质 1，

$$P\{A\} + P\{\bar{A}\} = P\{\Omega\} = 1,$$

所以 $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$.

性质 3 设 $A \subset B$ ，那末

$$P\{\bar{A}B\} = P\{B\} - P\{A\}.$$

证：因为 $A \subset B$ ，所以

$$B = A \cup \bar{A}B.$$

又 $A \cap \bar{A}B = \emptyset$ ，故有

$$P\{B\} = P\{A\} + P\{\bar{A}B\},$$

即： $P\{\bar{A}B\} = P\{B\} - P\{A\}$.

性质 4 设 A, B 为任两事件，那末

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}.$$

证：由

$$A \cup B = A \cup \bar{A}B, \quad A \cap \bar{A}B = \emptyset,$$

得 $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{\bar{A}B\},$

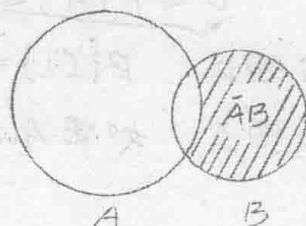


图 1

因 $AB \subset B$, $\bar{A}B = \overline{AB}B$.

由性质3

$$P\{\bar{A}B\} = P\{\overline{AB}B\} = P\{B\} - P\{AB\}.$$

所以 $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$.

6. 条件概率

在事件B发生的条件下事件A发生的概率叫做事件B发生下事件A的条件概率, 记作 $P\{A|B\}$.

设甲乙两车间各生产500件产品, 分别含有次品15件及25件, 今在这1000件产品中任抽一件, 以A表示抽到次品, B表示抽到甲车间产品, 那末

$$P\{A\} = \frac{15+25}{1000} = 0.04$$

$$P\{A|B\} = \frac{15}{500} = 0.03$$

显然

$$P\{A\} \neq P\{A|B\}.$$

对于古典概型的条件概率, 有

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \quad (P\{B\} > 0)$$

我们来给出这公式的证明, 设在所有几个基本事件中使A发生的有 m_1 个, 使B发生的有 m_2 个, 使AB发生的有 r 个, 于是

$$P\{A|B\} = \frac{r}{m_2} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m_2}{n}} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}.$$

在一般情形下, 我们也规定

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \quad (P\{B\} > 0)$$

从而推得 $P\{AB\} = P\{B\}P\{A|B\}$.

类似地, 可得

$$P\{AB\} = P\{A\}P\{B|A\}$$

这样，就有所谓概率的乘法定理：

乘法定理： $P\{AB\} = P\{A\}P\{B|A\} = P\{B\}P\{A|B\}$.

设事件B发生不影响事件A发生的概率，即

$$P\{A|B\} = P\{A\},$$

这时，有

$$P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}.$$

如果事件A、B满足

$$P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}$$

那么称A、B是相互独立的。

容易证明，如果A、B相互独立，则有

$$P\{A|B\} = P\{A\}, \quad P\{B|A\} = P\{B\}.$$

定理：如果A与B相互独立，那末 $\bar{A}$ 与B，A与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都是相互独立的。

证：因为：

$$\begin{aligned} P\{\bar{A}B\} &= P\{\bar{A}B|B\} = P\{B\} - P\{AB\} \\ &= P\{B\} - P\{A\}P\{B\} = P\{B\}[1 - P\{A\}] = P\{\bar{A}\}P\{B\}, \end{aligned}$$

所以 $\bar{A}$ 与B相互独立，同样可证其它两对。

这定理在计算概率时经常要用到。

[例15] 小王和小李彼此独立地射击同一目标各一次，设小王射中的概率为0.9，小李射中的概率为0.8，求目标被射中的概率。

解1：以A表示小王射中，B表示小李射中，于是 $P\{A\} = 0.9$ ， $P\{B\} = 0.8$ ，因A与B互相独立，故作互不相容，于是

$$\begin{aligned} P\{A \cup B\} &= P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} \\ &= P\{A\} + P\{B\} - P\{A\}P\{B\} \\ &= 0.9 + 0.8 - 0.9 \times 0.8 = 0.98 \end{aligned}$$

解2：小王、小李都不射中的概率为

$$P\{\bar{A}\bar{B}\} = P\{\bar{A}\}P\{\bar{B}\} = (1 - P\{A\})(1 - P\{B\})$$

$$= (1-0.9)(1-0.8) = 0.02$$

故目标被射中的概率为

$$1-0.02 = 0.98$$

7. 全概率公式、贝叶斯 (Bayes) 公式

下面两个公式，在计算复杂事件的概率时起重大作用。

全概率公式 若事件 A 能且只能与两两互不相容的事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 之一同时发生，即运用全概率的条件

$B_1, \dots, B_n$ 之一同时发生，即运用全概率的条件

$$A = \bigcup_{i=1}^n AB_i, \quad \text{且 } B_i B_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$\text{则 } P\{A\} = \sum_{i=1}^n P\{B_i\} P\{A|B_i\}$$

证：由加法定理及乘法定理即得

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^n P\{AB_i\} = \sum_{i=1}^n P\{B_i\} P\{A|B_i\}$$

[例16] 某工厂有甲、乙、丙三个车间，生产同一种产品，每个车间的产量分别为全厂产量的25%，35%，40%，各车间本身的次品率分别为5%、4%、2%，求全厂的次品率。

解：在全厂产品中任抽一件，以 A 表示抽得次品， B_1 表示抽得甲车间产品， B_2 表示抽得乙车间产品， B_3 表示抽得丙车间产品。

由全概率公式，全厂次品率

$$P\{A\} = P\{B_1\}P\{A|B_1\} + P\{B_2\}P\{A|B_2\} + P\{B_3\}P\{A|B_3\}$$

$$= \frac{25}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{4}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100}$$

$$= \frac{345}{10000} = 3.45\%$$

贝叶斯公式 若事件 A 能且只能与两两互不相容的事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 之一同时发生，即

$$A = \bigcup_{i=1}^n AB_i, \quad \text{且 } B_i B_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\text{则} \quad P\{B_j|A\} = \frac{P\{B_j\}P\{A|B_j\}}{\sum_{i=1}^n P\{B_i\}P\{A|B_i\}}$$

$$\text{证:} \quad P\{B_j|A\} = \frac{P\{AB_j\}}{P\{A\}} = \frac{P\{B_j\}P\{A|B_j\}}{\sum_{i=1}^n P\{B_i\}P\{A|B_i\}}$$

在例16中, 若已知抽得是次品, 求这次品是甲车间生产的概率。

解: 由贝叶斯公式

$$P\{B_1|A\} = \frac{P\{B_1\}P\{A|B_1\}}{\sum_{i=1}^3 P\{B_i\}P\{A|B_i\}} = \frac{\frac{25}{100} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{345}{10000}} = \frac{25}{69}$$

[例17] 发报台分别以概率0.6和0.4发出信号“.”和“—”, 由于通信系统受到干扰, 当发出信号为“.”时, 收报台未必收到信号“.”, 而是以概率0.8和0.2收到信号“.”和“—”。同样, 当发出信号“—”, 收报台以概率0.9和0.1收到信号“—”和“.”。求:

(i) 收报台收到信号“.”的概率;

(ii) 当收报台收到信号“.”时, 发报台确是发出信号“.”的概率。

解: 以A表示发出信号“.”, B表示收到信号“.”, 于是 $\bar{A}$ 表示发出信号“—”, $\bar{B}$ 表示收到信号“—”。

(i) 由全概率公式, 收到信号“.”的概率为

$$\begin{aligned} P\{B\} &= P\{A\}P\{B|A\} + P\{\bar{A}\}P\{B|\bar{A}\} \\ &= 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1 = 0.52 \end{aligned}$$

(ii) 由贝叶斯公式, 已知收到信号“.”时, 发出信号确是“.”的概率为

$$\begin{aligned} P\{A|B\} &= \frac{P\{A\}P\{B|A\}}{P\{A\}P\{B|A\} + P\{\bar{A}\}P\{B|\bar{A}\}} \\ &= \frac{0.6 \times 0.8}{0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1} = 0.923 \end{aligned}$$