中華民國三十三年五月十三日
教育部批准發行

漢譯

舒塞斯三氏立體幾何學

新亞書店發行

舒塞斯三氏立體幾何學

Schultze, Sevenoak & Schuyler: Solid Geometry

吳靜山譯

新亞書店印行

分類號

漢譯[illegible]塞斯三氏立體幾何學

定價國幣

(外埠酌加寄費)

譯述者	吳靜山
發行者	陳邦楨
印刷者	新亞店書
發行所	新亞書店 上海河南路一五九號

中華民國三十六年二月五版

B. 5132. 1—5000

目　　次

第六編　空間之直線及平面—多面角

第七編　多面體，柱及錐

第八編　球

附　錄

立體幾何學

第六編

空間之直線及平面—多面角

480. 定義 **空間幾何學**或**立體幾何學**討論原素不全在同一平面內之圖形.

481. 定義 **平面**爲一面,連結其上任意兩點之直線完全在此面上者.

若過數定點或數定直線,僅有一平面可作,則此平面稱爲由定點或直線所**決定**.

公設 A. 過不在一直線上三點之平面惟一.

公設 B. 若二平面有一點公共,則必有第二點公共.

482. 定義 若一直線與一平面,不論若何延長之決不相交者,則此**直線與平面平行**.

483. 定義 若二平面不論若何延長之決不相交者,則此**二平面平行**.

註 由上述任何原素決定之平面,在立體幾何學中,似有具體方法作其圖形,實則惟有用模型作之爲可能耳. 以直尺與圓規所作之圖,不過爲一種象徵,卽所繪者僅爲所求圖形之略號,絕不能如平面幾何之能獲得所需要之圖形.

命題 I. 定理

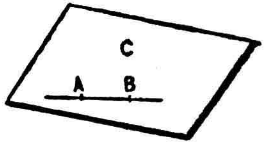
484. 一平面由

(1) 一直線及線外之一點而決定.

(2) 相交二直線而決定.

(3) 二平行直線而決定.

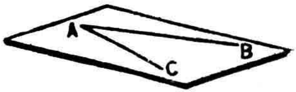
(1) 求證一平面由一直線 AB 及線外一點 C 而決定.



過直線上二點 A, B 及另一點 C, 僅能作一平面. (481, 公設 A)

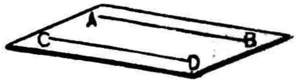
直線 AB 在此平面內. (481)

(2) 求證相交二直線 AB 及 AC 決定一平面.



[學者自證之.]

(3) 求證二平行線 AB 及 CD 決定一平面.



由定義, 平行線 AB 及 CD 在一平面內.

因 AB 及一點 C 決定一平面, 故二平行線決定一平面.

485. 系 二平面之交界爲一直線.

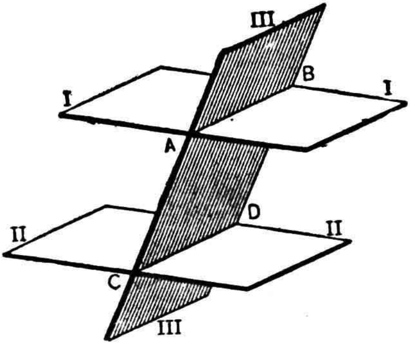
二平面之相交處不能含不在一直線上之三點, 因過此三點僅能作一平面. (481, 公設 B)

習題 1. 照相用之鏡箱與測量用之經緯儀, 爲何皆用三足支持之?

習題 2. 設有四點不在一平面內, 問可決定若干平面?

命題 II. 定理

486. 二平行平面與第三平面之交線互相平行.



已知 I 與 II 爲二平行之平面,與平面 III 相交,其交線各爲 AB 及 CD.

求證 $AB \parallel CD$.

證 AB 與 CD 不能相交,因否則平面 I 與 II 必將相交。

AB 與 CD 在同一平面內。

故 $AB \parallel CD$.

487. 系 在平行平面間之平行線相等.

習題 1. 若一平面與二平行平面之一相交,亦必與其他一平面相交.

習題 2. 若一直線與二平行平面之一相交,亦必與其他一平面相交.

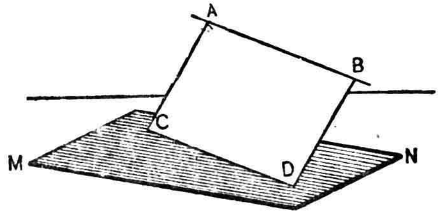
習題 3. 試在教室內指出數例說明命題 II.

習題 4. 在命題 II 之圖內,若 $AC \parallel BD$, 證明 $AB = CD$.

註 學者應注意在立體幾何學中,欲證二直線平行,若僅證其延長之而不相交尚嫌未足,必須更證此二直線在同一平面方可.

命題 III. 定理

488. 含有二平行線之一之平面必與他一線平行.



已知 $AB /\!/ CD$, 又平面 MN 僅含 CD.

求證 平面 $MN /\!/ AB$.

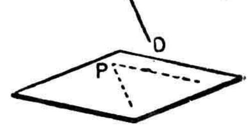
證 AB 與 CD 決定之一平面,交 MN 於 CD.

故,若 AB 與 MN 相交,則必交 MN 於 CD.

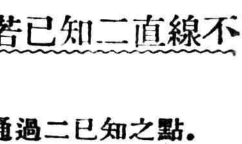
但,因 $AB /\!/ CD$, 此事為不可能.

故 平面 $MN /\!/ AB$.

489. 注意 應用命題 III, 吾人可作一平面使平行於已知直線 AB. 作圖之法,其第一步每先作一平行於已知線 AB 之直線 CD, 然後通過 CD 作一平面.



490. 系 1. 過一已知之直線可作一平面使平行於任一其他已知直線;若已知二直線不相平行,則僅可作一平面.

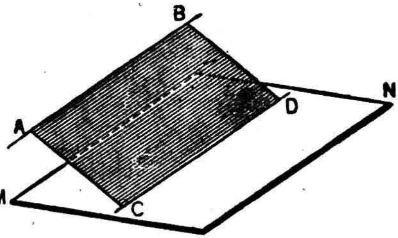


491. 系 2. 過一已知點可作一平面使平行於在空間之任二已知直線;若已知二直線不相平行,則僅可作一平面.

習題. 求作一平面平行於一已知之直線,且通過二已知之點.

命題 IV. 定理

492. 平行於一平面之直線，必與此平面及通過此直線之任何平面之交線平行.



已知 AB 平行於平面 MN，又含 AB 之平面 BC 交 MN 於 CD.

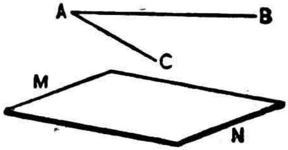
求證 $AB \parallel CD$.

證 AB 與 CD 不能相交，否則 AB 即當與平面 MN 相交.

AB 與 CD 在同一平面內.

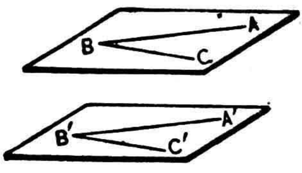
故 $AB \parallel CD$.

493. 系 1. 若相交二直線皆與已知之平面平行，則其平面必平行於已知之平面.



設 AB 與 AC 皆平行於 MN. 若平面 ABC 與 MN 相交，則其交線當平行於 AB，又平行於 AC，此爲不可能之事.

494. 系 2. 若二角之邊各自平行，則其平面亦必平行.

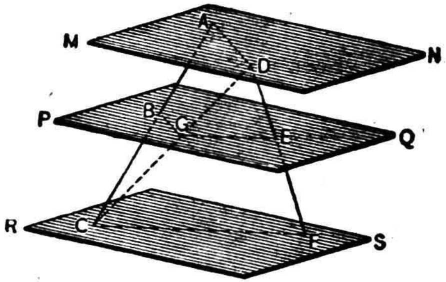


因 $AB \parallel A'B'$，平面 ABC 平行於 $A'B'$；又同理，平面 ABC 平行於 $B'C'$.

故平面 ABC 平行於平面 $A'B'C'$. (系 1)

命題 V. 定理

495. 若二直線為數平行之平面所截，則其相應之線段必成比例.



已知 MN, PQ 及 RS 為三平行之平面，被二直線截之於 A, B, C 及 D, E, F.

求證 $$AB : BC = DE : EF.$$

證 作 DC，且通過 AC 及 DC 作一平面交平面 PQ 於 BG，交平面 MN 於 AD.

於是 $$AD \parallel BG. \qquad (486)$$

通過 DC 及 DF 作一平面，同樣可得

$$GE \parallel CF.$$

故 $$\frac{AB}{BC}=\frac{DG}{GC}, \text{又} \frac{DE}{EF}=\frac{DG}{GC}. \qquad (何故?)$$

$$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}. \qquad (公理 1)$$

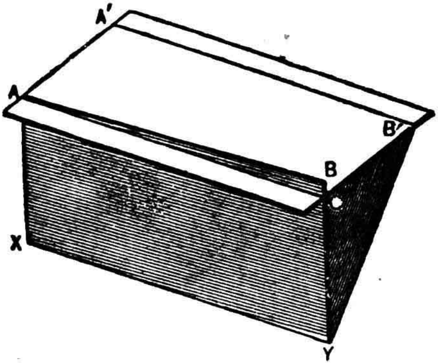
496. 系 若過任一點作數直線，為二平行之平面所截，則其相應之線段必成比例.

習題 1. 若三平行平面在一截線上截得相等之線段，則在任何截線上亦必截成相等之線段.

習題 2. 在命題 V 之圖內，若 $BG=5$, $AD=15$, $DE=4$, 求 EF.

命題 VI. 定理

497. 若二直線皆與第三直線平行，則彼此亦互相平行.



已知 $AB /\!/ XY$, 又 $A'B' /\!/ XY$.

求證 $AB /\!/ A'B'$.

證 通過 AB 及 XY 作平面 AY, 又通過 $A'B'$ 及一點 A 作平面 $B'A$.

設平面 AY 與 $B'A$ 相交於 AC.

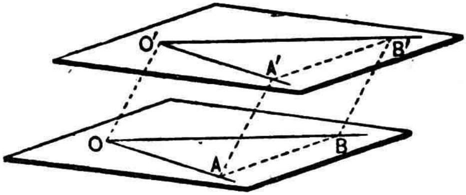
	平面 $B'A /\!/ XY$.	(488)
故	$AC /\!/ XY$.	(492)
但	$AB /\!/ XY$.	(假設)
故	AB 與 AC 相疊合.	(公理 16)
	AB 與 $A'B'$ 在同一平面內.	
但	AB 與 $A'B'$ 不能相交.	(公理 16)
故	$AB /\!/ A'B'$.	

習題. 若一直線 AB 平行於一平面 P, 且平行於另一直線 CD, 則平面 $P /\!/ CD$.

〔提示〕 通過 AB 作一平面與平面 P 相交於 XY.

命 題 VII. 定 理

498. 不在同一平面內之二角，若其二邊各自平行且方向相同，則此二角相等.



已知 二角 AOB 及 $A'O'B'$ 之二邊各自平行，且方向相同.

求證 $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

證 取 $OA = O'A'$，又 $OB = O'B'$.

作 AA', BB', AB, 及 $A'B'$.

AO' 爲一平行四邊形. (何故?)

BO' 爲一平行四邊形. (何故?)

故 AA' 等於且平行於 OO'，

又 BB' 等於且平行於 OO'.

故 AA' 等於且平行於 BB'. (公理 1) (497)

因而 $AA'B'B$ 爲一平行四邊形，

又 $AB = A'B'$.

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$. (何故?)

$\therefore \angle O = \angle O'$.

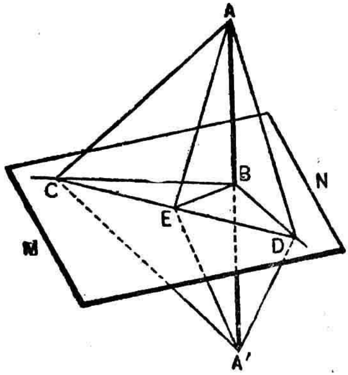
499. 定義 一直線與一平面之交點，稱爲直線之足.

500. 定義 一直線立於一平面上，若在此面上通過其足之任何直線皆與此直線垂直，則稱此直線垂直於平面.

501. 定義 一直線垂直於一平面，則稱此平面垂直於一直線.

命題 VIII. 定理

502. 若一直線垂直於相交二直線於其交點，則此直線必垂直於含此二交線之平面.



已知 二直線 BC 及 BD 皆垂直於 AB, 又平面 MN 含 BC 及 BD。

求證 $AB \perp$ 平面 MN.

證 在平面 MN 內，過 B 任作一直線 BE.

作 CD 交 BE 於 E, 且延長 AB 至 A', 使 $BA'=AB$.

作 AC, AE, AD, CA', EA', 及 DA'.

$AC=A'C,\ AD=DA'.$ (125)

$CD=CD.$ (何故?)

故 $\triangle ACD \cong \triangle CDA'.$ (何故?)

$\therefore\ \angle ACD=\angle A'CD,$

又 $\triangle ACE \cong \triangle A'CE.$ (何故?)

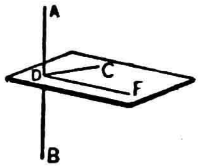
$\therefore\ EA=EA'.$

於是， $BE \perp AA'.$ (79)

故，AB 垂直於通過其足 B 而在平面 MN 內之任何直線，即 AB 垂直於平面 MN. (500)

503. 系　通過一點作一平面使垂直於一直線.

I. 已知直線 AB 及在 AB 上之一點 D. 通過 AB 作二平面. 在此二平面(圖內未畫出)內作 $DC\perp AB$ 及 $DF\perp AB$. 則平面 CDF 即爲所求之平面.

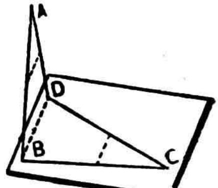


II. 已知直線 AB 及線外之一點 C. 作 $CD\perp AB$. 通過 AB 作一平面,但不含點 C. 在此平面內作 $DF\perp AB$. 則 CDF 即爲所求之平面.

習題 1. 在命題 VIII 之圖內, 若 $AD=5$, $AB=4$, $BC=5$, $\angle CBD=120°$, 又 AB 垂直於平面 MN, 求 CD 之長.

習題 2 若 $ABCD$ 爲一空間之四邊形 (即 A, B, C, 及 D 不在同一平面內),又 $AB=BC$, $CD=DA$, 則平面角 A 等於平面角 C.

習題 3. 連接一空間四邊形兩鄰邊中點之直線必等於其他二邊中點之連結線,且與之平行.



習題 4. 不在同一平面內之二角, 若其二邊各自平行,而方向相反,則此二角相等.

習題 5 若二角之邊各自平行,問在何種條件下二角互爲補角?

習題 6. 通過二點作一平面, 問在何種條件下此平面得垂直於已知之直線?

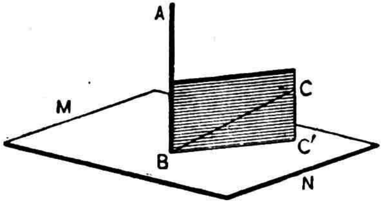
習題 7. 通過 5 點可作若干平面,丑點中無有 4 點在一平面內者?

習題 8. 包圍一定部分之空間,最少須若干平面?何故?

習題 9. 求證 (a) 若四邊形之二對角線相交, (b) 若有二邊平行, (c) 若其二對邊相交: 則此四邊形決定一平面.

命題 IX. 定理

504. 過直線上一定點,而垂直於此直線之一切垂線,悉在通過此點而垂直於此直線之平面內.



已知 $AB \perp BC$, 又 $AB \perp$ 平面 MN 於 B.

求證 BC 在平面 MN 內.

證 通過 AB 及 BC 作一平面,令其與 MN 相交於 BC'.

$AB \perp BC'$. (500)

$AB \perp BC$. (假設)

故 BC 與 BC' 相疊合, (47)

即 BC 在平面 MN 之內.

505. 系 1. 過直線上之一定點,僅能作一平面垂直於此直線.

506. 系 2. 過直線外一點僅能作一平面垂直於此直線.

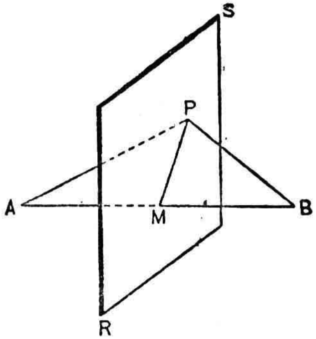
習題 1. 一直角以其一邊爲軸而迴轉之,問他一邊轉成何種之面?

習題 2. 三直線互相垂直. 求證不能有第四直線垂直於此已知之三直線.

習題 3. 求證作一直線垂直於有一公共點之二平面爲不可能.

命題 X. 定理

507. 在垂直且平分一直線之平面上各點，與直線之兩端等距離.



已知 RS 爲垂直於直線 AB 中點 M 之平面，P 爲其內之一點.

求證 點 P 與 A 及 B 等距離；即

$$PA=PB.$$

證 PM 爲 AB 之中垂線.　(何故?)

$$PA=PB \quad \text{(何故?)}$$

508. 系 1. 與一直線兩端等距離之點必在已知直線之垂直平分平面內.

〔提示〕 用上圖，通過 P 作一平面垂直於直線 AB，證明平面 RS 將平分 AB，結果平面 RS 爲直線 AB 之垂直平分面.

509. 系 2. 與一直線兩端等距離之點之軌跡爲垂直於此直線中點之平面.