普通高等教育公共基础课程用书

大学文科数学

DAXUE WENKE SHUXUE

李继根　编著

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

大学文科数学

李继根　编著

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学 / 李继根编著. —上海:华东理工大学出版社,2012.8
ISBN 978 - 7 - 5628 - 3330 - 7

Ⅰ.①大… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 167655 号

普通高等教育公共基础课程用书

大学文科数学

编　　著 / 李继根
责任编辑 / 郭　艳
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 肖　车　裘幼华
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　　址:上海市梅陇路 130 号,200237
电　　话:(021)64250306(营销部)
(021)64252174(编辑室)
传　　真:(021)64252707
网　　址:press. ecust. edu. cn
印　　刷 / 常熟新骅印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 20
字　　数 / 486 千字
版　　次 / 2012 年 8 月第 1 版
印　　次 / 2012 年 8 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978 - 7 - 5628 - 3330 - 7
定　　价 / 39.80 元

联系我们:电子邮箱　press@ecust. edu. cn
官方微博　e. weibo. com/ecustpress

前言

“文科生学数学有什么用?”这个问题实际上是科学与人文两大文化分离和对立的直接反映.究其根源,有人列出了如下几条原因:科学与教育的高度专门化和专业化;对科学主义和人文主义的狭隘理解;科学对人、自然和社会的影响(包括正面的和负面的).毋庸讳言,由于考试制度和过于死板的学习,致使大学文科学生中不喜欢、讨厌乃至畏惧数学者大有人在.再加上极端科学主义与人文主义的对立,造成文理间存在着巨大的鸿沟.在这样的背景下,又该如何在“大学文科数学”课程中体现“文科特色”呢?

长期以来,在“大学文科数学”课程建设方面,我们从课程体系、教学内容、教学方式等方面进行了多次调查和改革,取得了丰富的实践经验.本教材就是结合我们的多年探索,在充分体现“文科特色”的精神指导下,充分吸收数学教育学的最新思想,并根据我校人文社科类学生的实际情况编写而成的.在教材的编著过程中,我们力求突出以下特点:

1. 渗入数学哲学、数学史以及数学文化,实现文理交融

首先,我们在每篇的开篇处给出了相应模块的思想发展简史,并精选了几则名人名言,试图勾勒出该模块的思想、精神和方法的大致脉络.对重要的思想和人物,还特辟专节加以详细阐述.比如第一次数学危机与无理数、无穷之旅、连续的思想、从惠更斯到拉普拉斯、从《末日审判书》到凯特勒、二项分布的正态近似、奈曼和皮尔逊的故事等.

其次,注重挖掘若干知识点中的数学文化.一方面,我们充分借鉴和吸收了学界已有的工作,比如极限与追龟悖论、斐波那契数列与黄金数、割圆术与重要极限、无穷小与第二次数学危机等.另一方面,我们也引出了大量全新的尝试和探索,比如“割圆术→埃舍尔→《盗梦空间》”、洛必达法则与“误称定律”、从洛书到幻方、道吉森与《爱丽丝梦游仙境》、“二项式定理→杨辉三角→宝塔诗”、圣彼得堡悖论与数学期望、正态与“正太”等.

按照文科生的学习兴趣,内容应尽量生动有趣.这些尝试和探索,不仅符合文科学生的学习心理和“口味”,更提高了大家的学习兴趣.比如有学生在撰写的课程小论文中,就谈到牛顿与“光”对自己的极大启迪.对文科学生来说,这或许比学习这一数学知识本身的收获还要大.

这里要特别指出的是,在“大学文科数学”课程中,如何渗入数学哲学、数学史乃至数学文化,是只作为装饰厅堂的点缀,还是与相关内容有机结合,这是学界目前正在大力研究和探讨的问题.我们的尝试和探索也只是抛砖引玉而已.

2. 结合数学与文学、逻辑思维与形象思维

文学艺术强调主观体验和丰富的想象力,看重形象思维;数学则偏重科学严谨和逻辑推理,垂青于逻辑思维.这是一种比较普遍的看法,其根源在于狭隘的科学主义与人文主义的对立.事实上,文学艺术和数学都是人类思维的自由想象与创造之物,逻辑思维与形象思维

是人类思维的双翼,不可偏颇.

这样说来,作为面向文科生的教材,行文表述自然更要具体、生动、形象、直观,以体现文科特点.旁征博引是家常便饭,寻章摘句更是雕虫小技.在书中,我们通过故事、成语、唐诗宋词、典故等文史知识,希望让学生体会到文学的魅力和数学的思想.

除此之外,我们更看重数学知识与文学知识的类比.比如极限的 $\varepsilon-N$ 定义与名落孙山、复合函数与“三位一体”、重要极限与“杀鸡刀”“宰牛刀”、冗余方程与“打假”、初等变换的秩不变与生物遗传等.

3. 采用了“教材＋科普”的“戏说”方式

为了增加趣味性(请千万不要认为是“恶趣”),我们在教材中加入了许多“戏说”元素,以及少量电影海报.教育的最终目的是点燃和激起学生火热的思考,进而对知识进行主动建构.在这个大前提下,我们说“学无止境,教无定法”.教学如此,教材更应如此.

4. 注重启发式教学,采用多种方式自然地引入新知

作为启发式教学的重要辅助工具,教材必须充分反映学生的思维过程,要通过一系列启发性的问题和各种各样的尝试和想法,让学生在观察、比较和推理中形成结论.否则,从问题出发抽象出数学知识再回到问题这种丰富多彩的数学思维活动,就变成了纯粹的逻辑推理,从定理到定理,从结论到结论.

在本书中,我们注重采用多种方式自然地引入基本概念、方法和重要结论,例如从第一次数学危机引入极限的概念、从连续复利引入第一个重要极限、从第一个重要极限引入 $x\to c$ 时函数的极限、从割圆术引入第二个重要极限、从“消逝量的灵魂”引入无穷小的概念、从切线问题引入导数的定义、从鸡兔同笼问题引入矩阵的定义、从高斯的二次型研究引入矩阵乘法、从数的倒数引入逆矩阵的概念、从行阶梯矩阵的秩引入一般矩阵秩的定义、从“宏观、中观与微观”的思维方式引入全概公式、从二项分布的正态拟合引入连续型随机变量的概念、从加权平均引入数学期望的概念、从袋装咖啡引入假设检验思想等.这些尝试降低了学生预习的难度,也极大地节约了教师的课堂教学时间.

最后,要感谢李建奎教授、殷锡鸣教授、夏宁茂教授、龚成通教授、刘剑平教授、施劲松老师和黄秋深老师,以及李莹、林爱红、杨勤民、宋洁等青年才俊,还要感谢理学院院长鲁习文教授,他们对本教材的编写都给予了很大的帮助与极大的关注.要特别感谢周陵安先生,他屡屡给人启迪.

还要感谢 123、xyz、ABC、$\alpha\beta\gamma$…数学史反复告诫我们的是:如果没有这些符号“精灵”,数学书将如何地不堪卒读.

浩浩乎文兮!郁郁乎理兮!微积分的连续性,线性代数的离散性,加上概率统计的随机性,本已博大精深,而人文更是深邃无比.饶是如此,笔者作为鲰生小子仍不谫愚陋,发了点刍荛之言,唯冀能抛砖引玉.这些浅见薄识,自然逃不过方家的慧眼.书中不当乃至谬误之处,敬请各位方家高手来函批评指正.

作者邮箱:jgli@ecust. edu. cn

目 录

第一篇 微积分——变量的数学

第二篇　线性代数——处理线性关系的数学

第三篇 概率统计——随机性的数学

第一篇　微积分——变量的数学

这本庞大的书(我指的是宇宙)中写了(自然)哲学,它一直敞开在我们的眼前,但若不先学会理解它的语言,并识别它所书写的字符,是不能读懂它的,它是用数学语言写成的.

——伽利略

我只是一个在海边拾取小石和贝壳的小孩子.真理浩瀚如海洋,远非我们所能全部看到.

如果我比其他人看得更远些,那是因为我站在巨人的肩上.

——牛顿

因为辩证法突破了形式逻辑的狭隘界限,所以它包含着更广的世界观的萌芽,在数学中也存在着同样的关系.初等数学,即常数的数学,是在形式逻辑的范围内活动的,至少总的说来是这样;而变数的数学,其中最重要的部分是微积分,本质上不外是辩证法在数学方面的运用.

——恩格斯

微积分思想发展简史

函数反映了运动变化过程中变量之间的相互依存关系,但如果要揭示因变量随自变量变化的快慢程度(即变化率)等问题,以及曲边梯形的面积计算等无限累加问题,就需要新的数学工具,它就是微积分. 牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)的贡献正在于他们看到了这两类问题的联系,从而极大地简化了它们的计算.

在微积分的萌芽阶段,以中国为代表的东方数学和以古希腊为代表的西方数学都做出了卓越的贡献. 在古代中国,早在《庄子 · 天下篇》中,就清晰地论述了极限理论:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”在古希腊,熏陶过古埃及和古巴比伦的数学及文化后,毕达哥拉斯(Pythagoras)在意大利创立学派,把数看作是宇宙的基本原则,信奉“万物皆数”. 然而物极必反,希帕索斯(Hippasus)的惊天发现彻底颠覆了该派的圭臬,由此引发了“第一次数学危机”. 由于不能用有理数表示单位正方形的对角线长,即$\sqrt{2}$这个无理数,致使几何成为数学的显学,而代数则成了几何的“婢女”. 之后,欧多克斯(Eudoxus)提出比例论和穷竭法,彻底避开了对极限的探讨. 到了欧几里得(Euclid)的《几何原本》(在西方据说发行量仅次于《圣经》),更是为西方理性精神树立了一座丰碑. 之后阿基米德(Archimedes)继承了穷竭法,并借助于杠杆原理,独辟蹊径地创立了“平衡法”,并求出了抛物弓形的面积. 但随着阿基米德被罗马士兵误杀,以及几百年后希帕蒂娅(Hypatia)的惨死,基督教神学彻底垄断了文化教育,科学成了神学的“婢女”,古希腊文明彻底衰落,数学的发展也由“显式模式”变为“隐式模式”.

漫长的中世纪过后,是 14 世纪开始的文艺复兴运动. 在对中世纪的文化产生怀疑和不信任的同时,因为数学所具有的逻辑严密性,人们纷纷将目光投向数学,这使得基督教神学家圣奥古斯丁(A. Augustinus)和阿奎那(T. Aquinas)所宣扬的数学理性精神,即上帝是按照数学的规律办事的理念,得到了极大的彰扬. 研究数学成了接近上帝的一种方式,数学也成了唯一被大家公认的真理体系. 培根(F. Bacon)认为“数学是科学的大门和钥匙”,伽利略(G. Galileo)则进一步地认为“数学是上帝用来书写宇宙的文学”.

“直角坐标系”、“我思故我在”,这是笛卡儿(R. Descartes)最为人熟知的思想. 可是,笛卡儿的数学创造却是基于他的哲学研究. 在当时的历史条件下,笛卡儿提出精神、物质二元论. 他认为精神和物质是“平行世界”,精神世界的心灵和信仰由上帝主管,但物质世界则由物理定律决定,而物理定律是由数学来表达的,因此数学的方法和理论成为认识世界的唯一正确方法. 在运用数学方法寻求真理的过程中,笛卡儿开始了解析几何的研究,重新扳正了代数与几何的关系,从而创造了几何,并直接促成了数学研究对象的彻底变革. 正如恩格斯

(Engels)所指出的那样:"数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了."

到了16、17世纪,在马丁·路德(Martin Luther)和约翰·加尔文(Jean Calvin或Jean Cauvin)等掀起的宗教改革、哥伦布(C. Columbus)地理大发现、科学研究的兴起以及数学理性精神的推动下,生产力得到极大释放,欧洲资本主义经济蓬勃发展,人们迫切需要解决各种古老和新颖的问题,这对科学和数学都提出了极大的挑战. 到了17世纪,以力学为中心,产生了四类问题:瞬时变化率问题,切线问题,极值问题和面积、体积、曲线长、重心等的计算问题. 正是对它们的研究导致了微积分学的诞生.

先说积分思想的酝酿. 早在1615年,开普勒(Kepler)就将圆的面积看成"以微小的弧为底、以圆的半径为高且顶点在圆心的许多相同的微小三角形之和". 到了1635年,卡瓦列里(B. Cavalieri)指出"面积是无数个等距平行线段构成的,体积是无数个平行的平面面积构成的",并提出了"不可分量原理"(即祖暅原理),即"如果两个立体有相等的高,而且它们与底面等高处的平行截面面积恒成定比,则这两个立体的体积之间也有这个比". 利用不可分量原理,他巧妙地求出了椭圆等曲边图形的面积和旋转体的体积. 在1640年前后,费马(P. Fermat)已经确定了任何形如 $y = px^{-k}$ 的曲线下的面积和它们的切线. 而沃利斯(Wallis)在1655年的《无穷小算术》中,则接受了韦达(Viete)、笛卡儿和费马等先辈们用代数方法研究几何问题的思想,把以往的几何求积中的极限概念算术化,使有穷的算术变成了无穷的算术,从而从算术的途径大大扩展了卡瓦列里的不可分量原理. 他的工作直接引导牛顿发现了有理次幂的二项式定理,而这个定理在微积分的创立中发挥了重要作用.

再说微分思想的酝酿. 费马在1629年就初步设想了求切线的"等同法". 他还将之用于求函数的极值. 这个方法虽然缺乏严密性,但已具备微分学的现代标准形式,而且已触及微分学的实质,即"以直代曲",也就是"(局部)线性化". 至于牛顿的老师巴罗(I. Barrow),经常把曲线看成是由运动的点生成的,并在《几何讲义》(1670年)中指出了微积分基本定理. 但他似乎并没有意识到这些定理的本质.

正是因为站在了伽利略、开普勒、笛卡儿、沃利斯、卡瓦列里、韦达、费马、惠更斯(C. Huygens)等巨人的肩上,牛顿以及莱布尼兹才能天才地看到微分和积分之间的互逆关系,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(x),$$

从而从哲学的高度指出了微分与积分是一对矛盾,并最终建立了微积分. 惟其如此,我们才能理解恩格斯的评语,即微积分"是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的,但不是由他们发明的".

微积分的创立及由此产生的"微元分析法",仿佛"一桥飞架南北,天堑变通途",从此大量工程实际问题(涉及几何、物理等)得以轻松解决. 微积分在创立后长达一个世纪的狂飙突进中,导致了大量新兴学科的出现(如微分方程、复变函数、微分几何、变分法等),使得物理、化学等学科被完全数学化,更成了促成工业革命的重要因素. 对微积分的发展和普及做出了卓越贡献的主要是雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)和约翰·伯努利(Johann Bernoulli)两兄弟和"伟大的欧拉(Euler)". 欧拉用形式化方法把微积分从几何中解脱出来,使其建立在了算术和代数的基础之上. 欧拉的贡献,正如他的老师约翰·伯努利所言:"我介绍高等分析

的时候,它还是个孩子,而你正把它带大成人."

微积分的产生和发展也彻底改变了科学与神学的关系,使得科学不再是神学的"婢女".既然数学是"自然哲学的原理",任何可以解释的现象都可以用数学来说明,因此数学可以取代上帝成为自然和宇宙运行的规律.至于上帝的作用,在牛顿眼中,仅仅是"第一推动".到了一百年后,拉普拉斯(Laplace)更是直言,不需要这样的"假设".

在微积分的发展过程中,也产生了不和谐的"世纪景观".由于陷入"微积分的发明权之争",致使欧洲的数学家分裂为支持莱布尼兹的大陆学派(以伯努利兄弟等为代表)和拥护牛顿的英国学派.对立的结果是在随后的一百年里,英国数学家固守几何方法和牛顿的点符号,只产生了泰勒(Taylor)和麦克劳林(Maclaurin)关于函数的级数展开等屈指可数的成果;而大陆数学家则继续使用微元分析法和 d 符号,极大地促进了整个数学的突飞猛进.

在飞速发展的同时,微积分的不严密和巨大影响终于招致了严厉的诘问.最致命的攻击来自英国主教贝克莱(Berkeley).在牛顿的推导中,他一针见血地指出了对"瞬"o 不合逻辑的处理 ,由此引发"第二次数学危机",也启动了微积分长达 200 年的严密化进程.这个进程中的代表性人物是柯西(Cauchy)和魏尔斯特拉斯(Weierstrass).柯西在《分析教程》(1821年)中,以微积分的严格化为目标,对微积分的基本概念给出了明确的定义,建立了一个基本严格的体系,成为几乎近百年内微积分教程的标准模式.在该书中,他定义了函数、极限和连续,发现了级数的柯西准则和柯西中值定理,并用和的极限定义了定积分,即 $\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(\Delta x_i \cdot f(x_i))$. 他的定积分定义后来被黎曼(Riemann)修改,成了现在微积分教科书中采用的形式.魏尔斯特拉斯则给出了第一个严格的实数定义以及极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义,并用"递增有界数列"的极限定义了无理数,从而使实数系统得以完备.他 1872 年给出的著名"病态函数"(处处连续但处处不可导) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, 打破了当时人们普遍拥有的谬误"连续函数都是可微的",使得数学家们清楚地认识到重新考虑分析基础尤其是实数基础的重要性,由此产生了各种互相等价的实数理论,其中最著名的当属戴德金(Dedekind)的"分割"和康托尔(Cantor)的"闭区间套".到了 19 世纪晚期,各种类型数学结构的公理体系的出现,以及非欧几何所带来的革命性影响,终于成就了希尔伯特(Hilbert)在公理化上的集大成之作《几何基础》(1899 年).

严格化后的微积分,把动态的极限静态化和形式化,概念和推理也变得繁琐迂回,让多数学习者听不明白,谈"微"色变.因此国内外一直有人在研究"第三代的微积分",希望新创立的微积分不但具有第二代的严谨,而且能继承第一代的直观易懂和简易明快,让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理,不但知其然而且知其所以然.这是非常值得我们关注的研究.

第 1 章 极限与连续

"风起于青萍之末",起自毕达哥拉斯学派的狂风掀起"第一次数学危机",彻底改变了数学之舟的航向. 经过漫长而黑暗的中世纪,它终于在文艺复兴后再度远航. 然而驾舟的巨人们却被基督教神学家屡屡责问,并最终酿成"第二次数学危机". "危机"是"危"也是"机". 经过数代人的不懈努力,数学巨舟终于在百年前泊入"集合论"的良港,结束了长达几千年的漂泊无依.

1.1 数列极限

1.1.1 从前有个数

某财主的公子开蒙,老师刚教完一、二、三,他就举一反三、无师自通了. 财主真高兴,"看看我这儿子,天才呀!"几天后家中请客,财主就让儿子负责登记来宾的姓名,第一位来宾姓万(不是姓"易")……后面的故事大家都知道了.

这位公子的智商实际上处于原始人级别,即"结绳"或"刻痕"的水平. 后来虽然有个聪明的原始人将三头牛、三只羊……与"三"建立了对应,但之后就只好"三生万物"了. 再后来又有个更聪明的原始人想到了两只手,碰到计数的问题,"掐指一算"就行了. 如果"手不够"那就"脚来凑"……如此逐渐产生了各种进位制和记数符号.

斗转星移,时光荏苒,文明此起彼伏,转眼间到了公元前 6 世纪,古希腊的萨摩斯小岛上诞生了巨擘毕达哥拉斯. 他以发现勾股定理著称,身后门徒无数,遂成毕达哥拉斯学派. 早期该学派的门徒是通过摆弄小石子来研究数学的,由此从希腊文的"石子"衍生出了 Calculus (微积分)一词.

毕达哥拉斯学派的最大贡献是在数学思想和数学哲学上. 据说毕达哥拉斯偶然发现弦音是由弦长决定的,进而认为距地球不同距离的行星运动速度不同,因而会发出不同的"天籁之音",这样天文和音乐就归结为"数",加上已有的,就形成数学的"四艺":算术(数的绝对理论)、几何(静止的量)、天文(运动的量)和音乐(数的应用). 该学派由此进一步认为,既然宇宙万物都可以归结为简单的整数或"有比例的数"(rational,即**有理数**),因此自然界的种种特性都是可度量的,都可以归结为抽象的"数",这就是说"人们所知道的一切事物都包含数",即"万物皆数".

毕达哥拉斯学派行事几近"邪教",比如门徒聚会时,先要来一番"天王盖地虎""宝塔镇

河妖”,密码则是该学派的徽章“正五角星”. 另外该学派十分崇拜数,以至于发展出数字神秘主义. 比如 1 表示理性,因为理性是不变的;2 是阴性数字,也表示分歧;3 是阳性数字,同时也是和谐的数字,因为它结合了统一(1)和分开(2);4 是平方数,代表公正和秩序,是“圣四”;6=1+2+3,即等于除自身以外所有因子的和,因此 6 是个完美数. 36 是前三个自然数的立方和,又是前四个奇数和偶数的总和,而整个宇宙是建立在这八个数之上的,因此用数 36 来发誓是最可怕的誓言,比什么“冬雷震震夏雨雪”厉害多了. 当然,大家也知道,这些看似荒诞不经的观念,在古人看来却是最自然不过的. 同期古代中国就发展出了周易神数. 问题是到了现代社会,像马丁 · 加德纳(Martin Gardner)在《矩阵博士的魔法数》里嘲讽的那位“矩阵博士”之类的人物,仍借助星座之类的数字迷信,在到处招摇撞骗.

思考: 你能找出前 5 个完美数吗?

作为毕达哥拉斯学派的忠实门徒,希帕索斯发现在徽章“正五角星”的外接正五边形中,对角线长不能用边长来度量,他把这个发现告诉了其他门徒,大家将之应用到单位正方形,发现正方形的对角线长$\sqrt{2}$也不能用边长来度量(有人说这才是希帕索斯的发现). 这可是个致命的打击,这种“无比例的数”(irrational,即**无理数**)的出现,彻底摧毁了该学派的圭臬,并最终演变出“第一次数学危机”. 愤怒的门徒们将希帕索斯扔进大海,让他成了数学史上有据可查的第一位烈士.

“第一次数学危机”本质上面对的是“离散与连续的关系”. 稍后的芝诺(Zeno)以四个悖论的形式,把这个问题惹人注意地摆了出来. 大家知道,阿喀琉斯(Achilles,又译阿基里斯)是希腊神话中的著名勇士,出生时被母亲即海洋女神忒提丝(Thetis)置于冥河水中浸泡,以至刀枪不入. 芝诺最著名的悖论就是依托了大众熟悉的“神行太保”阿喀琉斯和乌龟. 假定乌龟先行一步,那么“神行太保”阿喀琉斯始终与乌龟差一段距离. 当然,悖论之悖在于阿喀琉斯不仅很快就追上了乌龟,还能将它甩得远远的!

经过“第一次数学危机”的洗礼,希腊人不得不承认:直觉和经验都不是绝对可靠的,最可靠的是推理论证. 由此希腊人发展了逻辑推理,并加深了对数学抽象性、理想化等本质特征的认识. 代表人物首先是柏拉图(Plato),他继承了毕达哥拉斯的观念,相信整个物质世界是依照数学规则设计的. 他的“不懂几何者不得入内”遐迩闻名. 在《理想国》中,他的“哲人王”实际上就是“数学王”,因为数学是哲学家所追求的真理总体的主要部分. 他强调“应从自明的假设出发进行严格的证明”. 他的学生亚里士多德(Aristotle)极大地发扬了这些想法,将逻辑定律典范化、系统化为古典逻辑学,从而为之后欧几里得用严密的体系整理几何奠定了基础.

“第一次数学危机”也使得几何取代代数成为之后 2000 年里数学的显学,而代数则成了几何的“婢女”,形成了“几何代数学”. 例如平方、平方根等名称就是这种几何代数的遗迹. 这种处理方式巧妙地避开了无理数,但古巴比伦人开创的代数学的发展则受到严重阻滞. 代数、几何分家也导致原本紧密结合的数与形被割裂开来. 这种状况直到 17 世纪解析几何出现才得到根本性的扭转.

“第一次数学危机”更使得数系的扩张变得踟蹰不前,即从自然数集 $\mathbf{N}$(包括 0)扩充到整数集 $\mathbf{Z}$、再扩充到有理数集 $\mathbf{Q}$ 之后就止步不前了(这里面还有负数的问题),因为只有承认无理数,才能将数系进一步扩充到包含有理数与无理数的实数集 $\mathbf{R}$. 这个问题的彻底解决贯穿了微积分历史的始终,直到 100 多年前,“实数系的逻辑基础问题”才由戴德金等人彻底解