普通高等院校“十二五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主编 铁军 崔艳英 沈利英

国防工業出版社
National Defense Industry Press

线性代数

主　编　铁　军　崔艳英　沈利英

副主编　孙立群　刘亚轻　马吉臣

　　　　张红宁　李繁荣　王舒蛟

主　审　计慕然　傅丽华　郭　颖

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书根据教育部最新制定的“本科数学基础课程(线性代数)教学基本要求”,并参考最新的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写而成,全书贯穿我国著名教育家林炎志先生提出的“四线四点”即“哲学线、历史线、逻辑线、价值线和记忆点、理解点、实用点、工艺点”的教育思想。主要内容有行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换等6章。各章后均附有适量的习题。本书难易适度,结构严谨,重点突出,理论联系实际,有利于提高本科生解题能力;特别注重学生对基础理论的掌握和思想方法的学习,以及对他们的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力的培养;同时每一章均为学生从“四线四点”的角度撰写课程论文预留了空间,有利于培养学生初步的科学研究的能力。

本书可作为高等院校理工类、经管类专业本科生的线性代数教材,也可作为学生参加全国硕士研究生入学统一考试的数学复习参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 铁军,崔艳英,沈利英主编. —北京:国防工业出版社,2012. 8

ISBN 978-7-118-08306-4

Ⅰ. ①线... Ⅱ. ①铁... ②崔... ③沈... Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 179894 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11¼ 字数 253 千字

2012 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 28.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前言

线性代数是高等院校大多数专业必修的一门重要基础理论课，有着悠久的历史和丰富的内容，是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具，在大学数学中占有重要地位。

本书是遵循教育部颁发本科“线性代数课程教学基本要求”并参考最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，结合编者多年教学的经验编写而成的大学本科应用型教材。全书贯穿我国著名教育家林炎志先生提出的“四线四点”即“哲学线、历史线、逻辑线、价值线和记忆点、理解点、实用点、工艺点”的教育思想。

本书“四线”如下：

（1）历史线：线性代数理论的形成早于微积分。

（2）价值线：通过本课程的教学，要使学生掌握线性代数的基本概念、基本理论、基本方法和具有比较熟练的代数运算技能和初步的想象能力。尤其是通过线性方程组、向量、矩阵的理论和方法的学习，培养学生具有初步的抽象思维能力、逻辑推理能力、一定的计算和表述能力以及综合运用所学知识分析、解决问题的能力，为后继课程（如离散数学、微分方程等）和数学实验课程（如数学建模等）以及解决实际问题提供代数基础，为培养高层次的应用性人才服务。

（3）哲学线：哲学是一种方法论，也是对具体内容的符合规律的指导。该门课程自始至终充分体现了马克思主义辩证唯物主义等哲学观点。

（4）逻辑线：本课程分别以线性方程组和矩阵的秩为主线贯穿始终。

本书“四点”如下：

（1）记忆点和理解点：作为一门课程有其特殊的需要记忆与理解的知识点和理论知识，如行列式、逆矩阵、伴随矩阵、线性相关和相性无关、最大线性无关组、基础解系、特征值特征向量、相似矩阵、正定矩阵的概念、公式等都属于需要记忆和理解的知识点。

（2）实用点：以矩阵为工具刻画和解决专业中的问题，会求解大型线性方程组。

（3）工艺点：学生在学习的过程中可培养分析、综合、演绎、归纳、类比、联想、试探等

科学研究方法，培养如何发现和提出问题、建立概念、利用已有的知识提出正确可行的解决方案，培养创新意识和创新能力，培养辩证唯物主义世界观，培养学生独立分析和解决问题的能力。

本书内容的选择与安排既注意保持线性代数本身的完整性和结构的合理性，又考虑到应用型本科学生学习的实际情况，在编写过程中力求引进概念自然浅显、定理证明简明易懂、例题选取典型适当、应用实例背景广泛，充分体现具体—抽象—具体的辩证思维过程。

本书可作为高等院校理工类、经管类专业本科生的线性代数教材，也可作为学生参加全国硕士研究生入学统一考试的数学复习参考用书。

本书由计慕然、傅丽华和郭颖主审，铁军定稿，参加本书编写工作的有铁军、崔艳英、沈利英、孙立群、刘亚轻、马吉臣、张红宁、李繁荣、王舒蛟、纵封磊、袁瑛、程旭华、扎世君、丁津等，郑艳兵、陈龙缤、高明平、戴金滨、杨祥鹏、项永明、王文雅、隋晏等也参与了本书的部分编写和校对工作。

国防工业出版社、北京工业大学和我国著名教育家林炎志和王晓文先生对本书的编写和出版给予了热忱的关心和支持，谨在此表示由衷的感谢！

限于编者学识和阅历水平所限，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请有关专家与读者随时批评指正。

编　者

2012 年 6 月

目　录

第1章 行列式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的法则计算得到一个数。早在1683年与1693年，日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念。以后很长一段时间内，行列式主要应用于对线性方程组的研究。大约一个半世纪后，行列式逐步发展成为线性代数一个独立的理论分支。1750年，瑞士数学家克莱姆在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克莱姆法则。随后，1812年，法国数学家柯西发现了行列式在解析几何中的应用，这一发现激起了人们对行列式应用进行探索的浓厚兴趣，前后持续了近100年。

在柯西所处的时代，人们讨论的行列式的阶数通常很小，行列式在解析几何以及数学的其他分支中都扮演着很重要的角色。如今，由于计算机和计算软件的发展，在常见的高阶行列式计算中，行列式的数值意义已经不大。但是，行列式公式依然可以给出构成行列式数表的重要信息。而在线性代数的某些应用中，行列式的知识依然很有用。特别是在本课程中，它是研究后面线性代数方程组、矩阵及向量的线性相关性的一种重要工具。

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

式中：$a_{ij}(i=1,2,j=1,2)$是未知数$x_j(j=1,2)$的系数；$b_i(i=1,2)$是常数项。

为消去未知数x_2，以a_{22}与a_{12}分别乘上列方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

类似地，消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

注意：上式中的分子、分母都是4个数分两对相乘再相减而得。其中分母$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$是方程组(1-1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1-1)中的位置，排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1－3)所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

数 $a_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 称为这个行列式的元素,简称“元”;第一个下标 i 称为行标,表示该元素位于行列式的第 i 行。第二个下标 j 成为列表,表示该元素位于行列式的第 j 列。位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式的 (i,j) 元。

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆,把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

利用二阶行列式的概念,式(1－2)中 x_1、x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此,当方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,方程组的解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}$$

注意:这里的分母 D 是由方程组(1－1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式,x_2 的系数 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式。

1.1.2　三元线性方程组与三阶行列式

类似地,在利用加减消元法求解含有未知量 x_1、x_2、x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的过程中,引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

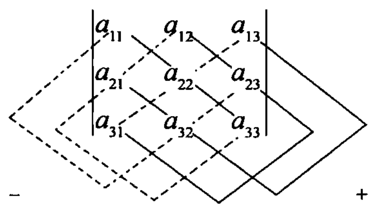
称为三阶行列式。当方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

式中：$D_j(j=1,2,3)$ 是将系数行列式 D 的第 j 列换为右端常数项得到的行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

三元线性方程组所确定的三阶行列式可由对角线法则得到，即



例 1－1　计算三阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

解　按对角线法则有

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 2\times5\times9 + 4\times1\times6 + 4\times3\times0 - 0\times5\times6 - 4\times4\times9 - 2\times3\times1$$

$$= 90 + 24 + 0 - 0 - 144 - 6 = 36$$

例 1－2　求解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

解　方程左端的行列式：

$$D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6$$

由 $x^2-5x+6=0$,解得 $x=2$ 或 $x=3$。

为了得到更为一般的线性方程组的求解公式,需要把二阶与三阶行列式推广到 n 阶行列式,然后利用这一工具来解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组。为此,首先要弄清楚二阶与三阶行列式的结构规律,然后根据所得到的规律来推广行列式的概念。

1.2 排　列

引例　用1、2、3三个数,可以组成多少没有重复数字的三位数?

注:这个问题相当于说,把三个数字分别放在百位、十位与个位上,有几种不同的放法?

显然,百位上可以从1、2、3三个数字中任选一个,所以有三种放法;十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有两种放法;而个位上只能放最后剩下的一个数字,所以只有一种放法。因此,共有 $3\times2\times1=6$ 种放法。

这6个不同的三维数字为

$$123,231,312,132,213,321$$

在数学中把考察的对象,例如上例中的数字1、2、3叫做元素。上述问题就是:把3个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法?

对于 n 个不同的元素,也可以提出类似的问题:把 n 个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法?

定义1　把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(也简称排列)。

n 个不同的元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示,由引例的结果可知 $P_3=3\times2\times1=6$。

为了得出计算 P_n 的公式,可以仿照引例进行讨论:

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上,有 n 种取法;

又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上,有 $n-1$ 种取法;

这样继续取下去,知道最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上,只有一种取法。于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

显然 $12\cdots n$ 也是一个种排列,这个排列具有自然顺序,就是按递增的顺序排起来的;其他的排列或多或少地破坏了自然排列。

定义2　在一个排列中,如果有一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序,一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

计算排列的逆序数的方法如下:

不失一般性,不妨设 n 个元素为 $1\sim n$ 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序。设

$$P_1P_2\cdots P_n$$

为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 P_i 大的且排列在 P_i 前面

的元素有 t_i 个，就说 P_i 这个元素的逆序数是 t_i。全体元素的逆序数之总和为

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数。

例 1－3 排列 2431 中，2 在首位，逆序数为 0，4 是最大数，逆序数为 0，3 的前面比 3 大的数有(4)，故逆序数为 1，1 的前面比 1 大的数有(2，4，3)，故逆序数为 3，于是这个排列的逆序数为 0＋0＋1＋3＝4；因为 4 是偶数，所以排列 2431 为偶排列。

类似地，排列 45321 的逆序数为 9，为奇排列。

把一个排列中两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样一种变换称为一个对换。相邻两个元素对换，叫做相邻对换。

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

证 先证相邻两元素对换的情形。

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$。显然 $a_1 \cdots a_l$、$b_1 \cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a、b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1。所以排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同。

再证一般对换的情形。

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$，把它做 m 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$。总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 变成排列 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反。

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数。

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列（逆序数为 0），因此知推论成立。 证毕

1.3 *n* 阶行列式的定义

1.3.1 *n* 阶行列式的定义

有了 1.2 节的准备工作，对三阶行列式做进一步的研究。三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-4}$$

从式(1－4)中可以看出：

(1) 式(1－4)右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列。因此，式(1－4)右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$。这里第一个下标（行标）排成标准排列 123，而第二个下标（列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1、2、3 三个数的某个

排列。这样的排列共有 6 种，对应式(1 -4)右端共含 6 项。

(2) 各项的正负号与列标的排列对照。

带正号的三项列标排列是 123、231、312。

带负号的三项列标排列是 132、213、321。

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列。因此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数。

总之，三阶行列式可以写成为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

式中：t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和。

类似地，可以把行列式推广到一般情况。

定义 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$，得到形如

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1-5}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数。由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如式(1 -3)的项共有 $n!$ 项。所有这 $n!$ 项的代数和为

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1-6}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式 D 的(i,j)元。

定义表明，为了计算 n 阶行列式，首先作所有可能由位于不同行、不同列元素构成的乘积。把构成这些乘积的元素按行指标排成自然顺序，然后由列指标所成的排列的奇偶性来确定这一项的符号。

按此定义的二阶、三阶行列式，与 1.1 节中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的。当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆。

1.3.2 几类特殊的行列式

例 1-4 对角形行列式,其中未写出的元素都是0。

证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证 第一式左端称为对角行列式,其结果是显然的,下面只证第二式。

在第二式左端中,λ_i为行列式的$(i,n-i+1)$元,故记 $\lambda_i = a_{j,n-i+1}$,则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

式中:t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,故

$$t = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

类似地,有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

主对角线以下(上)的元素都为0的行列式叫做上(下)三角形行列式,它的值与对角行列式一样。

例 1-5 计算上(或下)三角形行列式(当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$,或当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$):

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 由于当 $j>i$ 时,$a_{ij}=0$,故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i},其下标应为 $p_i \leqslant i$,即 $p_1 \leqslant 1, p_2 \leqslant 2, \cdots, p_n \leqslant n$。在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$,所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,此项的符号 $(-1)^t = (-1)^0 = 1$,所以有

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似地,有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$$

1.4 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的转置行列式,记为 D^{T} 或 D',即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$。

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$