

清华大学数学科学中心课程讲义

Lecture Notes of Mathematical Sciences Center of Tsinghua University

辛几何讲义

Lectures on Symplectic Geometry

[美] Shlomo Sternberg 著

李 逸 编译

清华大学出版社

International Press

辛几何讲义

Lectures on Symplectic Geometry

[美] Shlomo Sternberg 著
李 逸 编译

Copyright © International Press & Tsinghua University Press.

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

辛几何讲义/(美)斯特尔伯格(Sternberg, S.)著; 李逸编译. --北京: 清华大学出版社, 2012.10

书名原文: Lectures on Symplectic Geometry

ISBN 978-7-302-29498-6

I. ①辛… II. ①斯… ②李… III. ①辛流形-教材 IV. ①O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 170121 号

责任编辑: 陈朝晖

封面设计: 何凤霞

责任校对: 刘玉霞

责任印制: 沈 露

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 三河市李旗庄少明印装厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 170mm×230mm 印 张: 16.5 字 数: 301 千字

版 次: 2012 年 10 月第 1 版 印 次: 2012 年 10 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 49.00 元

产品编号: 043667-01

2010年7月,丘成桐教授热情地邀请我在清华大学开设一门关于辛几何的课程(该课程的英文讲义可在清华大学数学系的网站上获得).我感谢贺琛改正了讲义中的一系列错误(包括印刷和其他错误),以及提供了许多有建设性的改进意见.

李逸把该讲义编译成中文从而有了本书.我对他专注的工作表示谢意,再次感谢贺琛对本书细致的阅读——很遗憾的是这些恰好是我所不能做到的.

我期望英文讲义和本书能对我尊敬的老师陈省身先生表达敬意,并作为对他的一小部分补偿.

同时,我也把此书献给我的妻子 Green Aviva——一位伟大的艺术家.

Shlomo Sternberg

哈佛大学数学系

2011年1月

第 1 章 导论和背景知识	1
1.1 一些历史	1
1.1.1 Hamilton	1
1.1.2 Jacobi	2
1.1.3 Lie	3
1.1.4 Cartan	4
1.2 线性辛几何	5
1.2.1 辛向量空间	5
1.2.2 基本例子	6
1.2.3 辛正交补	6
1.2.4 几类特殊的子空间	6
1.2.5 正则形式	7
1.3 辛群	8
1.3.1 辛群	8
1.3.2 二维辛群: $\mathrm{Sp}(2)=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$	8
1.3.3 Gauss 定理	8
1.4 线性 Hamilton 理论	10
1.4.1 Maxwell 电动力学	10
1.4.2 Fresnel 光学	10
1.4.3 几何光学	11
1.4.4 线性光学	11
1.4.5 Gaussian 光学	11
1.4.6 Gaussian 光学中的射线追踪	12
1.4.7 Gaussian 光学转换成 $\mathrm{Sp}(2)$	13
1.4.8 Snell 定律	13
1.4.9 折射的矩阵形式	14
1.4.10 常折射率介质中的射线	15

1.4.11	薄透镜	15
1.4.12	薄透镜的焦平面	15
1.4.13	共轭平面和薄透镜方程	16
1.4.14	望远镜	16
1.4.15	主平面	17
1.5	Gaussian 光学中的 Hamilton 方法	17
1.5.1	Gaussian 光学中的 Hamilton 方法	17
1.5.2	Hamilton 想法	19
1.5.3	光程	20
1.5.4	光程的一个重要公式	20
1.5.5	光程公式的一个特殊情况	20
1.5.6	光程公式的证明	20
第 2 章	辛群	23
2.1	基础知识回顾	23
2.1.1	辛向量空间	23
2.1.2	最简单的例子	23
2.1.3	子空间的特殊情况	24
2.1.4	辛子空间	24
2.1.5	正则形式	24
2.1.6	Lagrangian 子空间的存在性	25
2.1.7	相容 Hermitian 结构	25
2.2	极分解的使用	26
2.2.1	线性代数中一些事实的回顾	26
2.2.2	非负自伴随矩阵的平方根	26
2.2.3	极分解	27
2.2.4	辛几何中极分解的使用	27
2.2.5	群 $\mathrm{Sp}(V)$ 是连通的	28
2.2.6	$\mathrm{Sp}(V)$ 的维数	28
2.2.7	Lagrangian 子空间构成的空间的维数	29
2.3	辛群的坐标描述	29
2.4	辛矩阵的特征值	30
2.5	$\mathrm{Sp}(V)$ 的 Lie 代数	31
2.6	$\mathrm{Sp}(V)$ 中元素的极分解	31
2.6.1	回到 $\mathrm{Sp}(V)$ 中元素的极分解的一个断言上	33

2.7	$\mathfrak{sp}(V)$ 的 Cartan 分解	34
2.8	$\mathrm{Sp}(V)$ 的紧子群	34
2.9	$\mathrm{Sp}(V)$ 的 Gaussian 生成元	34
2.9.1	线性光学	34
第 3 章	线性辛范畴	39
3.1	范畴理论	39
3.1.1	范畴的定义	39
3.1.2	函子	40
3.1.3	反变函子	40
3.1.4	态射	41
3.1.5	对合函子	41
3.1.6	对换函子	41
3.2	集合和关系	42
3.2.1	有限关系的范畴	42
3.2.2	Δ_X 是恒等态射 id_X	43
3.2.3	结合法则	43
3.3	范畴化“点”	43
3.3.1	FinRel 中的“点”	44
3.3.2	态射作用在“点”上	44
3.3.3	回到 FinRel 范畴上	44
3.3.4	FinRel 上的转置	46
3.4	线性辛范畴	46
3.4.1	$\Gamma_2 \star \Gamma_1$ 空间	47
3.4.2	纤维乘积或正合方格	48
3.4.3	转置	48
3.4.4	投射 $\alpha: \Gamma_2 \star \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \circ \Gamma_1$	48
3.4.5	线性典范关系的核和像	49
3.4.6	证明 $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ 是 Lagrangian	50
3.4.7	结合法则	50
3.5	LinSym 范畴和辛群	51
第 4 章	辛向量空间的 Lagrangian 子空间和进一步的 Hamilton 方法	53
4.1	与有限个 Lagrangian 子空间横截的 Lagrangian 子空间	53
4.1.1	Lagrangian-Grassmanian 空间	54

4.1.2	$\mathcal{L}(V, M)$ 的参数化	54
4.1.3	基描述	55
4.2	$\mathcal{L}(V)$ 上的 $\mathrm{Sp}(V)$ 作用	55
4.2.1	$\mathrm{Sp}(V)$ 可迁地作用在 $\mathcal{L}(V)$ 的横截对上	55
4.2.2	$\mathrm{Sp}(V)$ 不可迁地作用在 $\mathcal{L}(V)$ 的横截三元组上	56
4.2.3	$\mathrm{sgn}(\beta_L)$ 的显式计算	58
4.3	生成函数——Hamilton 想法的一个简单例子	60
4.3.1	和 M^* 横截的子空间	61

第 5 章 微分运算的回顾、广义 Weil 恒等式、Moser 技巧和

	Darboux 型定理	65
5.1	超代数	65
5.2	微分形式	66
5.2.1	微分形式	66
5.2.2	次	66
5.2.3	局部描述	66
5.3	d 算子	67
5.3.1	d 算子	67
5.3.2	规则的内存	68
5.4	导子	68
5.4.1	导子	68
5.4.2	交换子	69
5.4.3	导子和乘法	69
5.5	拉回	69
5.5.1	拉回	69
5.5.2	局部坐标下的拉回	70
5.5.3	链法则	70
5.6	Lie 导数	70
5.6.1	无穷小生成元	71
5.6.2	向量场作为微分算子	71
5.6.3	Lie 导数	71
5.7	Weil 公式	72
5.7.1	内乘积	72
5.7.2	一般的内乘积	72
5.7.3	Weil 公式	73

5.7.4	微分形式作为向量场上的多重线性函数	73
5.7.5	外微分的一个公式	74
5.7.6	Jacobi 恒等式	76
5.8	广义 Weil 公式	77
5.8.1	广义 Weil 公式	77
5.8.2	函子性的使用	78
5.9	链同伦	80
5.9.1	链同伦	80
5.9.2	Poincaré 引理	81
5.10	Moser 技巧	81
5.10.1	问题	81
5.10.2	体积形式	82
5.10.3	经典 Morse 引理	84
5.10.4	Darboux 型定理	85
5.10.5	紧流形	86
5.10.6	紧子流形	87
5.10.7	Darboux 最初的定理	89
第 6 章	辛流形和 Hamiltonian 力学	91
6.1	辛流形的定义	91
6.1.1	辛同胚	91
6.1.2	辛向量场	91
6.1.3	Hamiltonian 向量场	92
6.1.4	Hamiltonian 向量场是辛的	92
6.1.5	两个辛向量场的 Lie 括号是 Hamiltonian	92
6.2	Poisson 括号	92
6.3	Poisson 代数	94
6.3.1	Poisson 代数	94
6.3.2	Poisson 流形	94
6.4	基本的局部例子	94
6.4.1	Hamilton 方程	95
6.4.2	线性 Hamiltonian	95
6.4.3	二次 Hamiltonian	95
6.5	余切丛	97
6.5.1	典范一形式	97

6.5.2	典范二形式	98
6.5.3	使用局部坐标	98
6.5.4	Galileo 定律	98
6.5.5	Newton 定律: $F = ma$	99
6.5.6	Lagrangian 子流形	99
6.5.7	余切丛的 Lagrangian 子流形	99
6.5.8	余切丛的横向 Lagrangian 子流形	99
6.5.9	Q 的微分同胚推出 T^*Q 的辛同胚	100
6.5.10	恰当辛流形	101
6.5.11	增加一个“磁场”	103
第 7 章	余切丛上的 Hamiltonian 力学	105
7.1	余切丛的回顾	105
7.1.1	余切丛上典范一形式的回顾	105
7.1.2	余切丛上典范二形式的回顾	105
7.1.3	Hamiltonian 向量场	106
7.2	余切丛上的 Hamiltonian 力学: 续	106
7.2.1	能量守恒	107
7.2.2	Noether 定理	107
7.2.3	动能和势能	107
7.2.4	动能	107
7.2.5	Legendre 变换	109
7.2.6	局部坐标下的 Legendre 变换	109
7.2.7	动能	110
7.3	Euler-Lagrange 方程	111
7.3.1	Hamilton 方程的第一部分	111
7.3.2	Hamilton 方程的第二部分	112
7.3.3	Euler-Lagrange 方程	112
7.3.4	力学相似性原理	112
7.3.5	Kepler 第三定律	113
7.4	余切丛上的变分计算	113
7.4.1	可变端点	117
7.5	一些 Riemannian 几何	117
7.5.1	指数映射	118
7.5.2	Gauss 引理	119

7.5.3	测地线局部最小化弧长	120
7.5.4	测地线局部最小化能量	121
7.6	另一个变分问题——Hamilton 原理	121
7.6.1	Hamilton 原理	122
7.7	附录：作为 Lagrangian 子流形的 Legendre 变换	123
第 8 章	约化	127
8.1	Frobenius 定理	127
8.1.1	微分系统(也称为分布)	127
8.1.2	微分系统的积分流形	127
8.1.3	一形式的例子	128
8.1.4	不可积一形式	128
8.1.5	淹没	128
8.1.6	叶状结构	128
8.1.7	纤维化	129
8.1.8	微分系统的向量场	129
8.1.9	Frobenius 定理	129
8.2	闭形式的约化	132
8.2.1	Frobenius 定理的主要应用	132
8.3	淹没的水平和基本形式	133
8.3.1	回到闭形式的约化	134
8.3.2	余迷向浸入的约化	135
8.3.3	约化和 Poisson 括号	136
第 9 章	辛群作用和力矩映射	139
9.1	Lie 群背景知识和记号	139
9.1.1	Lie 群背景知识	139
9.1.2	左平移和右平移	139
9.1.3	f -关联向量场	139
9.1.4	左不变向量场生成右平移	140
9.1.5	Lie 代数	140
9.1.6	共轭和伴随表示	141
9.1.7	群上三种自然作用	141
9.1.8	G -流形和等变映射	141
9.1.9	Lie 代数的作用	141

9.1.10	群作用的生成向量场	142
9.1.11	群作用决定其 Lie 代数的作用	142
9.1.12	证明“万有性”	143
9.1.13	回到伴随表示和余伴随表示	143
9.2	辛作用	144
9.2.1	辛作用	144
9.2.2	弱 Hamiltonian 作用	144
9.2.3	弱力矩映射	144
9.3	Hamiltonian 作用及其力矩映射	145
9.3.1	Hamiltonian 作用	145
9.3.2	子群的诱导作用	145
9.3.3	更详细的等变条件	145
9.3.4	到 Poisson 括号的同态	146
9.3.5	修改弱力矩映射使之成为等变的: G 是紧的情形	146
9.3.6	修改弱力矩映射使之成为等变的: M 是紧的和连通的情形	147
9.3.7	恰当辛流形的力矩映射	147
9.3.8	线性动量	148
9.3.9	全线性动量	148
9.3.10	全线性动量守恒	149
9.3.11	$GL(V)$ 作用在 V 上	149
9.3.12	角动量	149
9.3.13	辛表示	150
第 10 章	力矩映射续和约化	151
10.1	力矩映射的导数	151
10.1.1	力矩映射的微分是赋值映射的转置	152
10.1.2	赋值映射的像是力矩映射核的正交补	152
10.1.3	可迁 Hamiltonian 空间覆盖余伴随轨道	152
10.2	Kostant-Souriau 形式	152
10.2.1	Kostant-Souriau 形式: 1	152
10.2.2	Kostant-Souriau 形式: 2(G -不变性)	153
10.2.3	Kostant-Souriau 形式: 3(σ 是闭的和 ι 是其力矩映射)	154
10.2.4	Kostant-Souriau 定理	154
10.3	力矩映射的导数: 续	154
10.3.1	力矩映射的导数的像	154

10.3.2	力矩映射的导数的像的零化子空间在 $m \in M$ 是稳定化子代数	155
10.4	力矩映射下余伴随轨道的逆像和约化	155
10.4.1	完全相交	155
10.4.2	完全相交比横截相交更广泛	156
10.4.3	在力矩映射下余伴随轨道的逆像是余迷向的	156
10.4.4	Q 的维数公式	157
10.4.5	当 Q 的零叶状结构是纤维化时基流形的维数	157
10.4.6	约化 Hamiltonian	158
10.4.7	Marsden-Weinstein 约化空间	158
10.4.8	重新诠释 Marsden-Weinstein 约化空间	159
10.4.9	例子	159
10.4.10	有效势能	160
第 11 章	集体运动和半直积	161
11.1	集体运动的抽象定义	161
11.1.1	例子: 刚体	162
11.1.2	L 和 Q 是某个力矩映射的分支	162
11.2	解集体 Hamiltonian 的 Hamilton 方程	163
11.2.1	回顾: Legendre 变换	163
11.2.2	M 上向量场的两种构造方法	163
11.2.3	四个简单步骤解集体 Hamiltonian 方程	165
11.3	半直积	167
11.3.1	群和向量空间的半直积	167
11.3.2	乘法的矩阵记忆法	167
11.3.3	$G = H \otimes V$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$	168
11.3.4	伴随表示	168
11.3.5	余伴随表示	168
11.3.6	余伴随轨道的 Wigner-Mackey 分类	169
11.3.7	几个例子	170
11.4	集体和不变 Hamiltonian	178
11.4.1	集体和不变 Hamiltonian 是 Poisson 括号交换的	178
11.4.2	$\mathcal{H}$ 和 f 是互相中心化的吗	179
11.4.3	不变函数的中心化	179
11.4.4	“集体的” 三种形态	180

第 12 章	Marle 常秩嵌入定理、力矩映射的正则形式和辛诱导	181
12.1	紧群作用	181
12.1.1	群的平均化	181
12.1.2	不变 Riemann 度量	181
12.1.3	Mostow 定理	182
12.1.4	轨道型	183
12.1.5	忠实性或有效性	184
12.1.6	轨道型的数目是局部有限的	184
12.1.7	紧群辛表示的不动向量空间是辛的	186
12.2	Marle 常秩嵌入定理	187
12.2.1	辛法丛	187
12.2.2	Marle 常秩嵌入定理	188
12.3	正则形式和 Duistermaat-Heckman 定理	189
12.3.1	向量值形式	189
12.3.2	使用余迷向嵌入定理	191
12.3.3	力矩映射零水平集附近的力矩映射的正则形式	191
12.3.4	邻近的约化空间	191
12.3.5	G 是环面的情形	191
12.4	T^*G 的重生性质和辛诱导	192
12.4.1	T^*G 上 $G \times G$ 作用	192
12.4.2	右作用的力矩映射	192
12.4.3	左作用的力矩映射	193
12.4.4	总结	193
12.4.5	T^*G 的重生性质	193
12.5	辛诱导	194
12.5.1	作为向量丛的模型空间及其力矩映射	196
12.5.2	迷向轨道附近力矩映射的正则形式	196
第 13 章	环面作用的凸性定理	197
13.1	局部凸性	198
13.1.1	回顾环面情形下力矩映射的正则形式	198
13.2	一些 Bott-Morse 理论	200
13.2.1	临界点集和 Hessian	200
13.2.2	Morse 函数和 Morse-Bott 函数	200
13.2.3	梯度流	200

13.2.4	稳定和不稳定流形	201
13.2.5	指标	201
13.2.6	当没有 $n_i^j=1$ 时最小值的唯一性	201
13.2.7	水平集的连通性	202
13.3	凸性定理的证明	203
13.4	力矩多面体的精细结构	204
第 14 章	Hamiltonian 配边、局部化和线性化	205
14.1	Liouville 测度和 Duistermaat-Heckman 测度	206
14.1.1	Liouville 测度	206
14.1.2	Duistermaat-Heckman 测度	206
14.1.3	例子: Archimedes 定理	206
14.1.4	力矩映射的存在性	207
14.2	可能是退化的二形式的 Poisson 代数	207
14.2.1	$\mathcal{P}(M, \omega)$ 空间	207
14.2.2	$\mathcal{P}(M, \omega)$ 上的乘法和括号	208
14.2.3	该构造的极端情形	209
14.3	Duistermaat-Heckman 积分	209
14.4	配边的使用	209
14.4.1	配边关联的第一象征	209
14.4.2	等变上调群	210
14.5	恰当 Hamiltonian 配边	212
14.5.1	恰当力矩映射	212
14.5.2	η -极化 Hamiltonian 配边	214
14.6	线性化定理	215
14.6.1	圈作用情形	215
14.6.2	带孤立不动点的圈作用	215
14.6.3	没有不动点的情形	216
14.6.4	一般的 Hamiltonian 线性化定理	218
第 15 章	线性化定理的应用	221
15.1	导引	221
15.2	线性环面作用及其 Duistermaat-Heckman 测度	223
15.2.1	线性环面作用的回顾	223
15.2.2	环面的复表示	223

15.2.3	环面的实表示	224
15.2.4	环面的辛表示	224
15.2.5	力矩映射的像	224
15.2.6	多面体 Δ_α	225
15.2.7	极化权	225
15.2.8	归一化某些体积	228
15.2.9	线性空间的 Duistermaat-Heckman 测度	229
15.3	线性化定理的右边部分	230
15.4	带孤立不动点的环面作用的 Duistermaat-Heckman 测度	231
第 16 章	极小偶对	233
16.1	主丛	234
16.1.1	Weinstein 的约化构造	235
16.1.2	联络和联络形式	235
16.1.3	联络形式	236
16.1.4	关联丛	237
16.2	联络形式和力矩映射的配对	237
16.2.1	T^*P 上的联络和典范一形式	239
16.2.2	证明等式(16.2.3)	239
16.3	丛的拉回	240
16.3.1	主丛拉回的概念	240
16.3.2	与约化空间 $((T^*P) \times F)_{//G}$ 的关系	241
16.4	曲率及其应用	242
16.4.1	使用曲率	242
16.4.2	P 上共变外导数和曲率形式	243
16.4.3	曲率作为 B 上取值在 $\mathfrak{g}(P)$ 内的二形式	243
16.4.4	关联丛上的曲率形式	243
16.4.5	曲率和力矩映射的配对	244
16.4.6	$F(P)$ 上的形式 σ_θ	244

第 1 章 导论和背景知识

在本章我们给出辛几何的一些历史背景和一些基本定义.

1.1 一些历史

1.1.1 Hamilton

很多辛几何的关键想法是由 Hamilton(1805—1864) 发展提出的, 其先是在几何光学的框架下, 之后是在古典力学的框架下. 他关于光学的讨论第一次出现在 1823 年的一篇与 Brinkley 博士交流的论文中. Brinkley 在 1824 年将此论文以 “Caustics” 为标题提交给爱尔兰皇家学院. 这篇论文按照惯例提交给一个 “委员会”, 最后以系列论文的形式, 从 1828 年开始以 “*Essay on the theory of systems of rays, with three supplements*” (15(1828), 69–174; 16(1830 和 1831), 4–62 和 85–92; 和 17(1837), 1–144) 为标题, 发表在 “Transactions of the Royal Irish Academy” .

之后他意识到他使用在光学上的方法同样也适用于力学. 他在这个领域里的两篇著名论文, 以 “*On a general method in dynamics*” ((1824)247–308 和 (1835)95–104) 为标题, 发表在 “Philosophical Transactions of the Royal Society of London” .

Brinkley 博士 (1763—1835), 后来成为 Clyne 的大主教, 是首位爱尔兰皇家天文学家并且也是一位卓有成就的数学家; 他发现年轻的 Hamilton 拥有无与伦比的天赋. 他曾在 1823 年声称: “这个年轻的 18 岁的小伙子, 我没有说他 将会, 而是说现在他就是这个时代的第一流数学家.”