高等学校教学用书

高等代数教程

GAODENG DAISHU JIAOCHENG

A. Г. 庫洛什著

柯 召 譯

人民教育出版社

用书

高等代数教程

GAODENG DAISHU JIAOCHENG

A. Г. 庫洛什著

柯召譯

人民教育出版社

本书原系根据苏联技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической Литературы)出版的庫洛什(А. Г. Курош)著"高等代数教程"(Курс высшей алгебры)1955年修訂版(第四版)譯出的，現由譯者根据原书1959年修訂版(第六版)加以修訂。原书經苏联高等教育部审定为苏联国立大学及师范学院教科书。

本书为代数学的引論，其主要內容为綫性代数及多項式理論。除在第十章介紹了环、域等基本概念外，并在最后一章述及群論初步。

四川大学数学专业58級部分同学曾参加这次譯出工作。

高 等 代 数 教 程

А. Г. 庫 洛 什 著

柯 召 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上 海 新 华 印 刷 厂 印 装

新 华 书 店 上 海 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 K13010·1084　开本 850×1168 1/32 印张 14 3/16

字数 323,000　印数 39,001—40,000　定价(6) ¥ 1.30

1955年8月新1版　1956年10月第2版

1962年12月修訂第3版　1962年12月上海第9次印刷

第六版序

本书第一版发行于 1946 年，嗣后于 1950, 1952, 1955 和 1956 年再版。为了反映出莫斯科大学代数教学方面的經驗，在第二版和第四版里，本书有了很大的修改。在准备現在的第六版时，进行了更加重大的修改，甚至于有足够理由把它算作一本新书，而不是原书的第六版。

这次修改有两个目的。首先是根据多次提出的要求，将本书加以扩充，使它能包含大学里高等代数的全部必要材料，而不是像原来那样，仅供头两学期用。为此目的，在书中加进了一些新的章节。其中一章是研究群論的，而其余的都屬于綫性代数—綫性空間的理論，欧几里得空間的理論，λ-矩陣和矩陣若当法式的理論。

自然，苏联現有的代数著作中，有着一系列在份量、內容和叙述的特点上都各有特色的关于綫性代数的好书。即使像現在这样，在这本书中补充了如此大量的材料之后，也不能奢望以此书来代替那些书中任何一本。但是无可爭辯的是，把全部必要材料組織在一本教科书中并用同一体裁来叙述，这对大学生說是很有帮助的。

另一方面，以前各版所采用的章节安排，早已不合莫斯科大学实际讲授的顺序，这种新安排在很大程度上决定于必須在規定期限內教完一定份量的解析几何和数学分析教程的需要。特别是三年前，在莫斯科大学采用了新的高等代数教学大綱。在这几年中，它順利地通过了考驗，因而修改教本，把材料安排得完全适合于新的大綱，看来是合理的。有一本适应这个大綱的教科书，可能使苏联国內其他大学更便于采用新的大綱。

我們指出各学期材料的分配。第一学期—1 至 5 章，第二学期—6 至 9 章，第三学期—10、11、13 和 14 章。应該注意，莫斯科大学力学专

业的学生只学习头两学期的內容。

无疑地，本书的这些修改对于在师范学院中的使用，并不增加困难，甚至可能更加容易。

本书的前几次修改沒有增加任何篇幅。但这次自然不可能再这样作了。为了在某种程度上縮減篇幅，迫使我們除去了某些材料，特别是略去了关于霍維茨定理、代数的理論、勿劳别涅斯定理的章节。但是，在书中只叙述現行大綱中所規定的那些材料似乎是不合理的，也就是說，不能把这本书变作簡单的講义摘要。保留在书中的那些非最必需的材料—用星号标出的那些节，照例是这种性质的材料：它們过去曾被列入高等代数教学大綱的范圍內，而且迄今仍列入有些大学或师范学院的大綱范圍內；或者，要是分配給高等代数課的鐘点多一些的話，它們終归是要列入大綱范圍內的。

修訂本书时，还变动了某些細节，但这里不細說了。

A. 庫洛什

1958 年 12 月于莫斯科

目 录

緒　言

数学系学生的数学教育是从学习三个基础課程开始的。这三个課程就是数学分析，解析几何和高等代数。这三个課程在很多地方是有联系的，而且有彼此重复的地方，他們共同构成了近代数学的基础。

本书所討論的高等代数比初等代数要提高一步，是中学初等代数課程的基本內容的很自然的扩展。中学代数課程的中心內容，无疑是关于解方程的問題。讀者記得，研究方程是从只含一个未知量的一个一次方程这种簡单情形开始的，然后往两个方向发展。一方面，討論含两个未知量两个一次方程的方程組，以及含有三个未知量三个一次方程的方程組；另一方面，研究一个只含一个未知量的二次方程和某些很容易化为二次方程的特殊类型的高次方程(例如四次方程)。

在高等代数課程中，这两个方向都得到进一步的发展，分成高等代数的两大部門。其中一个叫做綫性代数基础，它是从研究任意一次方程組(或称綫性方程組)这个問題开始的。为解方程个数等于未知量个数的那类綫性方程組，就搞出了行列式理論这个工具。对于从初等代数的观点看来很不习慣的，但应用上却很重要的，就是对方程个数不等于未知量个数的綫性方程組的研究，而研究那种方程組，行列式这个工具不够用了，因此就特别需要搞出矩陣的理論来。矩陣是排列成含一些行和列的正方或长方表的一組数。矩陣論很深奥，且其应用范圍远不只限于綫性方程組理論。另一方面，研究綫性方程組时，还要引进多維空間(也叫做向量空間或綫性空間)并对它进行研究。不懂数学的人，对多維(首先是四維)空間有神秘的而且往往是錯誤的看法；其实这是一个純粹数学的概念，甚至于基本上是一个代数概念，只不过它在很多数学研究中，以及在物理学和力学中，是一种重要的工具而已。

高等代数課程的另一半叫做多項式代数，它是研究只含一个未知量但有任意次数的单独一个方程的。考慮到二次方程有求解公式这个事实，自然就想找出解高次方程的对应公式。从历史上講，这部分代数就是这样发展起来的，而且已經在十六世紀找到了三次和四次方程的求解公式。以后又开始找五次和更高次方程的求解公式，要借助于根式，可能是多层根式，用方程的系数表出它的根。但这是一个失敗的尝試。这种尝試一直継續到十九世紀初期，最后，証明了这种公式是不可能找到的，而且对于次数等于或高于五次的方程，都有这样的整数系数的具体例子存在，它的根不可能用根式写出来。

找不到高次方程的求解公式并不是很可悲的事情—即使对于三次和四次方程来說，这种公式虽是存在的，但已是非常麻煩而且几乎沒有什么实际用途。另一方面，在解决物理或工程問題时，所提出的方程的系数，常常是由測量而得的数値，只是一些近似値，因而我們也只需要知道根的具有一定准确度的近似値。这就需要研究求方程近似解的各种方法，在高等代数教程中，我們只說到其中一些简单的方法。

但是多項式代数的中心問題不是具体的找出方程的根，而是研究根的存在問題。連实系数二次方程都不一定存在实根。把数扩大到全部复数，任何实系数二次方程就都有根了，而且从三次和四次方程的解的公式来看，这对于它們来說也是正确的。但是否存在这样的五次或更高次方程，它并沒有一个复数根，或是为了求出这种方程的根，必須把复数扩大到更广的一类数呢？我們給出了一个重要的定理来回答这个問題。这个定理断定了，每一个有任意数値系数的方程，不管它的系数是实数还是复数，都有复数（在特殊情形可能是实数）根，而且一般的說，根的个数和方程的次数是相同的。

我們这样簡略地描繪了高等代数教程的內容。还要指出，高等代数只是內容很丰富，分支很多的，經常在发展着的代数学的初步知識。現对高等代数教程范圍以外的这些代数分支，試作一个非常簡略的

描述。

本教程中所講的綫性代数，只是它的初等部分，綫性代数基本上是討論矩陣理論以及和矩陣有关的向量空間綫性变換理論的一个大的学科。和它有关系的还有型論，不变量論和張量代数(对微分几何有重要的作用)。向量空間理論在代数以外的泛函分析（无限維空間）中得到进一步的发展。由于綫性代数在数学、力学、物理学和技术科学中有多种重要应用，到現在它还在各种代数分支中占首要地位。

有数十年之久，多項式代数发展为研究一个只含一个未知量的任意次方程的学科，現在已經基本上完成了。它一方面在复变函数論的某些部門中，获得了进一步的发展，基本上成长为域論。关于域論，我們在下面还要提到。至于較深奧的，关于有許多未知量、不是綫性而是任意次方程組的問題，合并了高等代数教程中所研究的两个方向，則在本教程中几乎沒有接触到。这是代数的另一分支—代数几何—所討論的問題。

方程要适合什么条件才可用根式解出，这个問題已經为法国数学家迦罗华(1811—1832)所彻底解决。他的工作指出了代数发展的新方向，这已經在二十世紀，由于德国女代数学家安・諾透(1882—1935)的工作形成了对于代数学的任务的新的观点。現在已經是无可置辯的，方程的研究不再是代数学的中心任务。代数学所研究的正确对象，是和数的加法或乘法相类似的，但是任意的，可能不是施行于数的代数运算。

中学生在物理学課程中，已經遇到过力的加法运算。在大学和师范学院基础課程中所研究的数学分支，已經給出很多代数运算的例子—如矩陣、函数的加法和乘法，对空間变換和对向量的运算等等。这些运算和平常对于数的运算相类似并有同样的名称。但是为数的运算所常有的某些性質，有时会不再存在。例如，常常遇到的而且很重要的一些运算是不可易的(乘积和因子的次序有关)而且有时还是不可群的(三个因子的乘积和括号的安排有关)。

只有少数几种很重要的代数体系經过很系統的研究。我們所說的代数体系是指具某些性质的元素所构成的集合，而且对于这些元素确定了一些代数运算。例如域就是这样的一种代数体系。它和实数系或复数系相类似，在它里面，确定了加法和乘法运算，这些运算都是可易和可群的，适合把它們結合起来的分配律(就是平常的去括号的規則能够成立)，而且都有逆运算——减法和除法——存在。域論很自然地提供了方程理論进一步发展的領域，它的主要分支——代数数域論和代数函数域論又分别使它同数論和复变函数論結合起来。高等代数教程中包含了域論的初步导引，而教程的某些章节——多未知量的多項式，矩陣的法式——是直接对于任意基域来叙述的。

比域的概念更广泛些的是环的概念。它和域的不同之处是，在环里不要求可施行除法，且乘法也可能是不可易的，甚至于是不可群的。全部整数(包括負整数)，只含一个未知量的全部多項式，和全部有实变数的实函数都可作为环的簡单例子。环論包含了如超复数系論和理想数論这些古老的代数分支，它和許多数学学科，特别是和泛函分析有关联，而且在物理学中已經得到一些应用。高等代数教程中实际上只包含了环的概念的定义。

还有应用范圍很广的分支叫群論。群是指这样的代数体系，它只有一个基本运算，这个运算虽然不是一定可易的，但必須是可群的，而且对于这个运算有逆运算存在——如果把基本运算叫乘法，那末它的逆运算就叫做除法。例如，全部整数的集合对于加法运算来說，全部正实数的集合对于乘法运算来說都构成群。群在迦罗华理論中，在关于方程的用根式可解性問題上已經起了很大的作用，近来它們在域論中，在几何的很多分支中，在拓扑学中，还在数学以外的結晶学中，在理論物理学中，都是重要的工具。总之，由于群論的广大应用范圍，它在所有的代数分支中所占的地位仅次于綫性代数。这本教程中，有一章是研究群論基础的。

就在近一、二十年中提出了并且发展了一个新的代数領域叫做結构論（另一中譯名叫格論）。結构是指这样的代数体系，它有两个运算——加法和乘法。这些运算必須是可易和可群的，而且还要适合下面的条件：一个元素同它自己的和与积仍旧等于它自己；如果两个元素的和等于其中的一个，那末它們的积就等于其另一个，反过来也是对的。对于全部自然数，其对应运算为取最小公倍数和取最大公約数，就是結构的一个例子。結构論和群論、环論以及集合論有很饒趣味的联系；一个古老的几何分支，叫做投影几何的，基本上是結构論的一部分；还要提到的是結构論在电路网絡理論中有它的用途。

在群論、环論和結构論的某些部門之間，存在着显著的类似之点，这就提出了代数体系的一般理論（或泛代数論）。到現在为止，对这些理論只是作了些初步工作，但是已經描繪出它的輪廓，而且发現它和数理邏輯有关系，大有发展前途。

上面所作的概述中，当然不能包含代数学所有各式各样的內容。特别是在其他数学領域的边緣上，有代数的若干部門存在。如拓扑代数，它研究这样的代数体系，在这个体系（例如实数系）中，对其元素所定的某些收斂过程来說，运算是連續的。和拓扑代数邻近的有連續群（或者叫做李群）論，它在几何的若干不同問題中，在理論物理中，在水力学中都有很多的应用。此外，李群論又交織着代数方法、拓扑方法、几何方法与泛函方法，具有独出的特点，很可以把它看作数学中独特的分支。还有有序代数体系理論，是結合几何基础的研究而产生的，它在泛函分析中找到了应用。最后，微分代数学已在开始发展，建立了代数学和微分方程論之間的新的关系。

无可否認的，代数学的輝煌发展，达到今天的成就，决不是偶然的現象——它是数学总的发展的一部分，在很大程度上是为了滿足其他数学科学对代数学的要求而引起来的。另一方面，由于代数学自身的发展对于其他邻近分支的发展，已經显示出而且还在显示出很大的影

响，还由于其应用范圍的广大(这是近世代数的特征)，所以有时我們甚至說今日数学中所謂“代数化”的趋势是格外加强了。

上面对代数学的描述，不但很簡略，而且还沒有給出关于这个学科的发展簡史。所以我們将以代数学史的簡短描述来結束我們的緒言。

有些代数問題，特别是解最簡单的方程，已經为巴比倫人，而后为古代希腊数学家所知道。这个时期代数研究的高峰是希腊（亚力山大的)数学家丟番都（公元三世紀)的工作。而后这些研究为印度数学家阿里阿勃赫塔(六世紀)，勃勒馬哥潑塔(七世紀)，勃赫斯卡勒(七世紀)所发展。在中国張蒼（公元前二世紀）和耿寿昌（公元前一世紀）很早就从事于代数問題的研究①。秦九韶（十三世紀)是很偉大的中国代数学家②。

中世紀时东方的数学家对于代数学的发展有很大的貢献。在这些用阿拉伯文字写的著作中，特别是中亚細亚学者烏茲别克人謨罕默德·阿尔一霍力士米（九世紀）和塔吉克数学家兼詩人奥馬·卡揚(1040—1123)。特别是“алгебра”（代数学)这个字就是起源于阿尔一霍力士米所写的书的名字“Аль-Джебр аль-мукабала”

上面提到的巴比倫、印度、希腊、中国和中亚細亚代数学家所研究的，都是今日初等代数課程教学大綱里面的代数問題，只是偶尔接触到三次方程。西欧中世紀代数学家和十五世紀文艺复兴时代的代数学家的工作，主要也还停留在这些問題的范圍內；我們提出意大利数学家比薩的利奥拿陀(費旁拿吉)(十二世紀)和近世代数学符号的創造者法国数学家維脫(1540—1603)。还有，已經在前面說到过，十六世紀数学家曾經求出解三次和四次方程的方法；这里要提出他們名字的，就是意大利的費罗(1465—1526)，塔塔利阿(1500—1557)，卡丹(1501—1576)和費拉黎(1522—1565)。

① 張蒼，耿寿昌都是汉初人，曾删补九章。——譯者注。

② 秦九韶，字道古，宋人，著数书十八卷。——譯者注。

在十七和十八世紀中，着重对方程的一般理論(即多項式代数)进行了很多工作，有很多数学家参加了这一工作，其中有法国的笛卡儿(1596—1650)，英国的牛頓(1643—1727)，法国的达朗倍尔(1717—1783)和拉格朗日(1736—1813)。十八世紀，瑞士数学家克萊姆(1704—1752)，法国数学家拉普拉斯(1749—1827)又开始构成了行列式的理論。在十八世紀和十九世紀交替的时候，德国数学家高斯(1777—1855)証明了前面提到过的关于数值系数方程有根存在的基本定理。

在十九世紀的最初三十年，代数学史的标志是解决了用根式解方程的可能性問題。对于五次和五次以上的方程，意大利数学家魯費尼(1765—1822)証明了不可能有求解公式，而更严密的証明則为挪威科学家阿貝尔(1802—1829)所得出。前已提到，对于有根式解存在的方程应适合的条件是迦罗华所彻底解决的。

在十九世紀中叶和后半世紀，迦罗华理論推动了代数学的发展，使代数学走向新的方向。出現了代数数域和代数函数域的理論以及和它相关的理想数論。在这里我們要提出德国数学家庫莫尔(1810—1893)，克朗內格(1823—1891)和戴狄金(1831—1916)，俄国数学家E. И. 若洛大列夫(1847—1878)和Г. ф. 伏罗諾伊(1868—1908)。比拉格朗日和迦罗华的工作更进一步的有限群論，得到很大的发展；在这方面工作的有法国数学家柯西(1789—1857)和若当(1838—1922)，挪威数学家錫洛(1832—1918)，德国代数学家弗劳別涅斯(1849—1918)和霍德尔(1859—1937)。連續群論是从挪威数学家S. 李(1842—1899)的工作开始的。

英国学者哈密登(1805—1865)和德国数学家格拉斯曼(1809—1877)的工作开始了超复数系的理論，或現所謂代数理論。俄国数学家ф. Э. 莫林(1861—1941)在上世紀末期的工作对于代数学的这个分支的进一步发展起了很大的作用。

綫性代数在十九世紀获得了光輝的成就，这首先要归功于英国数

学家薛尔凡斯透(1814—1897)和凱萊(1821—1895)的工作。多項式代数的研究也在継續；我們只提出俄国几何学家 Н. И. 罗巴切夫斯基(1792—1856)所发現的求方程近似解的方法，和德国数学家霍維茨(1859—1919)的工作。在后半世紀开始創立代数几何学，特別要提出的是德国数学家 M. 諾透(1844—1922)的工作。

到二十世紀，代数学的研究获得了广闊的天地，正如我們已經知道的，代数学在数学中占有很光荣的地位。在这一时期，代数学发展了很多新的分支，包括域的一般理論(十年代)，环論和群的一般理論(二十年代)，拓扑代数和結构論(三十年代)，在四十和五十年代，出現了半群論和拟群論，泛代数論，同調代数学，范疇論。在所有这些代数部門中，有很多科学家在进行工作，作出了巨大貢献，在許多国家中，特别是在苏联，形成了很多代数学派。

革命前俄国的代数学家中，除了上面提出的外，还应指出 С. О. 薩都諾夫斯基(1859—1929)和 Д. А. 格拉偉(1863—1939)。但是苏联代数学的研究只在偉大的十月革命以后才有現在的光輝成就。几乎在所有代数学的領域內，都在进行工作，而且在許多方面，苏联代数学家的工作已經起了領导作用。我們只提出两个名字来——Н. Г. 切巴大略夫(1894—1947)(在域論和李群論方面工作)和 О. Ю. 施密特(1891—1956)(知名的极地探險家和代数学家，創立了苏联抽象群学派)。

在結束我們对于代数学的近代情况和发展过程的簡略描述时，我們再一次指出，这里所說的問題基本上越出了高等代数教程的范圍。这个簡略的描述只是帮助讀者对于高等代数教程在整个代数学以及数学大厦中所占的地位获得正确的了解。

第一章　綫性方程組·行列式

§1. 依次消去未知量的方法

我們先来研究含有几个未知量的一次方程組，或即通常所謂綫性方程組[①]。

綫性方程組的理論是代数学的一个重要大分枝——綫性代数的起点，本书的大部分章节，特别是其中前三章，就是討論这个分枝的。在这三章中所考慮的方程的系数，未知量的値以及一般所遇到的数，都是指实数。但是这几章的內容对任意复数的情形也都完全适用。对于复数，讀者早在中学課程中知道了。

和初等代数不同，我們所討論的方程組有任意多个方程和未知量，而且有时在方程組里面的方程个数也不一定要等于未知量的个数。假設給出有 s 个方程 n 个未知量的綫性方程組，約定用下面的符号：我們用 x 附加下标来表示未知量：$x_1, x_2, \cdots, x_n$；把方程照次序来編号——叫做第一，第二，…，第 s 个方程；把第 i 个方程中未知量 x_j 的系数記为 a_{ij}[②]。最后，用 b_i 来記第 i 个方程的常数項。

現在可以把我們的綫性方程組写成下面的普遍形狀：

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s.\end{array}\right\}\tag{1}$$

---

① 因为解析几何中两个未知量的一次方程确定平面上的一条直綫，所以才有这名称。

② 我們利用两个下标，前一个下标是指方程的序数，而后一个下标是指未知量的序数。为簡便計，并不用分点来把他們分开；所以 a_{11} 不讀为“a 拾一”而讀为“a一一”，a_{34} 不讀为“a 三十四”而讀为“a 三四”，依次类推。

未知量的系数构成一个矩形数陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

叫做 s 行 n 列矩陣；数 a_{ij} 叫做矩陣的元素①。如果 $s=n$(亦即行数等于列数)，那末把它叫做 n 阶方陣。这个矩陣里面从左上方到右下方的(也就是由元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所組成的)对角綫，叫做主对角綫。如果在 n 阶方陣的主对角綫上的元素都等于 1，主对角綫外的元素都等于零，那末这个方陣叫做 n 阶么矩陣。

綫性方程組(1)的解是指这样的一組(n 个)数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$②，在以数 $k_i, i=1, 2, \cdots, n$ 分别代換未知量 x_i 后，方程組(1)中每一个方程就都化做恒等式。

綫性方程組可能一个解都沒有，这时我們把它叫做矛盾的方程組。例如，下面就是这样的方程組:

$$x_1+5x_2=1,$$
$$x_1+5x_2=7;$$

这些方程的左边是完全相同的，但它們的右边不同，因此沒有一組未知量的值可以使两个方程同时适合。

如果綫性方程組有解，那末我們說它是相容的。如果相容綫性方程組只存在一个唯一的解，我們說它是有定的——在初等代数里面，只討論这样的方程組。如果相容方程組存在多于一个的解，我們說它是不定的；我們在后面就会知道，这时它的解将有无穷多个。例如方程組

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2&=7, \\ x_1+x_2&=4 \end{aligned}\right\}$$

① 这样一来，如果不从方程組(1)的关系来討論矩陣(2)，那末元素 a_{ij} 的第一个下标表示行数；第二个下标表示列数，这一个元素位于它們相交的地方。

② 注意，数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 构成方程組的一个解而不是 n 个解。