真题篇

考研数学二十年真题精解与热点问题

真题都一样 解答不一样!!!

陈启浩等 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学二

十年真题精解与热点问题

陈启浩等　编著

机械工业出版社

本书是考研数学辅导书 主要内容包括2003年到2012年十年的考研数学二的真题，真题的分析、解答和延伸，以及对考试热点问题的讨论

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学二”的同学阅读，也可作为教师的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

考研数学二 十年真题精解与热点问题./陈启浩等编著 —北京：机械工业出版社，2012 5

ISBN 978-7-111-37891-4

Ⅰ ①考·· Ⅱ.①陈··· Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ ①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第057496号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 昔玉花 责任校对：王 欣
封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2012年7月第1版第1次印刷
184mm×260mm·14印张·337千字
标准书号：ISBN 978-7-111-37891-4
定价：28 00元

考研数学复习指导系列丛书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，能够在较为紧张的时间安排下，有效加深概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由北京邮电大学陈启浩教授等编写的“考研数学复习指导系列丛书”.

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学二考试的包括三本书，分别是：

《考研数学二　十年真题精解与热点问题》

《考研数学基础篇　常考知识点解析（数学二）》

《考研数学提高篇　常考问题的快捷解法与综合题解析（数学二）》

本套系列丛书是陈教授对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶.

本套系列丛书，无论内容编写，还是解题方法都比较精练，新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率，它既贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

前　言

参加考研的同学，一定要练习一下近几年的全国硕士研究生入学统一考试的真题．因为它们既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以提供试题形式、广度和难度等有价值的信息．

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2003 年到 2012 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《考研数学二　十年真题精解与热点问题》一书．本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精解

C. 热点问题

“十年真题精解”是对每一道真题通过“分析”，“精解”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精解”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别．

“热点问题”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的常常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试．

我们希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易的翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起到作用；在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精解和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力．

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

本书主要由北京邮电大学陈启浩教授完成，寿宇、陈文超、张利霞、杨友云等老师也参与了部分编写工作．

欢迎同学们对本书提出任何建议和意见，可发邮件到 cqhshuxue@gmail.com，非常感谢！

编　者

目　录

B　十年真题精解

一、2012 年全国硕士研究生入学统一考试试题精解

一、选择题

(1) **分析** 分别确定曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直和非铅直渐近线的条数即可.

精解 y 在点 $x=-1$，1 处无定义，但

$$\lim_{x\to -1} y=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 1} y=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty,$$

所以，所给曲线只有一条铅直渐近线 $x=1$. 此外，由

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{(x^2-1)x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=1$$

知，所给曲线只有一条非铅直渐近线 $y=1$(它为水平渐近线).

因此本题选(C).

附注 在计算曲线 $y=f(x)$ 的非铅直渐近线时，如果 $\lim\limits_{x\to\infty} y=k$(常数)，必有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=0$，所以此时非铅直渐近线只有水平渐近线 $y=k$.

(2) **分析** 按导数定义计算 $f'(0)$.

精解 由于 $f(0)=0$，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)$$

$$=1\cdot(-1)(-2)\cdots[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

因此本题选(B).

附注 用如下方法也可以计算 $f'(0)$：

由于 $f'(x)=\{(e^x-1)[(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)]\}'$

$$=e^x(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]'$$

所以 $f'(0)=1\cdot(-1)(-2)\cdots[-(n-1)]+0\cdot[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]'\big|_{x=0}$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\ .$$

(3) **分析** 利用收敛正项级数的性质确定正确选项.

精解 由于数列 $\{S_n\}$ 有界时，$\{S_n\}$ 单调增加且有界，所以由数列极限存在准则Ⅱ知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，记为 A，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=A$，$A=0$，即 $\{a_n\}$ 收敛. 但反之未必成立，例如正项数列 $\{a_n\}=\{1\}$ 收敛，但数列 $\{S_n\}=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}1\right\}=\{n\}$ 无界.

所以 $\{S_n\}$ 有界是正项数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分而非必要条件.

因此本题选(B).

附注 数列极限有两个存在准则：

准则Ⅰ 设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，如果$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$（$n=N+1$，$N+2$，…，其中$N$是某个整数），且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$，则

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A.$$

准则Ⅱ 设数列$\{x_n\}$单调不减有上界或单调不增有下界，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

（4）**分析** 画出函数$y=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$在$[0,3\pi]$上的概图，就可由定积分的几何意义得到正确选项.

精解 函数$y=\mathrm{e}^{x^2}\sin x$在$[0,3\pi]$上的概图如图 B-12-1 所示. 由图可知，

$$I_1 = D_1 \text{ 的面积},$$

$$I_2 = D_1 \text{ 的面积} - D_2 \text{ 的面积},$$

$$I_3 = D_1 \text{ 的面积} - D_2 \text{ 的面积} + D_3 \text{ 的面积}.$$

于是，$I_2<I_1$. 此外，由D_3的面积$>D_2$的面积知$I_3>I_1$，所以有

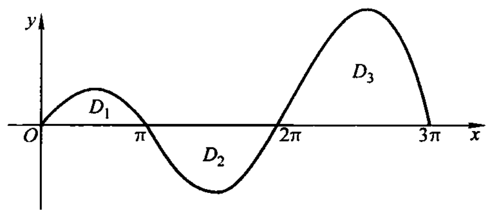

图 B-12-1

$$I_2 < I_1 < I_3.$$

因此本题选（D）.

附注 D_3的面积$>D_2$的面积可从图中看出，也可证明如下：

$$D_3 \text{ 的面积} = \int_{2\pi}^{3\pi} \mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } t=x-\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -\mathrm{e}^{(t+\pi)^2}\sin t\mathrm{d}t$$

$$> \int_{\pi}^{2\pi} -\mathrm{e}^{t^2}\sin t\mathrm{d}t = D_2 \text{ 的面积}.$$

（5）**分析** 逐个判断选项的正确性，直到得到正确选项为止.

精解 对选项（A）. 当$x_1>x_2$时，对任意y由$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$得$f(x_1,y)>f(x_2,y)$，特别有

$$f(x_1, y_2) > f(x_2, y_2). \tag{1}$$

当$y_1<y_2$时，对x_1由$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$得

$$f(x_1, y_1) > f(x_1, y_2). \tag{2}$$

由式(1)、式(2)知，当$x_1>x_2$，$y_1<y_2$时，$f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$.

因此本题选（A）.

附注 本题也可用积分计算. 对于选项（A）有$\displaystyle\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}f(x,y) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$，其中积分路径为如图 B-12-2 所示的有向折线$ACB=\overline{AC}+\overline{CB}$. 于是有

$$f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1) = \int_{AC} \frac{\partial f(x_1,y)}{\partial y}\mathrm{d}y + \int_{CB} \frac{\partial f(x,y_2)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x_1,y)}{\partial y}\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x,y_2)}{\partial x}\mathrm{d}x < 0,$$

即$f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$.

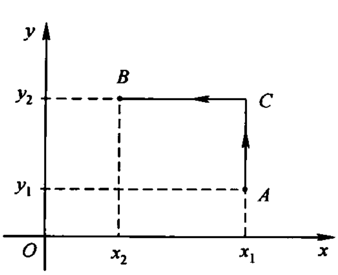

图 B-12-2

(6) **分析**　画出区域 D，利用 D 的对称性化简所给的二重积分后再计算.

精解　D 如图 B-12-3 阴影部分所示.

$$\iint_D (x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

用曲线 $y=-\sin x$ 将 D 分成 D_1 与 D_2 两块，则

$$\iint_D x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

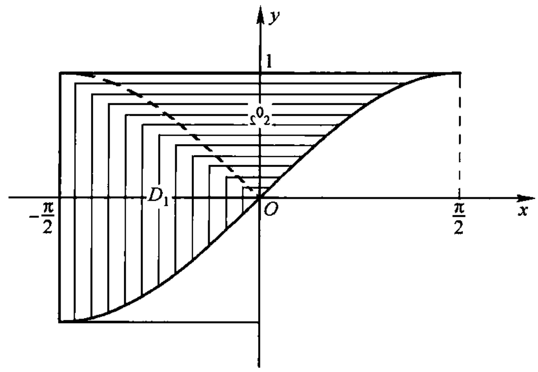

图　B-12-3

(由于 D_1 关于 x 轴对称，函数 x^5y 在对称点处的值互为相反数，所以 $\iint_{D_1} x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 由于 D_2 关于 y 轴对称，函数 x^5y 在对称点处的值互为相反数，所以 $\iint_{D_2} x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$).

此外　$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x = \pi. \tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\iint_D (x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0-\pi = -\pi.$$

因此本题选(D).

附注　本题也可按以下方法计算：

重画 D 的图形如图 B-12-4 阴影部分所示，它被 y 轴划分成 D_3 与 D_5 两块，D_3 与 D_4 关于原点对称，由于 x^5y-1 在对称点 (x, y) 与点 $(-x, -y)$ 处的值彼此相等，所以

$$\iint_{D_3}(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_4}(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

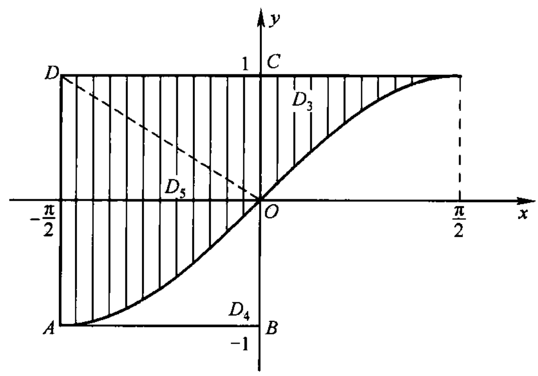

图　B-12-4

从而

$$\begin{aligned}\iint_D (x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_4}(x^5y^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_3}(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_5}(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_4}(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\text{矩形}ABCD}(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\text{矩形}ABCD}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\text{矩形}ABCD}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 0-\pi \text{（由于矩形 } ABCD \text{ 关于 } x \text{ 轴对称}, x^5y \text{ 在对称点处的} \\ &\qquad \text{值互为相反数,所以} \iint_{\text{矩形}ABCD}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\text{）} \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

本题的有关计算方法见提高篇 12.

(7) **分析** 只要在 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 中找到三个向量，以它们为列向量的矩阵的行列式为零即可.

精解 由于

$$|(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0,$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

因此本题选(C).

附注 判别 n 个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性相关性的快捷方法是构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关；

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(8) **分析** 利用 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 即可算出 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

精解 由于 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

所以
$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此本题选(B).

附注 本题也可用以下方法快捷计算：

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 $\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值 $\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量，因此，对于 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

二、填空题

（9）**分析**　所给方程两边对 x 求导两次，并将 $y(0)$，$y'(0)$ 的值代入即可得到 $y''(0)$.

精解　显然 $y(0)=0$，所给方程两边对 x 求导得

$$2x-y'=e^{y}y'. \tag{1}$$

由此可得 $y'(0)=0$.

式(1)两边对 x 求导得

$$2-y''=e^{y}(y')^{2}+e^{y}y''.$$

将 $x=0$ 及 $y(0)=y'(0)=0$ 代入上式得

$$2-y''(0)=y''(0)，即 y''(0)=1.$$

附注　应熟练掌握一元隐函数求一、二阶导数的方法.

（10）**分析**　将所给极限转换成积分和式极限即可.

精解　$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^{2}}+\dfrac{1}{2^{2}+n^{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n^{2}+n^{2}}\right)$

$$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^{2}}}_{\frac{1}{1+x^{2}}\text{在}[0,1]\text{上的积分和式}}=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^{2}}dx$$

$$=\arctan x\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{4}.$$

附注　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)$$

的极限为 $\int_{a}^{b}f(x)dx$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)=\int_{a}^{b}f(x)dx.$$

这一方法常用于和式极限的计算.

（11）**分析**　对 z 求全微分算出 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 后即可得到 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

精解　由于 $dz=f'(u)du\left(\text{其中 } u=\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$

$$=f'(u)d\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{x}f'(u)dx-\frac{1}{y^{2}}f'(u)dy,$$

所以，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x}f'(u)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^{2}}f'(u)$. 于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^{2}\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)-f'(u)=0.$$

附注　当要同时计算二元可微函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数时，总是从计算全微分 df 入手. 特别是当 f 是 x，y 的二元复合函数时，采用这一方法将使计算快捷.

（12）**分析**　将所给微分方程改写成

$$(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-3y^2\mathrm{d}y=0$$

后求解.

精解 所给微分方程可以写成

$$(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-3y^2\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\mathrm{d}(xy-y^3)=0.$$

由此得到所给微分方程的通解

$$xy-y^3=C.$$

将 $x=1$，$y=1$ 代入上式得 $C=0$. 所以所求的满足 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $x=y^2$，进而可得 $y=\sqrt{x}$.

附注 所给微分方程也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=3y\text{（一阶线性微分方程），}$$

它的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(C+\int 3y\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{y}\left(C+\int 3y^2\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{y}(C+y^3).$$

将 $x=1$，$y=1$ 代入上式得

$$1=C+1,\text{ 即 } C=0.$$

于是 $x=y^2$.

(13) **分析** 按曲率计算公式算出所给曲线在点(x,y)处的曲率，然后由题设建立方程，解此方程即可得出所求的点.

精解 曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 在点(x,y)处的曲率为

$$\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

于是由题设得方程

$$\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\text{ 即}(2x+1)^2=1.$$

解此方程得 $x=-1$（舍去了不合题意的 $x=0$）.

$$y=(-1)^2+(-1)=0.$$

所以所求的点的坐标为$(-1,0)$.

附注 当 $y=y(x)$ 二阶可导时，曲线 $y=y(x)$ 在点(x,y)处的曲率的计算公式为

$$K(x)=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(14) **分析** 利用公式 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_3$（其中 $\boldsymbol{E}_3$ 是三阶单位矩阵），并用初等矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 之积表示 $\boldsymbol{B}$，即可算出 $|\boldsymbol{BA}^*|$.

精解 由题设得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$，所以

$$\boldsymbol{BA}^*=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{AA}^*=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_3=3\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

因此，$|BA^*| = 3^3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -27.$

附注　应记住：当 A 是 n 阶矩阵时，

$AA^* = A^*A = |A|E_n$（E_n 是 n 阶单位矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵）.

并应熟练掌握：矩阵 M 的每一个初等行变换（初等列变换）都对应一个初等矩阵，并且对 M 左乘（右乘）这个初等矩阵即为 M 经此初等变换后的矩阵.

三、解答题

（15）**分析**　（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是 $\infty-\infty$ 型未定式，转换成 $\frac{0}{0}$ 型未定式后再计算.

（Ⅱ）令 $k=1, 2, \cdots$ 逐一计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^k}$，直到极限不为零为止，如此确定 k 的值.

精解　（Ⅰ）$a = \lim\limits_{x\to0}f(x) = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}+1 = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}+1$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}+1 = 0+1 = 1.$$

（Ⅱ）由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^3},$$

其中，$x\to0$ 时

$$x+x^2-\sin x-x\sin x$$

$$= x+x^2-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right)-x\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{6}x^3+o(x^3) \sim \frac{1}{6}x^3,$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$，即 $x\to0$ 时 $f(x)-a = f(x)-1$ 与 x 是同阶无穷小，从而 $k=1$.

附注　题解中极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^3}$ 是采用不同方法计算的，这是因为如对后者仍应用洛必达法则计算，则是比较复杂的.

本题的有关计算方法见提高篇 01.

（16）**分析**　按二元函数极值计算方法计算.

精解 由于 $f'_x=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$f'_y=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，所以由 $\begin{cases}f'_x=0,\\f'_y=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1-x^2=0,\\xy=0\end{cases}$ 得 $f(x,y)$ 的可能极值点为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$.

由 $A=f''_{xx}=(-3x+x^3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

$B=f''_{xy}=-(1-x^2)y\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

$C=f''_{yy}=-x(1-y^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

可知，$A|_{(1,0)}=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<0$，$A|_{(-1,0)}=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0$，

$(AC-B^2)|_{(1,0)}=(-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})>0$，$(AC-B^2)|_{(-1,0)}=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0$，

因此 $f(x,y)$ 有极大值 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，极小值 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

附注 设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，(x_0,y_0) 是它的可能极值点，且记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的极小值点（极大值点）的充分条件是

$$AC-B^2>0 \text{ 与 } A>0\ (A<0).$$

(17) **分析** 先算出切点 A 的坐标，并画出 D 的概图，然后计算 D 的面积及旋转体的体积.

精解 设切点 $A(x_0,y_0)$（其中 $y_0=\ln x_0$），则切线方程为

$$y-y_0=(\ln x)'|_{x=x_0}(x-x_0),$$

即 $$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由于切线通过点 $(0,1)$，将它代入上式得

$$1-\ln x_0=-1，\text{即 } x_0=\mathrm{e}^2.$$

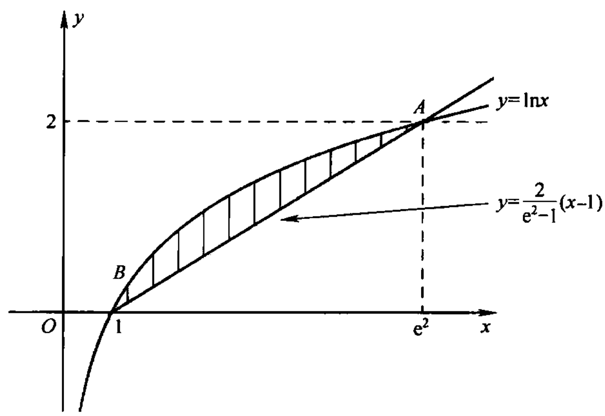

图 B-12-5

于是切点 $A(\mathrm{e}^2,2)$，而 L 与 x 轴的交点 $B(1,0)$. 由此得到 D 的概图如图 B-12-5 的阴影部分所示.

$$D\text{ 的面积}=\int_1^{\mathrm{e}^2}\left[\ln x-\frac{2}{\mathrm{e}^2-1}(x-1)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[x\ln x-x-\frac{1}{\mathrm{e}^2-1}(x-1)^2\right]\Bigg|_1^{\mathrm{e}^2}=2.$$

D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^{\mathrm{e}^2}\left\{\ln^2 x-\left[\frac{2}{\mathrm{e}^2-1}(x-1)\right]^2\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[x\ln^2 x-2x\ln x+2x-\frac{4}{3(\mathrm{e}^2-1)^2}(x-1)^3\right]\Bigg|_1^{\mathrm{e}^2}$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^2-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi(\mathrm{e}^2-1).$$

附注 顺便计算 D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V_1.

$$\begin{aligned}
V_1 &= 2\pi\int_1^{e^2} x\left[\ln x - \frac{2}{e^2-1}(x-1)\right]dx \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{2}{e^2-1}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\right]_1^{e^2} \\
&= 2\pi\left[\frac{3}{4}e^4 - \frac{2}{e^2-1}\left(\frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{2}e^4\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3(e^2-1)}\right] \\
&= \frac{\pi}{6}(e^4 + 4e^2 + 7).
\end{aligned}$$

本题是综合题，有关计算方法见提高篇 09.

(18) **分析** 用极坐标计算所给的二重积分.

精解

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,d\sigma &= \iint_D r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\cos\theta\sin\theta\cdot r^3\,dr \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta(1+\cos\theta)^4 d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot 16\cos^8\frac{\theta}{2}d\theta \\
&= 8\int_0^{\pi}\left(2\cos^{11}\frac{\theta}{2} - \cos^9\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}d\theta \\
&= -16\int_0^{\pi}\left(2\cos^{11}\frac{\theta}{2} - \cos^9\frac{\theta}{2}\right)d\cos\frac{\theta}{2} \\
&= -16\left(\frac{1}{6}\cos^{12}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{10}\cos^{10}\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

附注 当积分区域 D 是角域的一部分时，二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 通常用极坐标计算，特别是当积分区域 D 用极坐标表示(此时，D 必为角域的一部分)时，应先考虑用极坐标计算这个二重积分.

(19) **分析** (Ⅰ)从求解二阶常系数齐次线性微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 入手计算 $f(x)$ 的表达式.

(Ⅱ) 将(Ⅰ)中算得的 $f(x)$ 代入 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$，计算 y''，由此可得到曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点.

精解 (Ⅰ) $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 是二阶常系数齐次线性微分方程，它的特征方程 $r^2+r-2=0$ 有根 $r=1,\ -2$，所以通解为

$$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}. \tag{1}$$

将式(1)代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 得

$$2C_1e^x+5C_2e^{-2x}=2e^x,$$

所以，$C_1=1$，$C_2=0$. 将它代入式(1)得 $f(x)=e^x$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得

$$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

所以，$y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+1$. 于是由

$$\begin{aligned}y''&=2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x\\&=2(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x\begin{cases}<0,x<0,\\=0,x=0,\\>0,x>0\end{cases}\end{aligned}$$

知，$(0,y(0))=(0,0)$ 是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的唯一拐点.

附注 题中的 $f(x)$ 表达式也可按以下方法计算：

由 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $f''(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$. 将它代入 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 得

$$f'(x)-3f(x)=-2\mathrm{e}^x\text{（一阶线性微分方程）},$$

它的通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{3x}(C+\mathrm{e}^{-2x})=C\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x. \tag{2}$$

将式(2)代入 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $C=0$. 将它代入式(2)得 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

本题是综合题，其有关内容及计算方法见提高篇 3，19.

(20) **分析** 由于 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}=x\ln\frac{1+x}{1-x}-2\sin^2\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}$

$$\geqslant x\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}=x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2,$$

所以只要证明 $x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0(x\in(-1,\ 1))$ 即可.

精解 当 $x\in[0,\ 1)$ 时，只要证明 $\ln\frac{1+x}{1-x}-x\geqslant 0$ 即可，为此作辅助函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，则 $f(x)$ 在 $[0,\ 1)$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内可导且

$$f'(x)=\frac{2}{1-x^2}-1=\frac{1+x^2}{1-x^2}>0,$$

所以，在 $[0,\ 1)$ 上 $f(x)\geqslant f(0)$，即 $\ln\frac{1+x}{1-x}-x\geqslant 0$，从而 $x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0$.

由于上述不等式左边是偶函数，因此 $x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0$ 在 $(-1,\ 1)$ 上成立. 由此推得

$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geqslant 0(-1<x<1)$，

即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1).$$

附注 不先化简而直接证明题中不等式是较复杂的，故对它作两次化简：

(i) 将欲证的不等式 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geqslant 0(-1<x<1)$ 左边的函数缩小成 $x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2$，故只要证明 $x\ln\frac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0(-1<x<1)$ 即可.