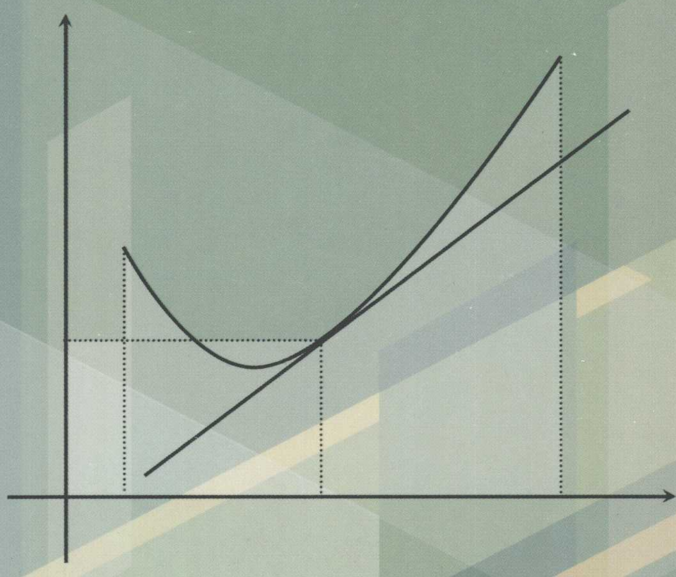
普通高等教育"十二五"规划教材

数学分析教程

(上册)

崔尚斌 编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

(上册)

崔尚斌　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是供综合性大学和师范院校数学类各专业本科一、二年级学生学习数学分析课程的一部教材，分上、中、下三册．本册为上册，讲授极限和一元函数的微分学，内容包括实数的性质、数列的极限、一元函数的极限和连续性、一元函数的导数及其应用、不定积分等．附录 A 介绍了实数的公理化定义．

本书对传统数学分析教材的编排做了一些与时俱进的改革，内容做了适当缩减和增补，除了如传统教材一样重视对基础知识和基本技巧的传授外，也增加了一些分析学的新内容．本书讲解十分清晰、浅显易懂，配有充足的例题和习题，并对数学分析各个组成部分的来龙去脉和历史发展有清楚并且引人入胜的介绍，不仅适合教师课堂讲授，也很适合学生自学使用．

图书在版编目（CIP）数据

数学分析教程．上册/崔尚斌编著．—北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036805-8
Ⅰ．①数… Ⅱ．①崔… Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ．①O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 037801 号

责任编辑：张中兴／责任校对：邹慧卿
责任印制：阎　磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷
科学出版社发行　　各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第　一　版　　开本：720×1000 B5
2013 年 3 月第一次印刷　　印张：19 1/2
字数：382 000

定价：45.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前言

数学分析是大学数学系最基础和最重要的一门课程. 数学专业的许多后续课程, 如常微分方程、复变函数、微分几何、偏微分方程 (又名数学物理方程)、实变函数、泛函分析、概率论等, 都是在数学分析课程的基础上展开的. 因此, 学好这门课程, 对于数学类各专业的每一位学生, 都是十分重要的.

本书是作者根据多年讲授数学分析课程的经验, 在对部分讲稿进行整理和扩充的基础上编写而成的. 读者对象主要为综合性大学数学类各专业的本科生, 也适用于师范院校、工科院校数学类各专业的本科生. 此外, 也可用作运用微积分知识比较多的其他专业, 如力学、理论物理、气象等专业的本科生学习数学分析和高等数学课程的参考书. 考虑到我国改革开放 30 多年来中学教育水平已大幅度提高, 因而大学新生都已有相当好的中学数学知识, 我们对传统数学分析教材的编排做了一些改革, 内容做了适当缩减和增补. 对此做以下说明:

对实数和极限理论, 本书不像传统教材那样采取对极限理论在课程一开始仅做初步的介绍, 等到学习完一元微积分的基本理论之后再详细讨论实数域的完备性进而更深入地讨论极限理论这样分两步走的方式处理, 而是采取了开门见山、一步到位的方式, 在课程一开始就直接讨论实数的基本性质, 以学生比较容易接受的方式引出刻画实数域完备性的戴德金原理, 并从这一原理出发推导出确界原理, 然后在紧接着的一章全面透彻地讲述数列的极限理论. 作者的授课经验表明, 这样讲授实数和极限理论不仅能够被现今的大一新生毫无困难地接受, 而且他们也非常乐意我们这么做. 这样处理教材的一个优点是既保证了本课程理论体系的连贯性, 又节省了授课时间.

和传统数学分析教材相比较, 本书增加了一些新的内容, 如函数序列和函数级数的积分平均收敛、魏尔斯特拉斯逼近定理和阿尔采拉–阿斯考利定理、零测集的定义和函数黎曼可积的勒贝格定理、矩阵范数和可逆矩阵的摄动定理、若尔当测度理论、函数的磨光与单位分解定理、向量场分解为无源场与无旋场之和的亥姆霍兹分解定理、微分形式和高维斯托克斯公式等. 增加这些内容不仅是为了使本课程的理论体系更加完整、能够更好地为后续课程服务, 也是为了使本课程的教学工作能够更加贴近当代数学的发展. 根据我们的授课经验, 这样的处理虽然使得本书相对于传统数学分析教材显得内容更加深入了一些, 但对现在的大学一、二年级本科生来说却都是能够不太困难地接受的. 事实上, 促成作者编写本书的一个主要动因是: 我们在近几年的

教学过程中, 发现所使用的一些传统数学分析教材内容稍浅了一些, 以至于许多学生都感觉“吃不饱”. 这是作者经历 30 多年学数学和教数学的生涯发现的一个颇感意外的变化. 记得在我们读大学的那个年代 (1978~1982), 数学分析是我们感觉最困难的课程之一. 参加工作的前 10 年, 所教的学生也有和我们类似的认识. 然而现在的学生却普遍认为数学分析是最容易学的课程之一. 产生这种变化的原因, 显然是我国的中学教育水平现在已达到一个较高的水平. 基于这种情况, 我们认为适当增加数学分析课程的教学内容, 适当提高这门课程的难度, 是很有必要的. 当然, 这样的思想并不是由我们首创的, 因为国内有一些教材早已经这样做了.

传统的数学分析教材一般都有许多应用性的例子, 但是本书在这方面的内容要更多一些. 这样做的目的不仅是为了激发学生的学习兴趣, 更是为了使他们对所学知识的应用有尽可能多的了解, 形成一个正确的科学认知观. 本书中对数学分析这门课程各个组成部分的来龙去脉和历史发展所做的介绍, 基本都以莫里斯・克莱因所著的《古今数学思想》和李文林主编的《数学珍宝 —— 历史文献精选》为依据.

限于作者的水平, 本书中的疏漏和不足在所难免. 恳请读者对此给予谅解, 并随时批评指正. 作者谨在此致以诚挚的感谢.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (项目批准号: 11171357) 和中山大学数计学院 985 学科建设项目经费的支持, 特此说明并对中山大学数学与计算机学院的领导表示感谢. 本书的有些写作思想受到了作者在授课过程中与学生所做课间讨论的启发, 作者为此向学生们表示感谢. 博士生蔡永丽帮助作者绘制了许多插图, 作者也予以感谢. 另外, 本书的责任编辑张中兴同志不仅为本书的出版做了很多工作, 而且建议我们对插图做了很多改进和增补, 这使本书的质量得到了明显的提高. 作者为此向张编辑表示感谢.

崔尚斌

2012 年 12 月于中山大学

目　录

第 1 章 实数域和初等函数

数学分析的研究对象是单个或多个实变量的函数. 所谓实变量, 是指在实数的某个集合上变化的变量. 因此, 要很好地研究这样的函数, 就必须对实数的性质有好的了解. 实数的性质包括代数性质和分析性质. 前者指实数的加、减、乘、除四则运算以及由这些运算演化而来的诸多性质; 后者则是指由实数与直线上的点可以建立一一对应关系这一特性所决定的实数的各种性质, 包括实数的大小比较、实数系的完备性以及由这些性质演化而来的其他诸多性质. 作为全书的开篇, 本章对实数的这些性质尤其是分析性质做最基本的讨论, 并在此基础上, 对几个基本初等函数的定义及其基本性质做一些回顾, 以便为后面各章内容的展开做一个严密的铺垫.

1.1 实数的运算与序

先介绍几个记号, 它们将在全书中一直使用.

R: 由全体实数组成的集合.

Q: 由全体有理数组成的集合.

Z: 由全体整数组成的集合, 即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.

$\mathbf{Z}_+$: 由全体非负整数组成的集合, 即 $\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$.

N: 由全体自然数亦即正整数组成的集合, 即 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$.

再介绍一个以后经常使用的逻辑符号 $\forall$, 称为**全称量词**. 这个符号不能单独使用, 必须和一个集合中元素的变元符号及其所取范围的数学表述合起来使用, 其意义是指对跟在它后面的所有那些元素中的任意一个. 例如, “$\forall x\in\mathbf{R}$” 是指 “对任意的实数 x”; “$\forall x\geqslant 0$” 是指 “对任意的非负实数 x”; “$\forall x,y\in\mathbf{R}$” 则是指 “对任意的实数 x 和任意的实数 y”; 等. 即使是像 “$\forall x\in\mathbf{R}$” 这样的表述, 显然也没有完整的意义, 它必须和一个与跟在符号 $\forall$ 后面的变元相关的命题结合使用. 例如, “$\forall a,b\in\mathbf{R}$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$” 才是一个完整的命题, 其意思是指 “对任意实数 a 和 b 都成立 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$”. 为了突出命题的主体部分, 经常把如 “$\forall x\in\mathbf{R}$” 等限定性

的表述写在命题的后半部分. 因此, 当把 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 作为一个公式对待时, 一般都写成下述形式:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad \forall a,b\in\mathbf{R}.$$

在初等数学中已经介绍过实数的概念. 本节对实数的运算与比较大小的基本规律做一简单的回顾.

实数的最基本性质是它们之间可以进行加、减、乘、除四则运算, 这其中, 减法是加法的逆运算, 除法是乘法的逆运算. 因此加法和乘法是最基本的两种运算. 实数的加法运算满足下列规律.

(1) 加法结合律: $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$.

(2) 加法交换律: $x+y=y+x$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

(3) 加法运算有单位元 0: $x+0=0+x=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4) 加法运算有逆运算减法, 或等价地说, 每个实数 x 都关于加法运算有逆元 $-x$ (x 的相反数): $x+(-x)=(-x)+x=0$; 而减法定义为 $x-y=x+(-y)$.

乘法运算也满足类似的规律.

(5) 乘法结合律: $(xy)z=x(yz)$, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$.

(6) 乘法交换律: $xy=yx$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

(7) 乘法运算有单位元 1: $x1=1x=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(8) 乘法运算有逆运算除法, 或等价地说, 每个非零实数 x 都关于乘法运算有逆元 x^{-1} (x 的倒数): $xx^{-1}=x^{-1}x=1$; 而除法定义为 $x/y=xy^{-1}$ $(y\neq 0)$.

最后, 加法和乘法之间由下述运算规律相联系.

(9) 乘法对加法的分配律: $x(y+z)=xy+xz$, $(x+y)z=xz+yz$, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$.

对于一个至少含两个元素的集合, 如果它的元素间有两种运算, 并且这两种运算满足以上规律 (1)~(9), 就称该集合关于这两种运算构成一个**域**. 所以, 全体实数关于加法和乘法运算构成一个域, 称为**实数域**.

必须说明, 除了实数域, 还有很多其他的域, 如有理数域、复数域、二次数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})=\{a+b\sqrt{p}: a,b$ 是有理数$\}$ (其中, p 是无平方因子且不等于 1 的非零整数)、模素数 p 剩余类域 $\mathbf{Z}_p$① 以及在密码通讯中起重要作用的更一般的伽罗瓦域等. 不过, 本书只在实数域上讨论问题. 所以不考虑除实数域和有理数域之外的其他域.

实数的另一基本性质是任意两个实数都可以比较大小. 实数的比较大小关系有四种, 即小于或等于 "$\leqslant$", 严格小于 "$<$", 大于或等于 "$\geqslant$", 以及严格大于 "$>$". 由于这四种关系是可以互相定义的, 所以只需讨论其中一种. 考虑小于或等于关系 "$\leqslant$". 熟知实数的这种大小比较关系有下列性质.

① $\mathbf{Z}_p$ 由全体整数模 p 的剩余类 $[0]_p$, $[1]_p$, $[2]_p$, $\cdots$, $[p-1]_p$ 组成, 这里对每个 $0\leqslant m\leqslant p-1$, $[m]_p$ 表示由全体除以 p 后余数为 m 的整数组成的集合. 加法和乘法分别定义为 $[m]_p+[n]_p=[m+n]_p$, $[m]_p[n]_p=[mn]_p$, 其中 $[m+n]_p$ 和 $[mn]_p$ 分别表示整数 $m+n$ 和 mn 所在的剩余类.

(10) 自反性：$x \leqslant x, \forall x \in \mathbf{R}$.

(11) 反对称性：如果 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 则必有 $x = y$.

(12) 传递性：如果 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$.

(13) 全序性：对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 两个关系 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 中至少有一个关系成立, 即任意两个实数都可比较大小.

(14) 与加法的相容性：如果 $x \leqslant y$, 那么 $x + z \leqslant y + z, \forall z \in \mathbf{R}$.

(15) 与乘法的相容性：如果 $x \leqslant y$, 那么 $xz \leqslant yz, \forall z \in \mathbf{R}_+ = \{z \in \mathbf{R}, 0 \leqslant z\}$.

一般地, 对于一个非空集合, 如果在它的元素间定义了一种满足上述条件 (10)~(12) 的关系 "$\leqslant$", 就称该集合关于这种关系 "$\leqslant$" 构成一个**有序集**; 如果进一步这种关系还满足上述条件 (13), 则称为**全序集**. 如果一个域是一个全序集, 且序关系还满足与加法及乘法的相容性条件 (14) 和 (15), 即上述条件 (10)~(15) 都满足, 就称为**有序域**. 因此, 实数域是一个有序域. 注意全体有理数也关于加法和乘法构成一个域, 并且关于数的大小比较关系也构成一个有序域. 但是全体复数构成的域不是有序域.

实数之间能够进行大小比较是实数的一个十分重要的性质, 其重要性不亚于四则运算. 实数之所以能够在人们的现实生活与科学研究中被广泛地应用, 一个重要原因在于实数之间能够进行大小比较, 也就是说, 许多实数的应用问题涉及的正是实数之间的大小比较. 在分析数学领域, 经常需要应用实数的大小比较对一些难以准确掌握其精确值、或者不必要准确掌握其精确值的量进行放大或缩小, 这样的过程叫做**估计**. 做估计所得到的数量关系就是**不等式**. 所以不等式的建立在分析数学领域具有十分重要的作用. 一个常用的不等式是下述**平均值不等式**：对任意实数 $x, y \geqslant 0$ 都成立

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x + y), \tag{1.1.1}$$

等号成立当且仅当 $x = y$. 更一般地, 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$ 都成立

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \tag{1.1.2}$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. 这两个不等式已经在初等数学中学习过, 所以这里略去它们的证明. 下面给出另一个不等式的例子.

例 1　设 p 是不等于 1 的正数. 证明：对于任意正实数 a, b 成立下列不等式：

$$(a + b)^p < a^p + b^p, \quad 当\ p < 1, \tag{1.1.3}$$

$$(a + b)^p > a^p + b^p, \quad 当\ p > 1. \tag{1.1.4}$$

证明　先设 $0 < p < 1$. 记 $c = a + b$. 则 $0 < \dfrac{a}{c} < 1$ 且 $0 < \dfrac{b}{c} < 1$. 于是由 $0 < p < 1$ 有 $\dfrac{a}{c} < \left(\dfrac{a}{c}\right)^p$ 且 $\dfrac{b}{c} < \left(\dfrac{b}{c}\right)^p$. 因此

$$1=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}<\left(\frac{a}{c}\right)^p+\left(\frac{a}{c}\right)^p=\frac{a^p+b^p}{c^p},$$

由此立得 (1.1.3). (1.1.4) 的证明类似. 证毕.

实数 x 的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{当 } x<0. \end{cases}$$

因此, 恒成立 $|x|\geqslant 0$, 而且显然地, $|x|=0$ 当且仅当 $x=0$. 下面的**三角不等式**是一个常用的不等式

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,\quad \forall x,y\in\mathbf{R}. \tag{1.1.5}$$

这个不等式的一个等价形式是

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbf{R}. \tag{1.1.6}$$

关于实数的四则运算、实数的大小比较以及实数的绝对值的各种运算规律和基本性质在初等数学中已经详细地讨论过, 这里不再一一回顾. 以后如果需要应用时将直接应用而不做更多说明.

最后再引进一些记号. 给定两个实数 a 和 b, 设 $a<b$. 记

$$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}:a<x<b\},$$
$$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}:a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}:a<x\leqslant b\},$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}:a\leqslant x<b\},$$

它们分别称为**开区间**、**闭区间**、**左开右闭区间**和**左闭右开区间**. 引进一个符号 $+\infty$, 称为**正无穷大**, 它是一个假想的数, 表示 “比所有的正实数都大” 的量; 同样用 $-\infty$ 表示**负无穷大**, 它是另一个假想的数, 表示 “比所有的负实数都小” 的量. 因此,

$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}:x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}:x\leqslant b\},$$

等等. 特别地, 有 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.

习 题 1.1

1. 证明不等式:

(1) 设 $a<b<c$, 则 $|b|<\max\{|a|,|c|\}$;

(2) 设 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$, 且 $b>0$, $d>0$, 则 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$;

(3) 设 $p>0$, 则 $|a+b|^p \leqslant 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\}$;

(4) 对任意实数 a, b 都成立

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

2. 解不等式:

(1) $|x-5|<10$;　(2) $|2x+3| \geqslant 4$;

(3) $|x-1|>|x+2|$;　(4) $|2x+1| \leqslant |x-2|$;

(5) $|x-1|+|x+2| \leqslant 3$;　(6) $|3x-2| \geqslant |x-2|+1$;

(7) $||x-2|-|x+2||<2$;　(8) $|(x+2)(x-1)| \geqslant 1$.

3. 证明:

(1) 当 $||x|-2| \leqslant 1$ 时, $\max\{|x+1|, |x-1|\} \leqslant 4$;

(2) 当 $|x-1| \leqslant 1$ 时, $|x^2-1| \leqslant 3|x-1|$;

(3) 当 $0<x<1$ 时, $\max\left\{\dfrac{1}{x^p}, \dfrac{1}{(1-x)^p}\right\} \geqslant 2^p$, 这里 $p>0$.

4. 用 n 表示任意自然数. 证明下列不等式:

(1) $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \leqslant n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$;

(2) $(1+x)^n \geqslant 1+nx \ (x>-1)$;

(3) $(1-x)^n \leqslant 1-nx+\dfrac{1}{2}n(n-1)x^2 \ (0<x<1)$;

(4) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}<2$;

(5) $\dfrac{1}{3}n^3<1^2+2^2+\cdots+n^2<\dfrac{1}{3}(n+1)^3$;

(6) $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

5. 用分拆或适当组合等方法证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\dfrac{1}{2}$;

(2) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2$;

(3) $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

(4) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

6. 设 m 和 n 都是正整数且 $m<n$. 证明: 对任意实数 $x>-1$, $x \neq 0$ 成立

$$(1+x)^{\frac{m}{n}}<1+\frac{m}{n}x.$$

7. 已知 $\left(\dfrac{12}{11}\right)^{10} \approx 2.3872$. 证明: 当 $n \geqslant 11$ 时 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

1.2 实数域的完备性

1.2.1 完备性的含义

实数的一个重要特性是全体实数可以和直线上的所有点建立一一对应关系. 正是由于实数的这一重要特性, 它才能够在几何上刻画如长度、夹角、面积、体积等量, 在物理上刻画如时间、重量、温度、密度、电荷量、电流强度等各种各样可以连续地变化的量, 因为测量这些量的大小的问题都可以借助于一定的数学手段或一定的物理仪器转化为测量某些线段的长度的问题. 例如, 测量重量可以借助于杆秤, 测量温度可以使用温度计, 测量时间可以采用钟表等. 这些仪器都把所测量的大小的问题化归为测量一定线段 (或圆周上的弧线段 —— 它可通过把弧线"拉直"的方法化归为直线段) 的长度的问题. 实数的这一特性使其在人们的实际生活和科学研究中具有十分广泛的应用.

人们最初认识到实数和直线上的点可以建立一一对应关系这一特性, 其实是出于一种误解; 实际上最初人们是认为全体有理数可以和直线上的所有点建立一一对应关系. 这一认识是与数的概念的形成过程相关并由古代人们对自然世界的认识水平所决定的. 人们对数的概念的形成过程为

$$\boxed{\text{自然数 (正整数)}} \to \boxed{\text{分数}} \to \boxed{\text{有理数 (正、负分数和零)}} \to \boxed{\text{实数}} \to \boxed{\text{复数}}.$$

可见人们最先认识到的数是自然数, 它是刻画可以一个一个地数"个数"的量的数学概念. 然后有分数的概念, 这个概念是对自然数概念的扩充, 目的是用来描述那些不能整除而有"零头"的量. 然后有零和负数的概念, 而引入零和负数的主要目的是为了在数学上使减法运算通行无阻. 在 2500 年前的古希腊时期, 人们所认识到的最广泛的数, 是正分数、负分数和零的总合, 即现在人们所说的有理数. 那时的人们认为, 所有这样的数便足够刻画自然界中存在的各种各样需要进行运算和比较大小的量. 原因在于, 那时的人们朴素地认为, 自然界中的所有物质都是由称为"原子"的最小单位构成的. 于是, 如果要度量某个线段的长度, 只要计算出这个线段是由多少个"原子"构成, 再计算出用于作单位长度的那条线段中所含"原子"的个数, 然后把二者相除, 得到的分数便是所需度量的线段的长度. 由于对任何物质都可类似地处理, 所以, 全体有理数便足够刻画自然界中各种各样的数量.

但实际上上述认识是错误的, 即全体有理数并不能与直线上的所有点建立一一对应关系. 原因在于, 有许多线段, 它们的长度是不能用有理数来表示的. 最简单的莫过于单位正方形的对角线长度了. 应用勾股定理可知, 单位正方形的对角线的长度是 $\sqrt{2}$, 而 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 证明如下: 反证假设 $\sqrt{2}$ 是有理数. 则存在互素 (即没有大于 1 的公因子) 的两个正整数 p 和 q, 使得 $\sqrt{2}=p/q$. 由此得 $2=p^2/q^2$, 进而 $p^2=2q^2$, 因此 2 能够整除 p^2, 从而 2 必能整除 p, 即 $p=2m$, 其中 m 为正整数. 这样就有

$4m^2 = 2q^2$, 从而 $q^2 = 2m^2$, 因此又推知 2 能够整除 q. 这意味着 p 与 q 有公因子 2, 这与最初的假设相矛盾. 所以 $\sqrt{2}$ 不可能是有理数.

由于全体有理数不能与直线上的所有点建立一一对应关系, 即这种对应在直线上留有空隙, 从而不能用有理数来刻画所有的数量, 这就迫使人们进一步扩充数的概念, 这样就形成了实数的概念. 因此, 实数是由扩充有理数得来, 它区别于有理数的本质特性是全体实数可以填充直线上的所有点, 而不会在直线上留有空隙. 实数的这一特性称为实数域的**完备性**, 也称实数系的**连续性**或**连通性**.

现在要讨论的问题是实数域的完备性如何用严谨的数学语言来表述. 因为, 只有给出了这一特性的严谨的数学表述, 才有可能把它作为正确推理的基础来应用. 这个问题曾经长期地被人们忽视. 直到 19 世纪后半叶, 才由德国数学家戴德金 (Richard Dedekind, 1831~1916) 注意到并经过多年苦心的研究成功地解决. 戴德金认识到, 由于实数是和直线上的点一一对应的, 所以刻画实数域的完备性的问题等同于刻画直线上的点没有空隙即直线的连续性的问题. 戴德金的方法是把直线分成左右两部分, 进而把 "直线上没有空隙" 这一形象的表述转化为 "或者左边的部分有最大的点, 或者右边的部分有最小的点", 即 "一定存在一个分点" 这样数学化的表述. 形象地说就是如果拿一把刀切一条直线, 则刀刃必会触到一个点. 注意对于有理数系, 当作类似的分割时, 会出现 "左边的部分没有最大的点, 右边的部分没有最小的点", 即 (在有理数系中) 没有分点的情况.

下面就给出由戴德金定义的实数域完备性的数学表述.

1.2.2 戴德金原理

先引进下列概念.

定义 1.2.1　设 S 是一个非空的实数集. 如果存在 $a \in S$ 使对任意 $x \in S$ 都成立 $x \leqslant a$, 则称 a 为 S 中的**最大数**, 记作 $a = \max S$. 类似地, 如果存在 $b \in S$ 使对任意 $x \in S$ 都成立 $x \geqslant b$, 则称 b 为 S 中的**最小数**, 记作 $b = \min S$.

定义 1.2.2　设 A, B 是实数域 $\mathbf{R}$ 的两个子集, 它们满足以下三个条件.

(1) 不空：$A \neq \varnothing$ 且 $B \neq \varnothing$;

(2) 不漏：$A \cup B = \mathbf{R}$;

(3) 不乱：对 $\forall x \in A$ 和 $\forall y \in B$ 都成立 $x < y$.

则称 (A, B) 为实数域的一个**戴德金分划**, 并称 A 为此分划的**下类**, B 称为**上类**.

例 1　以下给出的 (A, B) 都是实数域的戴德金分划:

(1) $A = (-\infty, 1)$, $B = [1, \infty)$;

(2) $A = (-\infty, 1]$, $B = (1, \infty)$;

(3) $A = (-\infty, 0] \cup \{x > 0 : x^2 < 2\}$, $B = \{x > 0 : x^2 \geqslant 2\}$.

(4) $A = (-\infty, 0] \cup \{x > 0 : x^2 \leqslant 2\}$, $B = \{x > 0 : x^2 > 2\}$.

从以上例子看到, 假如 (A,B) 是实数域的一个戴德金分划, 那么或者下类 A 中有最大数, 或者上类 B 中有最小数. 这个事实其实对实数域的任意一个戴德金分划都成立, 即成立

戴德金原理 (表述 1)　设 (A,B) 是实数域的一个戴德金分划. 则或者下类 A 中有最大数, 或者上类 B 中有最小数.

这个原理也可等价地表述为

戴德金原理 (表述 2)　设 (A,B) 是实数域的一个戴德金分划. 则存在实数 c 使成立:

$$x \leqslant c \leqslant y, \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B. \tag{1.2.1}$$

满足条件 (1.2.1) 的实数 c 称为分划 (A,B) 的**分点**. 不难看出, 分点是唯一的 (见本节习题 5).

上述两种表述的等价性的证明是简单的. 先设表述 1 成立. 如果下类 A 中有最大数, 记这个最大数为 c, 则有

$$x \leqslant c < y, \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B,$$

这个关系式蕴涵着条件 (1.2.1); 如果上类 B 中有最小数, 记这个最小数为 c, 则有

$$x < c \leqslant y, \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B,$$

这个关系式同样蕴涵着条件 (1.2.1). 这就证明了表述 1 $\Rightarrow$ 表述 2. 反过来设表述 2 成立. 如果 c 是分划 (A,B) 的分点, 那么根据分划的性质 (2), 或者 $c \in A$, 或者 $c \in B$. 在前一种情况下, c 是下类 A 中的最大数; 在后一种情况下, c 是上类 B 中的最小数. 因此, 分点 c 的存在性就保证了, 或者下类 A 中有最大数, 或者上类 B 中有最小数. 这就证明了表述 2 $\Rightarrow$ 表述 1.

采用实数是 "整数以及整数与有限或无限的十进制小数的和" 的朴素定义, 可以给出戴德金原理 (表述 2) 的证明如下.

设 (A,B) 是实数系的一个戴德金分划. 由于 $A \neq \varnothing$, 必存在实数 $a \in A$. a 作为实数, 或者本身是一个整数, 或者是整数与一个有限或无限的十进制小数的和. 在前一种情况下取 $m = a$; 在后一种情况下去掉 a 的小数部分, 记所得整数为 m. 显然这样选取的整数 m 满足 $m \leqslant a$, 因此根据分划定义中的条件 (3), 应有 $m \in A$. 这就证明了下类 A 必含有整数. 同理可证明上类 B 也含有整数.

由于全体含于下类 A 的整数有上界 (任何含于上类 B 的整数都是它们的上界), 所以在所有含于 A 的整数中, 必有一个最大的整数, 记作 m_0. 由于 $m_0+1 \notin A$, 所以 $m_0+1 \in B$. 显然 m_0+1 是全体含于上类 B 的整数中的最小者.

如果 m_0 是 A 中的最大数或者 m_0+1 是 B 中的最小数, 那么令 $c = m_0$ 或 $c = m_0+1$, 则 c 是分划 (A,B) 的分点. 下设 m_0 不是 A 中的最大数, 并且 m_0+1 也不是 B 中的最小数.