高等学校教学参考书

数学分析

上册

江泽坚　吴智泉　周光亚　合编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

数学分析

上册

江泽坚　吴智泉　周光亚　合编

人民教育出版社

本书原系编者为吉林大学数学系编写的教材。全书分上下二册出版。上册包括函数与极限，微分学，不定积分，定积分学，数值级数和函数级数等六章。

本书上册第一版于 1960 年 8 月初次出书。现由编者作了个别的小修订，重新排印，可供综合大学和高等师范院校数学专业作为教学参考书之用。

数 学 分 析

上 册

江泽坚 吴智泉 周光亚 合编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·066 开本 850×1168 1/32 印张 11 12/16

字数 280,000 印数 67,001—117,000 定价(5)￥1.10

1960 年 8 月第 1 版 1964 年 6 月第 2 版 1978 年 3 月北京第 7 次印刷

目　　录

第一章　函数与极限

§1. 变　量

人们在研究实际问题时，常常要遇到各种各样的变量。例如在研究物体的自由下落时，要考虑经过的时间，下落的速度，下落的高度；在研究气体的加热时，要考虑气体的温度、压力、体积等等。这些量，有的是温度，有的是时间，有的是速度，也就是说是互不相同的。但是如果舍弃这些量的各种物理的属性，就可以看出在这些互不相同的量之间，有一点共同之处。那就是，它们都是通过一系列的数值来表现的。这些数值按照某种相互关系，组成一个整体。例如加热一个容积为 5 公升的密闭容器中的气体，使温度从 10°C 增加到 100°C，则温度这个量就是通过从 10 到 100 这些数来表现的。而且是从 10 逐渐增加到 100，即代表不同时刻的温度的这些数，是按一定的相互关系结合起来的。各种不同的物理量之间的这种共同点，就是抽象的数学概念——变量的来源。数学分析中所说的变量，就是指的按一定的先后关系结合起来的由一些数所组成的一个整体。值得强调指出的是：构成一个变量的那些数，是可以有重复的。甚至整个变量就只一个数在重复都是可以的。为什么呢？这只要看看各种具体的变量就可以理解。例如上例中气体的体积，这也是一个变量，但是它自始至终都是通过唯一的一个数值 5 来描写的。这时变量表现为一种不变的形式，这是变量的一种特殊情况。这种“不变的”变量我们特别称之为**常量**。

确定一个变量时所使用的数值组成的集合叫做这个变量的变域。例如上例中温度这个变量的值域是从 10 到 100 之间的全体的数所作成的集合，常量的变域就只有一个数。了解变域对研究变量自然是很重要的，但是了解了变域还不等于了解了变量，因为要了解变量，还要了解这些数是按什么先后关系结合起来的。这个先后关系，就是所谓这个变量的变化过程。

§2. 实数系

每一个有最粗浅的数学知识的人，都不会对数的概念感到陌生。这里的所谓数，包括整数，分数和象$\sqrt{2}$，π 这样的无理数。正整数 1，2，3，…的概念来源于数数，是表示事物的个数的，是一种抽象的数学概念。比如以“3”为例。在现实世界中，只有“三个人”、“三头牛”、“三本书”、“三个国家”等“具体的 3”，并不存在不和任何具体事物联系的一般的抽象的“3”。正整数“3”，就是从这些具体的“3”中抽象出来的。有理数是两个整数之比(做为分母的不能为零)，代表整体与部分的某种状态，可以表达可通约量之间的关系。由于确实存在不可通约的量（例如正方形的对角线的长度和每边的长度不可通约，圆的周长和直径的长度不可通约)，因而又导出$\sqrt{2}$，π 这样的无理数来。不论是有理数还是无理数，都称为实数。全体实数构成一数集，称之为**实数系**。正方形对角线的长度，和正方形的边长是不可通约的，即是说以正方形的边长为测量的单位时，对角线的长度$\sqrt{2}$不是一个分数。这个事实的证明，大部分分析教程上都是有的，比如菲赫金哥尔茨（Г.М.фихтенгольц)，微积分学教程，一卷一分册。

作为今后处理有关数的问题的一个具体模型，我们来着重解释一下把数看成对线段长度进行度量的结果的观点。设我们取定了一条水平的向两端无限延长的直线（参看图 1)。在其上取定一

点 O,作为测量的起点,规定向右的方向为直线的正方向。又在 O 的右边随便取定一点 P。把线段 OP 的长度看成单位长度。令 O 点和实数系中的零对应，把 P 点和实数系中的 1 对应。对于直线上一般的点 Q,以线段 OP 为单位,去度量线段 OQ。如果线段 OQ 的长度是 a(即 a 个单位长)，则视 Q 在 O 之左还是右，而令其与实数中的 $-a$ 或 a 相对应。由于在 O 的同侧的两个不同的点 Q_1 和 Q_2 所截取的线段 OQ_1,OQ_2 的长度是不同的，所以对应的实数

图　1

也不相同。显然，反过来对于任意给定的实数 x，我们也可以视 x 之为正或负,而在直线上 O 之右或左找到与之对应的点。因此,经过这样的处理以后，我们事实上已经建立了直线上的点和全部实数之间的一一对应关系。和 OP 线段可通约的那些线段的端点对应的是有理数。和其余的以 O 为一个端点的线段的另一端点对应的是无理数。此外，如果 $x<y$，则和它们对应的点 P_x 就在 P_y 的左面，反过来，如果点 P_x 在点 P_y 的左面,则 x 也就小于 y。所以这个对应还保全了二者的秩序关系。这样的和实数系建立了一一对应关系的直线，称为**数直线**。以后我们将不区别实数与数直线上的点。

为了今后引用的方便,我们现在把有关数的基本事实中,比较突出的几点,列成下列三款。

一、我们约定称正整数为**自然数**。全体自然数，可以按其大小(从小到大地)排列起来。自然数中有一个最小的，就是 1,是排头;自然数中没有最大的,所以没有排尾。又不论 ε 和 M 是两个怎样的正实数,总可找到自然数 N,使 $N\varepsilon>M$。

二、全体整数(正的、负的以及 0)和分数，统称之为**有理数**。有理数的和、差、积、商仍为有理数(当然 0 不准用作除数)。全体有理数的一个重要性质是**稠密性**；即任何两有理数之间还有第三个有理数(例如它们的算术平均值就是)。于是也就知道任意两有理数之间都有无穷多个有理数(因为只要逐次重复取算术平均值的办法，要多少就可找出多少来)。有理数的这种稠密性的几何形象就是，在数直线上的任何线段上都有有理点(和有理数对应的点)。

三、自然数在数直线上的分布是很稀的。有理数则处处稠密。但是仍然有空隙(因为确实存在无理数)。全体实数都和数直线上的点一一对应，所以这种空隙不再存在了。

实数系的这种“没有空隙”的性质，在理论上有很重要的意义。许多重要事实的成立，都是以它为保证的。为了使得在引用这个重要性质时，能更加确切，我们把它表述成为一条公理。

公理 任何非空的上方有界的数集，都存在最小上界。

所谓数集，是指由一些实数所组成的集合。非空是说这个集合中确实有数。所谓上方有界，就是表示有一常数 M，使所述集合中的每一个数都不大于 M；从几何上来看，这就是所述集合中的数，都分布在M的左边。这样的M就叫做这个数集的上界。所谓存在最小上界，就是说有那样一个实数 μ 存在，它本身是所述数集的上界；但任何比 μ 再小的数，就不再是所述数集的上界了。μ 是数集E的最小上界，以后用

$$\mu=\sup E$$

表示。于是 $\mu=\sup E$ 相当于：

1) 对于E中每一个 x，都有 $x\leqslant\mu$。

2) 对于任意小的正数 ε，都有某一属于E的 x_0，使 $x_0>\mu-\varepsilon$。

对于数集也可定义所谓下方有界，即有 m，使对所述数集中

的每一x，都有 $m\leqslant x$。于是又有最大下界的概念。集合 E 的最大下界記为：$\inf E$。$\nu=\inf E$ 相当于

1′) 对 E 中每一个 x，都有 $x\geqslant\nu$。

2′) 对于任意小的正数 ε，都有属于 E 的点 x_0，使 $x_0<\nu+\varepsilon$。

命题 1. 任何下方有界的非空数集，都有最大下界。

証明：設 E 是一非空的下方有界数集，E^- 表示把 E 中所有的数都变号而得到的数集，則 E^- 是非空的上方有界数集(因为如果 m 是 E 的一个下界，則 $-m$ 就是 E^- 的一个上界，所以 E^- 是上方有界的)，根据公理，应存在最小上界，設 $\mu=\sup E^-$。令 $\nu=-\mu$。則 ν 就是 E 的最大下界。事实上，对任何属于 E 的 x，$-x$ 属于 E^-，因而 $-x\leqslant\mu$；$x\geqslant-\mu=\nu$；卽 ν 为一下界。又如果 $\varepsilon>0$。則由 2)，在 E^- 中应有某一 $y_0>\mu-\varepsilon$。这个 y_0 应該是由 E 中某一 x_0 变号而来，卽 $y_0=-x_0$。于是

$$x_0=-y_0<-\mu+\varepsilon=\nu+\varepsilon。$$

这証明 2′) 也滿足。

以后为了說話方便起見，約定用 $x\in E$ 表示 x 是属于 E 的。就讀成“x 属于 E”。而 x 不属于 E，則用 $x\bar{\in}E$ 来表示。

今后我們将經常引用所謂区間的概念，对于給定的常数 a 和 b，且 $a<b$，所謂閉区間 $[a, b]$ 就是指的由条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 所规定的数集，也就是全体不小于 a，不大于 b 的实数所作成的数集。如果把它看成数直綫上的一个点集，則恰好是一段带有端点的綫段。同样开区間 (a, b) 定义为由条件 $a<x<b$ 所規定的数集，它的几何形象是一个不带端点的綫段。其他区間 $[a, b)$，$(a, b]$，$(a,+\infty)$，$(-\infty, b)$ 等分别由不等式：

$$a\leqslant x<b,\ a<x\leqslant b,\ a<x<+\infty,\ -\infty<x<b$$

等定义。$(a, +\infty)$，$(-\infty, b)$ 是二半直綫。

抽象的数，并不是变量。虽然变量都是通过数来表現的。但

是数和变量是两个不同的概念。实数 a 的絕对值，我們用 $|a|$ 表示，当 $a>0$ 时，它等于 a；当 $a<0$ 时，它等于 $-a$；当 $a=0$，它等于 0，即

$$|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0, \end{cases}$$

于是 $|a|$ 总是非負的，$|a|=0$ 在且只在 $a=0$ 时成立。$|a|$ 表示的是 a 点到原点(O 点)的距离。从絕对值的定义，可以直接证明对于任意的 a 和 b，恒有下述三角不等式成立:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|。$$

从而也就有

$$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|,$$

其中 a, b, c 都是任意的(证明見一般高中代数方面的教科书。

§3. 函数

现实世界的事物，不是互不相干的，而是互相联系着的。例如在 §1 所举的加热气体的例中，气体的溫度、压力和体积是三个不同的变量，但是它們并不是互相孤立的变量，而是以确定的規律互相联系着的。事实上，根据著名的馬略特-波义耳定律，如果用 T、P 和 V 分别表示气体的溫度、压力和体积的話，就有

$$T=kPV,$$

其中 k 是一常数。

作为函数概念的实际背景的，正是这些物理、力学等方面的定律。这是人們通过对自然現象的长期观察，而发現的变量与变量之間的內在联系的归納与总結。为了能更自然地引入函数这样一个极其重要的概念，再介紹几个例子。

例 1. 若在重力作用下，自由下落的物体下落了的距离为 s，經过的时間为 t，則它們的关系由公式

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

表出，其中 g 代表重力加速度。

例 2. 在边长为 1 的正方形的四角上，切去四个边长为 x 的小正方形（参看图 2）。然后作成一个高度为 x 的小盒子。令这个盒子的体积为 V，則显然

$$V=x(1-2x)^2。$$

現在設想 x 經历着一个从 0 开始到 $\frac{1}{2}$ 为止的增大过程，則 x 和 V 都是变量，上面的公式告訴我們在 x 由 0 增到 $\frac{1}{2}$ 的过程中，这两个变量之間的关系。

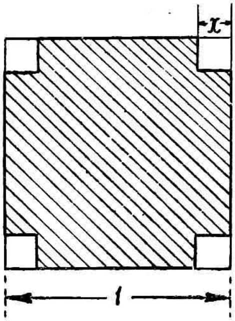


图 2

上述的三个例子，不仅說明参与同一过程的諸变量之間有某种确定的关系存在，而且这种关系都通过一个确定的公式表出。值得注意的是这种确定的表达公式的存在，并不是这种变量間的相互依存关系的必要因素，这只要看下面的例 3 就可知道了。

例 3. 考察从上午五点到六点之間，某輛电車上乘客的人数。这时时間和人数都是变量。而且二者之間是有确定的依存关系的，因为只指定了时間（例如五点廿分十秒），那么这个时候的乘客人数就是一个确定的整数。这和前面几个例子中，指定了 t 就能确定 s，指定了 x 就能确定 V 沒有什么不同，但是我們显然找不到一个确定的公式，来表达人数和时間之間的这种关系。

上面这些例子，不仅告訴我們参与同一过程的变量，是互相联系的。而且告訴我們，这种联系，最主要的是这样一个事实：只要

第一个变量取定了某一个确定的数值，那么第二个变量也就相应地取定某一个确定的数值。至于这两个数值之間的关系的表达，則既可以是有明显的公式的（如前三个例子），也可以是沒有明显的公式的（如例3）。数学分析中的函数概念，也就正是从这样一个事实中抽象出来的。

在§1中，我們就已指出，单純了解了一个变量的变域，还不等于已經了解了这个变量。在研究变量时，固然要了解这个变量是由那些数組成的，但是更主要的是要了解它是按什么規律来取这些数值的，也就是这些数值之間是怎样联系的。可是当我們研究的是变量与变量之間的依存关系时，情况就不是这样了。这时成为主要問題的，是一个变量的数值与另一个变量的数值之間的那种确定的对应关系，而組成同一变量的諸数值之間的关系，則相对地成了次要的問題。这就最終导致下述函数定义的引出。

定义1. 設 $\mathscr{D}$ 是給定的一个数集，f 是某一确定的对应关系。如果对于 $\mathscr{D}$ 中每一个 x，通过 f，都有唯一的一个（实数）y 与之对应（y 并不要求在 $\mathscr{D}$ 中），則我們就說 f 是 $\mathscr{D}$ 上的一个函数关系。如果 f 是 $\mathscr{D}$ 上的一个函数关系，x 遍取 $\mathscr{D}$ 中各数，則与之对应的 y 便构成一数集 $\mathscr{R}$。于是有了两个数集 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{R}$ 以及它們之間的一个对应关系 f，它滿足条件：

i) 对每一 $x\in\mathscr{D}$，在 $\mathscr{R}$ 中有且仅有一个 y 与之对应；

ii) 对 $\mathscr{R}$ 中每一 y，在 $\mathscr{D}$ 中也至少有一个 x 以 y 为它的对应点。

两个数集以及它們之間的滿足上述二条件的一个对应关系总称之为一个函数。$\mathscr{D}$ 称为**定义域**或**自变数域**，$\mathscr{R}$ 称为**值域**或**因变数域**，f 仍然称为**函数关系**。

根据上述定义，要决定一个函数，最主要的是定义域 $\mathscr{D}$ 和函数关系 f。因此今后只要給定了自变数域和函数关系，我們就認

为給定了函数。

設 $\mathscr{D}$, $\mathscr{R}$, f 确定一函数，$\mathscr{D}$ 是定义域，$\mathscr{R}$ 是值域，f 是函数关系。我們用 x 来代表 $\mathscr{D}$ 中任意的一个数，y 代表 $\mathscr{R}$ 中的数，如果 y 恰好是和 x 对应的那个数，則我們就把 y 記成 $f(x)$，表示 y 是 x 通过函数关系所对应出来的数。习惯上，我們总是把 x 看成定义域 $\mathscr{D}$ 里的数的代表，y 看作值域 $\mathscr{R}$ 里的数的代表，而把 $\mathscr{D}$, $\mathscr{R}$, f 三者所确定的函数說成"y 是 x 的函数"，并用記号

$$y=f(x) \quad (x\in \mathscr{D})$$

来表示。x 称为自变数，y 称为因变数。在这里，$y=f(x)$ 既用来表示 y 是 x 的函数，也用来表示 y 是与 $\mathscr{D}$ 中(确定的) x 对应的数，即所謂函数在 x 点的值。以后我們就会发現，这种記号上的混用，不仅不会造成混乱，而且还会带来許多行文上的方便。

对于給定的一个函数和給定的一个定点，如果这个点属于这个函数的定义域，則我們就說这个函数在这一点是**有定义的**。同样，如果点集 A 的每一个点都属于函数的定义域，則說这个函数**在这个点集 A 上有定义**。

因为函数关系也可以用 g, h, F, φ, … 来表示，所以 y 是 x 的函数也有时記成：$y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$, … 来表示。不过为了防止混乱，在同一个問題中，由不同的对应关系所規定的函数，应使用有区别的記号，例如分别記为 $y=f(x)$, $y=g(x)$，或 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ 等等。

确定一个函数的根本要素是定义域 $\mathscr{D}$ 和函数关系 f，而不在于自变数与因变数采用什么样的符号来代表。所以 $y=f(x)$ $(x\in \mathscr{D})$ 和 $s=f(t)$ $(t\in \mathscr{D})$ 是同一个函数，如果两个 $\mathscr{D}$ 和两个 f 是代表相同的数集和相同的函数关系的話。

在上述定义中，我們特别要求对于 $\mathscr{D}$ 中每一 x，对应的 y 值都是唯一的。这种函数有时特别称之为**单值函数**。而将取消了唯

一性的要求之后所得到的，非单值的函数称之为**多值函数**。不过今后如果沒有特别声明，函数还是一律指的单值函数。

根据函数的定义，立即可以知道在加热气体的过程中，压力 P 是 T 的函数，自变数域是閉区間 $[T_0, T_1]$，其中 T_0 是加热开始时气体的温度，T_1 是加热过程結束时，气体的温度。又例 1 中的 s 是 t 的函数，定义域是 $[0, t_1]$，t_1 代表物体落到地面所需的时間。例 2 中的 V 是 x 的函数，定义域是 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$。例 3 中人数 n 也是时間 t 的函数。

对于定义域所对应的函数，可以定义它們的四則运算（不过在定义除法时，必須除去函数为零的值）：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$，$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}(x\in\mathscr{D})$。

为了进一步了解函数概念，现在我們来考虑函数的图象。

設想在平面上已經取定了坐标系統。$y=f(x)$ $(x\in\mathscr{D})$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 上面的一个函数。則 $\mathscr{D}$ 可以看成 x 軸（横軸）上的一点集。对于每一 $x\in\mathscr{D}$，$(x, f(x))$ 是平面上的一个点。当 x 遍取属于 $\mathscr{D}$ 的值时，$(x, f(x))$ 就构成平面上的一个图形（参看图 3）（即平面上的一个点集）。我們称之为 $y=f(x)$ $(x\in\mathscr{D})$ 的图象。在一

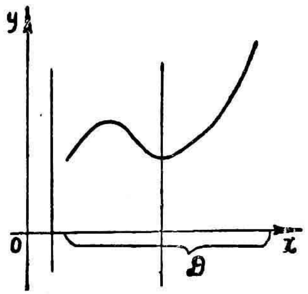


图 3

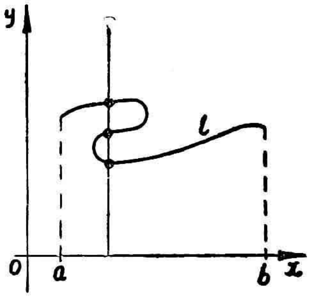
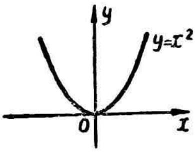


图 4

般情况下，它是平面上的一条"曲綫"，它和每一根平行于 y 軸（縱軸）的直綫都頂多交于一点（当此直綫經过属于 $\mathscr{D}$ 的点时，交于一点，否則不交，如图 3），这是因为我們的函数是单值的。把图象平行于 y 軸向 x 軸投影，便得到 $\mathscr{D}$。函数图象的这两点性质，事实上已刻画出了函数图象的基本特征。它說明幷不是平面上的任何曲綫都能是某一个函数的图象的。比如图 4 中的 l 就不是某个函数的图象。下面我們作出了函数：

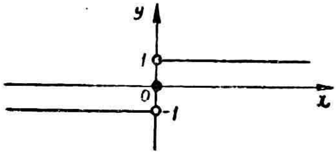
$$y=x^2,\ \ y=\operatorname{sgn} x,\ \ y=|x|,\ \ y=1$$

的簡略图象，其中 $\operatorname{sgn} x$ 为克朗涅克尔（Kronecker）函数①：



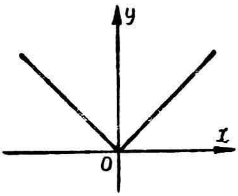
$y=x^2$

图 5



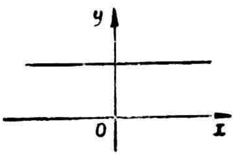
$y=\operatorname{sgn} x$

图 6



$y=|x|$

图 7



$y=1$

图 8

以上四个函数的图象，基本上都是連續的曲綫（直綫、折綫）。当然这幷不說明任何函数的图象都是这样。

例 4．狄黎克雷（Dirichlet，1805—1859）函数。設 $\mathscr{D}$ 是閉区

① Kronecker（1823—1891）函数的定义为：$y=\begin{cases} 1 & \text{当 } x>0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x<0 \text{ 时。} \end{cases}$

間 $[0,1]$, f 是这样一个对应关系:

$$y=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时。}\end{cases}$$

則 y 是 x 的函数，这个函数通常称之为狄黎克雷函数。

狄黎克雷函数的图形，是分布在 $y=0$ 和 $y=1$ 这两根直綫上的两个不連通的点集(参看图 9)。这样的函数的图象是无法精确画出的。

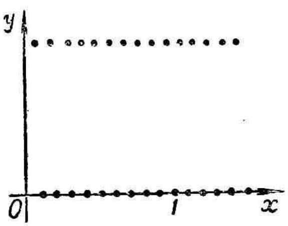


图 9

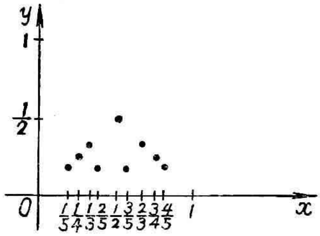


图 10

例 5. 黎曼 (Riemann, 1826—1866) 函数。若$\mathscr{D}$是$[0,1]$，則对应規則:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},\ p\text{、}q \text{ 互质}, q>0 \text{ 时;}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时。}\end{cases}$$

規定了$\mathscr{D}$上的一个函数，即所謂黎曼函数。它的图象也不是連續不断曲綫(参看图 10)。

把函数概念和平面上的“曲綫”联系起来，是十七世紀后期的事情。这种观念有极其重要的意义。通过“平面曲綫”給与了函数概念以一种几何的形象，从而能大为有利于我們对函数的研究。

用平面上的某条曲綫来表示函数，除了給与了函数概念以几何解釋以外，也是一种重要的函数表示法。在实际問題中，是很重要的。例如在气象台上，要研究溫度的变化，就使用溫度記录器。这是一个借助于时钟机构而繞軸自轉的圓筒和一个对溫度变化极