平面解析几何研究

樊真美 编著

江南风丛书

中国文联出版公司

平面解析几何研究

樊真美　编著

图书在版编目(CIP)数据

平面解析几何研究／樊真美编著.－北京：中国文联出版公司，1998
(江南风丛书／冉占彩主编)
ISBN 7-5059-3181-4
Ⅰ.平… Ⅱ.樊… Ⅲ.解析几何课－教学法－大学 Ⅳ.G634.303
中国版本图书馆CIP数据核字(98)第30208号

书　　名	“江南风”丛书(共10册)
主　　编	冉占彩
出　　版	中国文联出版公司
发　　行	中国文联出版公司发行部
地　　址	农展馆南里10号(100026)
经　　销	全国新华书店
责任编辑	陈福仁
责任印制	胡元义
印　　刷	南京人民印刷厂
开　　本	850×1168　1/32
字　　数	1600千字
印　　张	80
插　　页	20页
版　　次	1998年11月第1版第1次印刷
印　　数	1-800册
书　　号	ISBN 7-5059-3181-4/I·2407
定　　价	142.00元(全十册)

本书如有印装质量问题，请直接与出版社联系

江南风丛书

主　编：冉占彩
副主编：张震麟

中国文联出版公司

前　言

《平面解析几何研究》是根据国家教委师范教育司于1993年颁布的《普通高等师范学校数学教育专业教育教学基本要求》中，对数学教育类课程中解析几何的要求编写的，作为高师本科数学教育类课程之一，与《初等几何研究》、《初等代数研究》配套的教材，也可以作为在职中学教师接受继续教育的教材和教学参考书。

本书突出解析几何的基本思想和方法，在对中学平面解析几何知识拓宽、加深的同时，对解析几何的理论进行了较严格的叙述，在第一章 坐标方法·曲线与方程中首先介绍了有向线段和有向角加法定理，使解析几何中有关定理、公式、方程的推导都建立在严格可信的基础上，讲构造坐标系的方法，从平面上直角坐标网推广到曲面上曲纹坐标网，讲曲线与方程的对应从单个曲线与方程的对应推广到曲线系与含单参数曲线系方程的对应，其目的都是使读者对解析几何的基本思想——形与数统一与转化的思想和基本方法——坐标方法的认识、深化和提高，有助于读者居高临下地分析中学教材。第二章二次曲线一般方程的讨论虽是通用教材中都有的内容，但本书吸纳诸书优点，走了一条“最捷径”，使二次曲线一般方程的化简这样一个计算量很大的问题变得轻松愉快。作者又利用不变量推出了二次曲线对称轴的方程，这样不仅可以利用不变量确定二次曲线的形状，而且可以利用原方程的系数直接确定二次曲线的位置。掌握了这些，读者处理中学教材有关内容就游刃自如了。第三章有关极坐标的研究中，关于极坐标曲线周期性的讨论吸收了作者近年来的研究成果，找出了极坐标曲线与对应的函数周期的数量关系，

为求极坐标曲线的周期提供了简捷可行的方法，有助于读者透彻地理解中学教材。

本书力求以较高的观点来讲述平面解析几何内容，由于向量方法的广泛使用，使许多公式和方程的推导变得简捷、明快，而且对几何问题本质的揭示更加深刻。用几何变换的观点来研究几何问题，用复数来表示几何变换构成本书另一特点。本书第五章几何变换的复变换式及其应用中对各种几何变换——平移、旋转、轴反射、位似变换、反演变换等的复变换式及其在解析几何中的应用作了较全面的论述。由于几何变换的复变换式形式简单，使用方便，从变换的角度用复变换式来处理有关解析几何问题，为用代数方法研究几何问题开辟了新的途径，不仅能简化计算，而且能开阔思路，有助于读者进一步理解解析几何的基本思想和方法，用高观点指导中学数学教学。

本书密切联系中学解析几何教学，对中学解析几何教材中的一些重点和难点都作了深入研究和剖析，对解析几何解题的一些常用方法进行了归纳和总结，为了加强解题的技能和技巧的训练，本书配备了较多的例题，题型多样、活泼，并有一定难度，以开阔眼界，活跃思想，并在每章末配置一定数量的习题，附有提示和解答，以便读者自学。

本书的编著得到南京师专校、系领导和几何教研室老师的大力支持。南京师范大学数学系杨润生教授详细审阅了书稿，并提出许多宝贵意见，遵照他的意见，作者又进行了修改。无锡教育学院杜静付教授提供了第二章的大部分习题和解答，在此表示深深的谢意。

限于作者水平，错误和不妥之处，望读者赐教。

樊真美

1998 年仲夏于南京

序

几何学是研究图象与图象之变换的科学，其重要性是不言而喻的。几何学开始发展之初，所用的方法一般都称为“综合法”，这是一种完全用逻辑推理来研究直线、三角形、与圆等等较简单的图形的方法。笛卡尔提出直角坐标系以后，几何学的研究方法起了极为重大的变化，它使得数与形统一起来，也使得可用代数学的方法来研究几何学。用坐标系的方法来研究图象的几何学称为解析几何学，它对于研究函数以及一些相关的学科都起着十分重大的作用。没有坐标的方法，函数论等学科是根本发展不起来的，因而解析几何学应是自然科学中最重要与最基本的学科之一，也是中学数学课程中的一个重要组成部分。

师范院校的培养目标主要是中学教师。为了使师范院校的毕业生能胜任中学平面解析几何学的教学任务，一本好的平面解析几何学的教学参考书当然是必不可少的。

笔者很高兴地看到了樊真美老师的写的《平面解析几何研究》一书的书稿。作者首先严格地引进了直角坐标系的最基本的概念与方法，不仅叙述平面上的直角坐标网，也推广到曲面上的曲纹坐标网。其次讨论了曲线与方程的对应关系，以及参数方程与坐标变换，并系统地讨论了一般的二次曲线及其化简方法。极坐标是不同于直角坐标的另一种类型的坐标系，其重要性并不亚于直角坐标系，有些函数的理论研究用极坐标的方法比用直角坐标更为简便，作者对于极坐标也作了很深入地研究，最后，作者在第五章中讨论了几何变换复变换式的概念，理论，以及其一些应用，这都是很令人感到兴趣的。

总之，本书叙述简明扼要，讨论正确，其所含的内容不仅复盖了中学生在平面解析几何这门课程中学到的理论和方法，而上也对其中的某些概念有所加深，使得读过这本书的教师们在中学讲授平面解析几何课程时可以居高临下，拓宽学生的知识面，这对学生未来的发展是有其无可估量的意义的。

樊真美老师一生致力于几何学科的教学与研究，现将其在这方面的教学经验与心得整理成书，这无疑是一件十分有益的事，为此，本人乐为此序。

周伯埙

1998 年 11 月于南京大学

目　录

第一章　坐标方法·曲线与方程

本章在对中学解析几何有关内容拓宽、加深的基础上，突出解析几何的基本方法——坐标方法和基本思想——由形到数、由数到形的转化。并对平面解析几何作了较严格的理论叙述，增加了有向线段和有向角的加法定理，代数曲线和n次曲线等内容。编写含单参数曲线系方程一节，是为了进一步深化对参数的认识和熟练参数的运用。

§1.1　坐标方法

十六至十七世纪随着资本主义生产方式的出现，社会生产力的迅速发展，各种自然科学和技术都有了飞跃发展，出现了新的数学问题，对数学提出了新的要求，变量和函数概念的初步形成要求对数学的两种对象——空间形式与数量关系之间建立更紧密的联系。笛卡尔(1596—1650)创立的解析几何就是通过坐标方法把几何曲线与代数方程联系起来，开辟了用代数方法研究几何问题的新途径，为微积分的创立铺平了道路，这种解析方法现在已经成为几何研究的一般方法，甚至突破了几何学成为物理学，力学和科学技术中的一般方法。

在解析几何中形与数结合的基础是坐标方法，就是指建立基本的几何对象(常常是点)和一个或一组有序实数之间的对应关系的方法，而且这种对应关系除掉特殊的一些点之外是一一对应的。为了保证几何的基本对象——点与一个或一组有序实

数建立一一对应关系，必须首先引进有向线段和有向角的概念及有关知识。

1. 有向线段和有向角的加法定理

在中学解析几何教材中介绍过有向直线（轴）、有向线段和有向线段的数量等概念以及有向线段数量计算公式。下面介绍的有向线段和有向角的加法定理，是解析几何中推导许多公式和曲线方程的理论基础。

设$\overrightarrow{AB}$是 x 轴上任一有向线段，A、B 的坐标分别为 x_1、x_2，则它的数量

$$AB=x_2-x_1$$

根据此公式可以推出轴上有向线段加法定理。

定理 1.1.1　A_1、A_2、A_3 是 x 轴上不同三点，不论它们的排列顺序如何，都有

$$A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3 \tag{1.1-1}$$

证明　设 A_1、A_2、A_3 的坐标分别为 x_1、x_2、x_3，则

$$A_1A_2+A_2A_3=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)=x_3-x_1=A_1A_3$$

推论　A_1、A_2……A_n 是 x 轴上 n 个不同的点，不论它们的排列顺序如何，都有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n \tag{1.1-2}$$

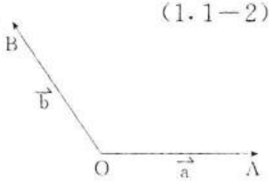

图1－1

设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为平面上两个非零向量，在平面上任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$（图 1－1），我们把射线 OA 和 OB 构成的角度在 O 与 π 之间的角，叫做向量 $\vec{a}$和 $\vec{b}$的夹角，记作$\angle(\vec{a},\vec{b})$，按规定若 $\vec{a}$和 $\vec{b}$同向，那么$\angle(\vec{a},\vec{b})=0$；若 $\vec{a}$和 $\vec{b}$反向，那么$\angle(\vec{a},\vec{b})=\pi$；若 $\vec{a}$不

平行 $\vec{b}$，那么，$0<\angle(\vec{a},\vec{b})<\pi$。

平面上两向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角，若规定了以 $\vec{a}$为始边，$\vec{b}$为终边，叫做向量 $\vec{a}$和向量 $\vec{b}$的有向角，记作$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$或$\measuredangle AOB$，且规定：

1）当 $\vec{a}$不平行 $\vec{b}$时，若 $\vec{a}$扫过 $\vec{a}$、$\vec{b}$之间的夹角$\angle(\vec{a},\vec{b})$旋转到与$\vec{b}$同向的位置时，如果旋转方向是逆时针方向，那么$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{b})$；如果是顺时针方向，那么$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=-\angle(\vec{a},\vec{b})$。

2）当 $\vec{a}/\!/\vec{b}$时，$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{a},\vec{b})$。

有向角的值，按定义有下列限制

$$-\pi<\measuredangle(\vec{a},\vec{b})\leqslant\pi$$

显然
$$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=-\measuredangle(\vec{b},\vec{a})$$

但我们常常把有向角的值推广到$\leqslant-\pi$ 或$>\pi$，这时我们认为相差 2π 的整数倍的值代表同一个角，使用这种较广的取值法，关于有向角的加法有如下定理。

定理 1.1.2 $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})+\measuredangle(\vec{b},\vec{c})=\measuredangle(\vec{a},\vec{c})$ (1.1—3)

轴上有向线段加法定理和平面上有向角加法定理是建立平面坐标系的理论基础，也是解析几何学中许多公式和方程推导的理论基础，它保证了我们的推导具有一般性，而与图形中点的排列顺序和有向角的旋转方向无关。

2. 构造坐标系的方法——坐标网法

平面直角坐标系可以看作是两族正交的平行直线族构成的正方形网，这两族直线中各选一条作 x 轴和 y 轴，其交点 O 是坐标原点，此时平面上任一点 M 的坐标是用两个有向线段的数量来刻划的。

设过 M 点平行于 x 轴的直线与 y 轴交于 M_2，平行于 y 轴的直线与 x 轴交于 M_1，则

$$\begin{cases} x=OM_1 \\ y=OM_2 \end{cases}$$

显然，平面上建立了直角坐标系后，平面上的点 M 与有序实数对(x,y)之间建立了一一对应关系。

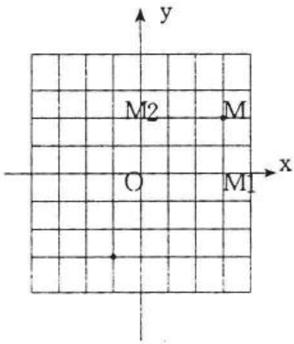

图1－2

作为平面直角坐标系的推广笛卡尔斜角坐标系可以看作是两族斜交的平行直线族构成的菱形网。同样平面上任一点 M 的坐标也是用两个有向线段的数量来刻划的。如图 1－3。

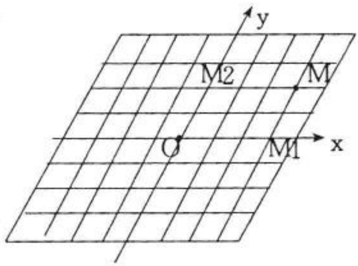

图1－3

$$\begin{cases} x=OM_1 \\ y=OM_2 \end{cases}$$

坐标网可以不用直线族而用曲线族组成。极坐标系的坐标网就是由同一个点为起点的所有射线和这点为中心的所有同心圆组成，除此点外平面上任一点每族曲线都有一条且只有一条通过它。

取同心圆的中心 O 为极点，其中一条射线为极轴 Ox，此时平面上任一点 M 的坐标是用极半径，极角两个有序实数来刻划的，记作 $M(\rho、\theta)$，其中

$\rho=|OM|\geqslant 0$

$\theta=\sphericalangle XOM$

当限定 $\rho\geqslant 0, \theta\leqslant\theta<2\pi$ 时，除极点外平面上的点 M 与有序实数对(ρ,θ)建立了一一对应关系。

当极点与原点重合，极轴与正半 x 轴重合时，由三角函数的定义，点 M 的直角坐标 (x,y) 和极坐标 (ρ,θ) 有如下关系。

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad (1.1-4)$$

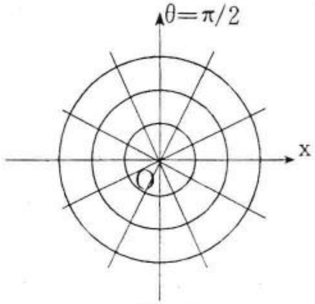

图1－4

当极点为直角坐标系 Oxy 中点 $O'(x_0,y_0)$，极轴与正半 x 轴同向，过点 O' 作 OA 垂直 x 轴，交 x 轴于 A，过点 $M(\rho,\theta)$ 作 x 轴的垂线交 x 轴于 N，交 x' 轴于 N'（图 1－5），则

$O'N'=AN=x-x_0=\rho\cos\theta$

同理 $\qquad y-y_0=\rho\sin\theta$

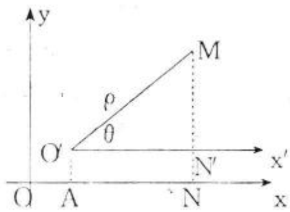

图1－5

所以，此时，点 M 的直角坐标 (x,y) 和极坐标 $(\rho、\theta)$ 有如下关系：

$$\begin{cases} x-x_0=\rho\cos\theta \\ y-y_0=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad (1.1-5)$$

一般地平面上画出两族曲线满足：1° 同一族曲线总不相交；2° 不同族曲线中任两条总相交于一点，就组成了一个曲纹坐标网，于是对平面上任一点 M，每一族曲线都有且只有一条通过它，这两条曲线所对应的参数 u,v，就是这一点的曲纹坐标 $M(u,v)$。

曲纹坐标不但适用于平面，还适用于曲面。地球表面的地理

坐标就是由经线和纬线所组成的曲纹坐标。经线所对应的参数用经度 φ 刻划,纬线所对应的参数用纬度 θ 刻划。

$$-\pi<\varphi\leqslant\pi \qquad ,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

于是除了南、北极外,球面上的点 M 与有序实数对 (φ,θ) 之间建立了一一对应关系,φ,θ 称为点 M 的球面坐标。

若曲面 S 是平面 π 上区域 G 经过双方连续的在上的一一映射 f(即拓扑映射)在三维欧氏空间内的象,则曲面 S 上的曲纹坐标网可以看成是平面 π 上区域 G 上的直角坐标网经过映射 f 的象。

例如,平面上长方形区域 G:$-\pi<\varphi\leqslant\pi,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上的直角坐标网经过映射 f。

$$x=R\cos\theta\cos\varphi, \quad y=R\cos\theta\sin\varphi, \quad z=R\sin\theta$$

在三维欧氏空间内的象就是一个开口球面上的球面坐标网,φ 和 θ 表示经度和纬度(图 1—6)。

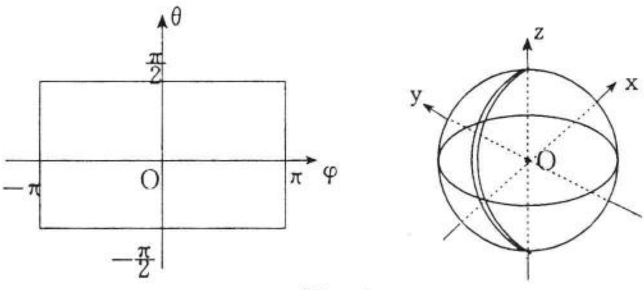

图1—6

一般地,平面上直角坐标为 (u,v) 的点 M,经过双方连续的在上的一一映射 f:

$$x=f_1(u,v), \quad y=f_2(u,v), \quad z=f_3(u,v)$$

就变成了曲面 $S:\begin{cases}x=f_1(u,v)\\y=f_2(u,v)\\z=f_3(u,v)\end{cases}$ 上的点 $M'(x,y,z)$，参数 u，v 称为点 M' 的曲纹坐标。

坐标的选取还不必限于实数，在直角坐标系里我们可以不用一对有序实数 (x,y)，而用一个复数 $x+iy$ 来作为平面上点的坐标，叫做点 M 的复坐标，这样就建立了平面上的点 M 和复数 $x+iy$ 之间的一一对应关系，引进了复坐标的平面叫复平面。

在第五章我们将看到，应用复坐标来讨论解析几何的一些问题，特别简单，为用代数方法讨论几何问题开辟了新的途径。

3. 坐标系的选取

建立坐标系是用解析法解决几何问题，实现形数转化的第一步，根据图形的特点，适当选取直角坐标系，笛卡尔斜角坐标系或极坐标系以及坐标系的位置，可以大大减少运算量，使问题容易得到解决。

例 1 求证：等腰三角形底边上任一点到两腰的距离之和等于一腰上的高。

分析 根据等腰三角形是轴对称图形的特点，可取等腰三角形 ABC 的底边 BC 所在的直线为 x 轴，对称轴为 y 轴建立直角坐标系。

证明 建立直角坐标系如图 1—7 所示。

设 $|BC|=2a$，$|AO|=h$

则 $B(-a,o)$，$C(a,o)$，$A(o,h)$

边 AB，AC 的方程分别为

$AB:hx-ay+ah=0$

$AC:hx+ay-ah=0$