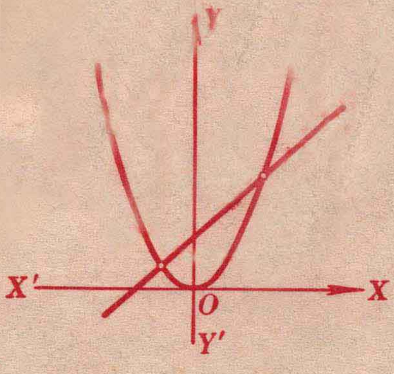
初級中学課本

代　数

DAISHU

第四册



人民教育出版社

初級中学課本代数第四册

目　　录

第十七章

I 常用

17.1 对数 我們知道，利用指数的性质，往往可以使某些計算簡化．例如，要計算 4096 的立方根，可以先求出 4096 等于 2 的 12 次幂，然后利用指数的性质計算

$$\sqrt[3]{4096}=\sqrt[3]{2^{12}}=2^{\frac{12}{3}}=2^4=16.$$

我們可以看出，利用指数的性质来簡化計算，需要求出已知的数 N 等于底数 a 的多少次幂．現在我們来說明，怎样表示已知的数 N 是底数 a 的多少次幂．

我們知道，2 的 4 次幂等于 16，可以記作

$$2^4=16,$$

这里 2 是底数，4 是指数，16 是幂．

反过来，如果我們要表示 16 是 2 的多少次幂，可以記作

$$\log_2 16=4,$$

这里 2 仍旧叫做底数，16 叫做眞数，4 叫做以 2 为底，眞数 16 的对数，这个式子讀作“以 2 为底 16 的对数等于 4”．

一般地說，設 a 是一个不等于 1 的正数，a 的 b 次幂等于 N，可以記作

$$a^b=N; \tag{1}$$

反过来，如果我們要表示 N 是 a 的多少次幂，就可以記作

$$\log_a N = b, \tag{2}$$

这里 a 仍旧叫做**底数**(簡称**底**)，N 叫做**眞数**, b 叫做以 a 为底, N 的**对数**.

因为 a 是一个不等于 1 的正数，而一个正数的任何次幂都是正数, 所以从(1)可以知道, N 一定是一个正数. 因此, 眞数必須是正数, 也就是**零和負数沒有对数**.

本书以后如果沒有其他說明，所有的底数都表示不等于 1 的正数; 所有的眞数都表示正数.

例 1 (1) 把指数式 $4^2=16$ 写成对数式.

(2) 把对数式 $\log_{10}100=2$ 写成指数式.

解 (1) $\log_4 16=2$.

(2) $10^2=100$.

例 2 求 $\log_9 81$ 的值.

解 設 $\log_9 81=x$, 那么

$$9^x=81.$$

$$\because \quad 9^2=81, \qquad \therefore \quad x=2.$$

例 3 已知 $\log_{10}N=-2$, 求 N.

解

$$\log_{10}N=-2,$$

$$10^{-2}=N,$$

$$\therefore \quad N=\frac{1}{100}=0.01.$$

17.2 积、商、幂、方根的对数 根据对数的意义和指数的运算法则:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q},$$

$$a^p \div a^q = a^{p-q},$$

$$(a^p)^n = a^{pn},$$

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}},$$

可以得到下面的对数的运算法则.

1. 两个正数的积的对数,等于同一底数的这两个数的对数的和. 就是

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n.$$

設 $\log_a m = p$, $\log_a n = q$. 根据对数的意义,得

$$m = a^p, \quad n = a^q.$$

$$\therefore \qquad mn = a^p \cdot a^q = a^{p+q},$$

$$\therefore \quad \log_a mn = p + q = \log_a m + \log_a n.$$

这个法则对于多于两个因数的积也能适用,例如

$$\log_a lmn = \log_a l + \log_a m + \log_a n.$$

2. 两个正数的商的对数,等于同一底数的这两个数的对数的差. 就是

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n.$$

設 $\log_a m = p$, $\log_a n = q$, 那么

$$m = a^p, n = a^q.$$

$$\therefore \qquad \frac{m}{n}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q},$$

$$\therefore \quad \log_a\frac{m}{n}=p-q=\log_a m-\log_a n.$$

3. 一个正数的幂的对数，等于同一底数的这个数的对数乘以幂指数. 就是

$$\boldsymbol{\log_a m^n = n\log_a m.}$$

設 $\log_a m=p$，那么

$$m=a^p.$$

$$\therefore \qquad m^n=(a^p)^n=a^{np},$$

$$\therefore \qquad \log_a m^n=np=n\log_a m.$$

4. 一个正数的方根(算术根)的对数，等于同一底数的这个数的对数除以根指数. 就是

$$\boldsymbol{\log_a\sqrt[n]{m}=\frac{1}{n}\log_a m.}$$

設 $\log_a m=p$，那么

$$m=a^p.$$

$$\therefore \qquad \sqrt[n]{m}=\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}},$$

$$\therefore \quad \log_a\sqrt[n]{m}=\frac{p}{n}=\frac{1}{n}\log_a m.$$

例 用 $\log_a x$、$\log_a y$、$\log_a z$ 表示下列各式:

(1) $\log_a\frac{xy}{z}$; (2) $\log_a x^3y^5$;

(3) $\log_a\frac{\sqrt{x}}{yz}$; (4) $\log_a\frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解 (1) $\log_a \frac{xy}{z}=\log_a xy-\log_a z$

$=\log_a x+\log_a y-\log_a z$;

(2) $\log_a x^3y^5=\log_a x^3+\log_a y^5$

$=3\log_a x+5\log_a y$;

(3) $\log_a \frac{\sqrt{x}}{yz}=\log_a \sqrt{x}-\log_a yz$

$=\frac{1}{2}\log_a x-(\log_a y+\log_a z)$

$=\frac{1}{2}\log_a x-\log_a y-\log_a z$;

(4) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=\log_a x^2\sqrt{y}-\log_a \sqrt[3]{z}$

$=\log_a x^2+\log_a \sqrt{y}-\log_a \sqrt[3]{z}$

$=2\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{1}{3}\log_a z$。

习题六十六

1. 把下列指数式写成对数式:

(1) $2^5=32$; (2) $10^3=1000$;

(3) $3^{-2}=\frac{1}{9}$; (4) $10^0=1$;

(5) $8^{\frac{2}{3}}=4$; (6) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

2. 把下列对数式写成指数式:

(1) $\log_3 9=2$; (2) $\log_2 \frac{1}{4}=-2$;

(3) $\log_{10}0.001=-3$;　　(4) $\log_8 2=\frac{1}{3}$;

(5) $\log_5 5=1$;　　(6) $\log_{27}\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}$.

3. 用对数的形式表示下列各式里的 x, 并且求出它的值:

(1) $10^x=0.001$;　　(2) $2^x=512$;

(3) $36^x=6$;　　(4) $4^x=8$.

4. 求:

(1) $\log_5 25$;　　(2) $\log_2\frac{1}{16}$;

(3) $\log_{10}0.01$;　　(4) $\log_9 27$;

(5) $\log_{49}\frac{1}{7}$;　　(6) $\log_a a^5$.

5. 填写下面的表:

x	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
$\log_{10}x$									

6. 求下列各式中的真数 x:

(1) $\log_2 x=5$;　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}x=-3$;

(3) $\log_5 x=1$;　　(4) $\log_5 x=0$.

7. (1) 底数是 7 的时候, 什么数的对数是 2?

(2) 底数是 8 的时候, 什么数的对数是 $-\frac{2}{3}$?

8. 求下列各式中的 x:

(1) $\log_8 x=\frac{1}{3}$;　　(2) $\log_{25}\frac{1}{5}=x$;

(3) $\log_{10}x=-\frac{3}{2}$.

9. (1) 填充下表:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$\log_2 x$	-2	-1	0	1											

(2) 根据上表, 驗证下面的等式(分别求两边的值, 看它們是不是相等):

$$\log_2(64\times4)=\log_2 64+\log_2 4;$$

$$\log_2(256\div4)=\log_2 256-\log_2 4;$$

$$\log_2 4^3=3\log_2 4;$$

$$\log_2\sqrt[4]{256}=\frac{1}{4}\log_2 256.$$

10. 用 $\log_{10}x$、$\log_{10}y$、$\log_{10}z$、$\log_{10}(x+y)$、$\log_{10}(x-y)$来表示下列各式:

(1) $\log_{10}xyz$; (2) $\log_{10}(x+y)z$;

(3) $\log_{10}(x^2-y^2)$; (4) $\log_{10}\dfrac{xy}{(x+y)z}$;

(5) $\log_{10}\dfrac{(x+y)y}{(x-y)z}$; (6) $\log_{10}xy^2z$;

(7) $\log_{10}\dfrac{x^2-xy}{100}$; (8) $\log_{10}xy\sqrt{z}$;

(9) $\log_{10}\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y}}$; (10) $\log_{10}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z^{-2}$.

11. (口答)(1) $\log_a(x+y)$和 $\log_a x+\log_a y$ 是不是恒等的?

(2) $\log_a nx$ 和 $n\log_a x$ 是不是恒等的?

(3) $\log_a(x-y)$和 $\log_a\dfrac{x}{y}$是不是恒等的?

(4) $\dfrac{\log_a x}{\log_a n}$和$\log_a\sqrt[n]{x}$是不是恒等的?

17.3 常用对数 我們通常用的对数是以 10 为底的对数，叫做**常用对数**. 用符号記出常用对数的时候，通常把底数 10 略去不写，并且把"log"写成"lg". 例如，$\log_{10}100$ 記作 lg 100. 以后所說的对数都是指常用对数. 例如說 100 的对数是 2，就是說 100 的常用对数是 2.

我們知道：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\because\ 10^3=1000,\qquad \therefore\ \lg 1000=3;$$

$$\because\ 10^2=100,\qquad \therefore\ \lg 100=2;$$

$$\because\ 10^1=10,\qquad \therefore\ \lg 10=1;$$

$$\because\ 10^0=1,\qquad \therefore\ \lg 1=0;$$

$$\because\ 10^{-1}=0.1,\qquad \therefore\ \lg 0.1=-1;$$

$$\because\ 10^{-2}=0.01,\qquad \therefore\ \lg 0.01=-2;$$

$$\because\ 10^{-3}=0.001,\qquad \therefore\ \lg 0.001=-3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

可以看出，10 的整数次幂的对数是一个整数，并且眞数較大的时候，它的对数也較大.

任意一个不是 10 的整数次幂的正数的对数是一个小数. 例如，lg 72 是 1 与 2 之間的一个小数，lg 0.0072 是 -3 与 -2 之間的一个小数.

一个正数的对数(具有一定精确度的近似值)，可以利用"对数表"求得.

17.4 对数的首数和尾数 我們知道，$1<3.408<10$，

所以 $0<\lg 3.408<1$，就是說，$\lg 3.408$ 是一个正的純小数.

如果知道了 $\lg 3.408=0.5325$，又可以求得

$$\begin{aligned}\lg 340.8&=\lg(3.408\times 100)\\&=\lg 100+\lg 3.408\\&=2+0.5325,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg 0.03408&=\lg(3.408\times 0.01)\\&=\lg 0.01+\lg 3.408\\&=-2+0.5325.\end{aligned}$$

所有正数的对数都可以写成一个整数(正整数、零或者負整数)加上一个正的純小数(或者零)的形式，整数部分叫做这个对数的**首数**，正的純小数(或者零)的部分叫做这个对数的**尾数**. 例如，

$\lg 340.8=2+0.5325$，首数是 2，尾数是 0.5325；

$\lg 3.408=0+0.5325$，首数是 0，尾数是 0.5325；

$\lg 0.03408=-2+0.5325$，首数是 -2，尾数是0.5325.

根据上面所說，还可以知道：

只有小数点位置不同的数，它們的对数的尾数都相同.

这就是使用以10为底的对数的特殊方便的地方.

对数的首数是正整数或者零的时候，可以在首数后直接添上尾数写出这个对数. 例如，$\lg 340.8=2.5325$，$\lg 3.408=0.5325$. 对数的首数是負整数的时候，通常把

“$-$”号写在这个整数的上面，而把首数和尾数間的“$+$”号略去不写. 例如, $\lg 0.03408=-2+0.5325$，通常写成 $\lg 0.03408=\overline{2}.5325$. 这里要注意 $\overline{2}.5325=-2+0.5325$, $-2.5325=-(2+0.5325)=-2-0.5325$, 它們是不同的.

例 写出下列各对数的首数和尾数:

(1) $\lg a=0.2350$; (2) $\lg b=\overline{2}.4087$;

(3) $\lg c=-2.4087$.

解 (1) 首数是 0, 尾数是 0.2350;

(2) 首数是 -2, 尾数是 0.4087;

(3) $\lg c=-2-0.4087=-2-1+0.5913$

$=-3+0.5913=\overline{3}.5913$,

首数是 -3, 尾数是 0.5913.

17.5 首数的求法 从

$\lg 3.408=0+$正的純小数;

$\lg 34.08=\lg(3.408\times 10)=1+$正的純小数;

$\lg 340.8=\lg(3.408\times 100)=2+$正的純小数,

可以看到, 眞数有一位整数时, 它的对数的首数是 0; 有两位整数时, 对数的首数是 1; 有三位整数时, 对数的首数是 2. 照推下去, 可以得到:

大于或者等于 1 的数, 它的对数的首数, 等于眞数的整数位数减去 1.

又从

$\lg 0.3408 = \lg(3.408 \times 0.1) = -1 +$ 正的純小数;

$\lg 0.03408 = \lg(3.408 \times 0.01) = -2 +$ 正的純小数;

$\lg 0.003408 = \lg(3.408 \times 0.001) = -3 +$ 正的純小数,

可以看到，眞数最前面只有一个零(就是整数个位的零)时，它的对数的首数是 -1; 連續有两个零时(包括整数个位的零)，对数的首数是 -2; 連續有三个零时(包括整数个位的零)，对数的首数是 -3. 照推下去，可以得到:

小于 1 的正数，它的对数的首数是一个負数，首数的絕对値等于眞数最前面連續所有的零的个数(包括整数个位的零).

17.6 对数表 一个数的对数的尾数可以在对数尾数表(簡称对数表)里查到. 下面是“四位数学用表”里的表 I“对数表”的一部分. 其中标有 N 的直行和横行的数

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123456789
…	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	………………
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3 3 4 5 6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3 3 4 5 6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2 3 4 5 6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2 3 4 5 6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2 3 4 5 6 6 7
55	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	………………
…	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	………………
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123456789

是眞数，共余的数是对数的尾数（精确到 0.0001 的近似值），但是略去了小数点，尾数部分的最后一栏是修正值.

因为只有小数点位置不同的数，它們的对数的尾数都相同，所以从一个数查它的对数的尾数的时候，可以不管眞数的小数点，只把它看成是若干位的整数. 例如，要查 0.005036、50.36、0.5036、503600 的对数的尾数，都只要查 5036 的对数的尾数就可以了. 下面我們来說明整数的对数的尾数的查法.

(1) 眞数是三位的整数，例如536. 要求它的对数的尾数，可以在表中N所在的直行里查出 53，横着向右查到頂上（或底下）标有 6 的一行，就得 536 的对数的尾数是 0.7292.

(2) 眞数是两位或者一位的整数，只要在后边补上一个零或者两个零，就可以按照(1)中所說的方法查得它的对数的尾数. 例如，要查 51 的对数的尾数，就查 510 的对数的尾数得 0.7076；要查 5 的对数的尾数，就查 500 的对数的尾数得 0.6990.

(3) 眞数是四位的整数，例如 5036. 要求它的对数的尾数，可以先查得前三位数 503 的对数的尾数，得 0.7016，再横着向右查到修正值表中頂上（或底下）标有 6 的一行得 5，表示 0.0005. 把 0.0005 加到 0.7016 上（用口算）得 0.7021，这就是 5036 的对数的尾数.

(4) 眞数是五位或者更多位的整数，可以先用四舍

五入的方法把它改成一个四位数，再按照(3)中所說的方法查对数的尾数．例如，500862 的对数的尾数是0.6998．

根据§17.5和这里所讲的，可以得出求一个数的对数的步驟如下：

1. 由眞数的小数点的位

2. 由眞数(不管它的小数点)查出对数的尾数；

3. 把所得的首数和尾数写在一起，就得所求的对数．

例 求下列各数的对数：

3.65；　804.7；　0.26；　0.00450327．

解 $\lg 3.65=0.5623$；　$\lg 804.7=2.9057$；

$\lg 0.26=\overline{1}.4150$；　$\lg 0.00450327=\overline{3}.6535$．

17.7 反对数表 如果知道了一个数的对数要求这个数，那么可以利用反对数表(或者叫做眞数表)．下面就是“四位数学用表”里的表 II“反对数表”的一部分．

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	…	…	…	…	…	…	…	…	…
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

已知一个数的对数求这个数，步驟和已知眞数求对数正好相反，現在說明如下．

1. 由对数的尾数查得和所求的眞数至多只有小数点位置不同的整数． 例如，已知 $\lg x=\overline{1}.2846$．先不管对数的首数 -1，只看对数的尾数 0.2846．从表里 m 所在的直行里找到 $.28$，横着向右查到頂上(或底下)标有 4 的一行得 1923，再向右查到修正值表中頂上(或底下)标有 6 的一行得 3，$1923+3=1926$(用口算)，这就是和所求的眞数至多只有小数点位置不同的整数．

2. 根据对数的首数确定眞数的小数点的位置． 对数的首数如果是正数或零，那么眞数的整数位数等于这个首数加上 1；首数如果是負数，那么眞数是一个純小数，它最前面連續所有的零的个数(包括整数个位的零)等于首数的絕对值．例如，已知 $\lg x=\overline{1}.2846$，求 x．根据对数的尾数求得和眞数至多只有小数点位置不同的整数是 1926．因为对数的首数是 -1，所以眞数是 0.1926．

例 已知 $\lg x$，查表求 x：

(1) $\lg x=5.7635$；　　(2) $\lg x=\overline{2}.1804$；

(3) $\lg x=0.05$；　　(4) $\lg x=-0.73248$．

解 (1) $x=580100$．

(2) $x=0.01515$．

(3) $x=1.122$．

(4) $-0.73248=\overline{1}.26752\approx\overline{1}.2675$，

$$\therefore \quad x=0.1851.$$

习题六十七

1. (口答)求下列各对数:

(1) $\lg 1000$; (2) $\lg 100$;

(3) $\lg 10$; (4) $\lg 1$;

(5) $\lg 0.1$; (6) $\lg 0.01$;

(7) $\lg 0.001$; (8) $\lg 0.0001$.

2. (口答)已知 $\lg x$ 等于(1) 5; (2) 1; (3) 0; (4) -1; (5) -4; 求 x.

3. 写出下列各对数的首数和尾数:

(1) $\lg 30=1.4771$; (2) $\lg 8.56=0.9325$;

(3) $\lg 0.74=\bar{1}.8692$; (4) $\lg 0.000432=\bar{4}.6355$;

(5) $\lg 0.08=-1.0969$; (6) $\lg 0.00574=-2.2411$.

4. 已知下列对数的首数和尾数,写出各个对数:

(1) 首数是 5, 尾数是 0.4703;

(2) 首数是 -3, 尾数是 0.0641.

5. 把下列負首数与正尾数的和改成一个負数的形式:

(1) $\bar{2}.5638$; (2) $\bar{1}.8436$; (3) $\bar{1}.9979$; (4) $\bar{3}.8978$.

6. 把下列各数改成負首数与正尾数的和的形式:

(1) -1.8394; (2) -0.5763;

(3) -4.3001; (4) -0.0840.

7. (口答)确定下列各数的对数的首数:

6720; 3.1416; $\frac{1}{2}$; 0.00495; 80; 0.6428; 9; $\frac{1}{3000}$.

8. (口答)一个数的对数的首数是:

(1) 4; (2) -5; (3) 1; (4) -2;

(5) 0; (6) -1; (7) 2; (8) -3.