公理化集合论引论

（上册）

G. Takeuti 著

陈锡庚 译

刘孟德 校审

雷州师专数学系

序

研究集合的运算和性质的数学称为集合论或集论。这一数学课题的研究，首先应当归功于德国数学家G·康托尔，他在1895年和1897年发表了两篇关于算术中基数和序数的著名论文，为集合论奠定了基础。直到现在，集合论的概念和方法已经渗透到所有的数学分支，并且改变了它们的面貌。因此以集合论的观点观察所研究的各个数学对象及其联系时，就能够站得高看得远，看到各种问题的本质。

正因为如此，各个发达的国家都在考虑如何把集合论的一些基本概念和运算，用通俗的语言表述在中学数学里，使那些普通的中学生也能接触到一些近代数学知识。这是当前世界上中学数学教育改革的趋势。我们国家正在实现着伟大的转变时期，每个人都在改革中开拓前进。中学数学教育也不能例外，也必须按照面向四个现代化、面向世界、面向未来的指示精神，改革我们数学教育。对集合论的学习，教师先走一步是完全必要的。关于集合论的初步知识的参考资料，国内有很多人作了有关这方面的介绍。

但是对于较深入的研究和较系统论述这方面的书，目前还不多见。陈锡庚同志为了满足读者的需要，他利用在东北师范大学数学系进修的机会，翻译出G·Takeuti著的《公理化集合论引论》一书。他在翻译过程中，力求文字通俗易懂，忠于原意。为了便于阅读起见，对于专有名词还征求了国内专家的意见，三易其稿，进行了必要的修改。我热切地希望这本译著，能够早日和读者见面，为四化贡献力量。

刘孟德

前　言

公理化集合论是数理逻辑的重要分支。

十九世纪末，集合论已成为近代数学的基本工具之一。但它本身还有很多重大问题没有解决。1902年发表了著名的罗素悖论，震动了数学界，导致了所谓第三次数学危机。

为解决这些问题，在20世纪初创立了公理化集合论。1938年哥德尔证明了选择公理和连续统假设的相对相容性，创造了可构成集的模型，系统地发展了内模型的方法。1963年科恩证明了选择公理和连续统假设的相对独立性，创造了著名的新方法——力迫法。它是构造外模型的方法。用它可以解决很多重要的相容性问题。力迫法产生不仅使公理化集合论有重大的发展，而且使数理逻辑几个主要分支都有崭新的进展。

本书是美国著名数学家G·Takeuti的名著。由于国内介绍这方面的书较少，为满足需要，把它译成中文。在翻译过程中，东北师大数学系教授刘孟德先生给予必要的指导和帮助。刘教授校审了译稿并写了序言。在专业词汇翻译方面，译者多次征求过南京大学莫绍揆教授和北京师大王世强教授等我国著名专家意见，得到专家热情帮助。同时这项工作得到数学系领导和老师们的鼓励、支持和帮助。使之能顺利完成。在此表示衷心感谢。

本书是译者第一次翻译数学专著的习作，由于外文水平和专业水平所限，错误定然不少，尚祈读者指正和谅解。

译　者

目　录

第一章

引　论

在1895年和1897年G·康托尔(1845—1918)发表了两篇关于序数和基数的著名论文。康托尔的序数和基数理论是关于“集合”数目研究三十年的最高峰。起初，他的关于无穷集合的可数性论文在1874年发表，康托尔已建立了无穷集合的新理论。在这个理论中，对象的聚合，甚至一个无穷的聚合被设想为一个简单的统一体。

一个无限集作为一个完整的统一体概念不是被普遍承认的，有人认为逻辑是一个经验的外推，它必然是有穷的。支持从有穷的逻辑推广到无穷的人，需要冒更大的风险。这个逻辑大灾难的预报似乎证实进入本世纪在很多新的基础学科发现了悖论。戴德金停止了他的《什么是数，其意义如何？》的出版。弗雷格允许他的《关于算术概念》基础遭受破坏。

尽管如此，在悖论造成的危机中集合理论仍得到充分的支持而继续生存。严格说来，1908年在罗马国际会议上，伟大的H·庞加莱(1854—1912)强调提出寻求补救办法，他为鼓励人们提出：医生认为以治疗一个飘亮的病理学的病例为快乐。当时，策麦罗和罗素为寻求建立前后统一的基本原理的理论作准备工作。1908年策麦罗首先提出了集合论的公理化。

从这里可以假定公理化的唯一目的是为了避免悖论。无论如何有理由认为公理化集合论将发展至无悖论。当然戴德金的著作和弗雷格的著作中关于算术基础是不会产生悖论的，但是要想弄清基本原理的要求是什么。弗雷格在他的著

需要完整PDF请访问：www.ertongbo

作中说："…，我们划分所有真理，要求区分以下两类：哪些证明能完全用逻辑推演和哪些必须用事实验证。…现在当我们考虑这两类问题属于算术判断时，我不得不首先查明离开独立推演的算术方法能继续进行多远…。"

在集合论的早期历史中，特别有趣的和重要的是发现选择公理，连续统假设和广义连续统假设。连续统假设是康托尔用来解决欧几里德空间中一条直线有多少个点的问题的猜想。连续统假设和广义连续统假设的形式语句是后来给出的。

在阐述中，选择公理断言，已知任何两两不相交的非空集合的集族，存在一个对已知集族的每个一集合恰好有一个公共元素，这个选择公理的发现有重要的意义，它为数学提供了无可置疑的理由，作为一个公理它被许多领域所接受。广义连续统假设也是直到1938年K·哥德尔时不能弄清楚的。哥德尔根据普通集合论公理对两个都是相容的证明，1963年布尔·科恩作了普通集合论的公理的独立性证明。本书较重要的研究对象是对哥德尔和科恩的贡献的研究。为此我们必须把它发展成为一个令人满意的集合理论。

康托尔说，"一个集合我们理解为感觉和思维完全决定的可区分彼此的对象m和任意结合的一个完整的整体M"这个原始概念承认任何聚合作为一个集合会导致成为经典悖论。例如，罗素的悖论：如果所有集合的聚合的本身是一个非空集合，则这个集合有这样性质，它是自身的一个元素当且仅当它不是自身的一个元素。

罗素悖论的观点和其他难点以后讨论，在集合论的发展过程中我们有两个选择，或者我们抛弃康托尔观点的集合概念，或者区分至少两个聚合之间的类型。我们称之为类的任

意聚合和我们称之为集合的某一特殊的聚合。多或任意的聚合都是通常我们可直接感觉得到的。由于类是如此重要我们不能抛弃它。一个令人满意的集合论必须说明关于类的概念。

罗素（1872—1970）和怀特海（1861—1947）在他们的《数学原理》（1910）中用经典理论去回答所知的难题。他们创立了集合类型分层：一个集合X是集合y的成员仅当y是一个比X更高的层次。在这个系统中对于每一个型级有不同的层次，因而有许多无限的概念。

另外两个系统：哥德尔—贝尔纳伊斯（GB）集合论和策麦罗—弗兰克尔（ZF）集合论是从贝尔纳伊斯（1937—1954）、弗兰克尔（1922）、哥德尔(1940）诺伊曼（1625—1929）、斯科莱姆（1922）和策麦罗（1908）的著作中发展起来的。这里以字母顺序排列，我们不精确地区分每一个人的贡献，我们已经指出每一个人较大贡献的年和阶段年。

在哥德尔—贝尔纳伊斯（GB）集合论中经典悖论被避免。它承认类的两个类型：集合和真类。一个类可以是另一些类的成员，真类是元素的集合，但不允许自身是另一些类的元素。在这个系统中我们已经有三个原始概念：集合，类和从属关系。在形式语言中我们有集合变元，类变元和二元谓词符号“$\in$”。

在策麦罗—弗兰克尔集合理论中我们引入了二个原始概念：集合和从属关系，类作为项被定义。在形式语言中我们仅有集合变元和二元谓词符号“$\in$”。这样在ZF中量词仅允许用在集合变元上，虽然GB中量词允许用在集合变元和类变元上，有的结果对于GB可以作为定理但对ZF不是定理。无论如何我们能证明GB是在ZF意义上的守恒扩充。在ZF中每一个良构式是可证的当且仅当在GB中是可证的。

哥德尔的著作包含在哥德尔—贝尔纳伊斯的集合论中，同时我们应指出策麦罗—弗兰克尔理论含有科恩的工作。

第二章
语言与逻辑

组成我们理论的语言：

自由变元：a_0，a_1，…，

约束变元：x_0，x_1，…，

谓词符号：属于。

逻辑符号：$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，$\forall$，$\exists$，

辅助符号：（，），〔，〕。

逻辑符号依次是：否定，析取，合取，蕴涵，等价，全称量词和存在量词。

我们不限制本身的逻辑符号，也不对逻辑符号作原始解释。当给定前后关系时，我们希望它最适合我们的需要。

我们用

$$a, b, c$$

作为元变元，它的定义域是自由变元的聚合

$$a_0, a_1, \cdots;$$

我们用

$$x, y, z,$$

作为元变元，它的定义域是约束变元的聚合

$$x_0, x_1, \cdots。$$

当我们需要多个元变元时，我们根据相互关系使用下标变量。例如，x_0是一个特定的形式语言的约束变元或者是所有形式语言的约束变元的测距变元。

我们用

$$A, B, C$$

作为元变元的值域表示所有良构式（公式）。

公式规则如下：

（1）如果a和b是自由变元，则〔a属于b〕是一个公式。这个公式称为原子公式。

（2）如果A和B是公式，则$\neg A$，〔$A \vee B$〕，〔$A \wedge B$〕，〔$A \rightarrow B$〕和〔$A \leftrightarrow B$〕是公式。

（3）如果A是公式且x是约束变元，则$(\forall x)A(x)$和$(\exists x)A(x)$是公式，这里$A(x)$是从公式A中每出现的自由变元a用约束变元x代替而得到的。我们分别称$(\forall x)A(x)$和$(\exists x)A(x)$为全称量词或存在量词使a量化而得到的公式。

我们不用某一符号组去简化公式但要求用符号足能确定公式意义。

例如：记a_0属于a_1为〔a_0属于a_1〕，简记a_0属于$a_1 \rightarrow a_0$属于a_1代替〔〔a_0属于a_1〕$\rightarrow$〔a_0属于a_1〕〕。

例如：从公式a_0属于a_1，我们对a_0用存在量词量化而得到公式$(\exists x)$〔x属于a_1〕，对a_1用全称量词量化而得到公式$(\forall y)$〔a_0属于y〕。对a_2我们用全称量词得$(\forall Z)$〔a_0属于a_1〕或在a_0属于a_1中不出现任何变元。

一个公式是良构式当且仅当它可以从（1）—（3）规则中推演。容易证明，是否有一个已知的式子决定着有效过程。就是，符号的序列是一个公式。

从语句的恰当描述得到添加逻辑公理的Z—F集合理论，推理规则和非逻辑公理。在ZF中引入非逻辑公理集中在P132—133。逻辑公理和推理规则如下：

逻辑公理：

（1）$A\rightarrow[B\rightarrow A]$。

（2）$[A\rightarrow[B\rightarrow C]]\rightarrow[[A\rightarrow B]\rightarrow[A\rightarrow C]]$。

（3）$[\neg A\rightarrow\neg B]\rightarrow[B\rightarrow A]$。

（4）$(\forall x)[A\rightarrow B(x)]\rightarrow[A\rightarrow(\forall x)B(x)]$

这里a是自由变元，在A中不出现量词。

（5）$(\forall x)A(x)\rightarrow A(a)$。这里$A(a)$是用自由变元a代替每在$A(x)$中出现的约束变元x而得到的公式。

推理规则

（1）由A和$A\rightarrow B$推演A。

（2）由A推出$(\forall x)A(x)$。这里$A(x)$是用x去代替每出现的自由变元而得到的。

我们不证明除定理外的逻辑结果。定理的证明在P114—6。它是以逻辑公理和推理规则为前提的。

我们用绕杆，$\vdash$，表示公式是可证的。$\vdash A$是可推演公式A的元语句。用推理规则，对上面的逻辑公理和非逻辑公理仍然用符号表示。仅用逻辑公理去表示A是可推演的，我们用$\vdash_{L_A}A$记之。我们说两个公式A和B是逻辑等价的当且仅当

$$\vdash_{L_A}A\longleftrightarrow B$$

第三章

相等

定义3.1. $a=b \overset{\triangle}{\longleftrightarrow} (\forall x)[x\text{属于}a \longleftrightarrow x\text{属于}b]$。

命题3.2.（1）$a=a$。

（2）$a=b \to b=a$。

（3）$a=b \wedge b=C \longleftrightarrow a=C$。

证明：（1）$(\forall x)[x\text{属于}a \longleftrightarrow x\text{属于}a]$。

（2）$(\forall x)[x\text{属于}a \longleftrightarrow x\text{属于}b] \to (\forall x)[x\text{属于}b \longleftrightarrow x\text{属于}a]$。

（3）$(\forall x)[x\text{属于}a \longleftrightarrow x\text{属于}b] \wedge (\forall x)[x\text{属于}b \longleftrightarrow x\text{属于}C] \to (\forall x)[x\text{属于}a \longleftrightarrow x\text{属于}C]$。

注：相等的直观概念是过程相同。对相等作解释是“等量可以代入等量”这一基本性质。也就是，如果$a=b$则能确定a也就确定b。特别地，如果一个已知公式有a则必有b，反之亦然：

$$a=b \to [A(a) \longleftrightarrow A(b)]。$$

这里$A(b)$是从A中每次出现的自由变元b去代替而得到的公式，$A(a)$是从A用每次出现相同的自由变元a去代替而得到的公式。

不需要把变换原理作公设，它能从定义3．1和下列较弱的原理推演。

公理1（外延性公理）

$$a=b \wedge a\text{属于}C \to b\text{属于}C。$$

命题3.3，$a=b \to [a\text{属于}C \longleftrightarrow b\text{属于}C]$。

证明：公理1和命题3.2（2）。

定理3.4. $a=b \to [A(a) \longleftrightarrow A(b)]$。

证明：（对A中逻辑符号数n用归纳法）如果$n=0$，则

为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

A(a)是c属于d，c属于a，a属于c或a属于a的形式。显然有

$$a=b\rightarrow[\,c\text{属于}d\longleftrightarrow c\text{属于}d\,]。$$

由相等的定义

$$a=b\rightarrow[\,c\text{属于}a\longleftrightarrow c\text{属于}b\,]。$$

由命题3.3

$$a=b\rightarrow[\,a\text{属于}c\longleftrightarrow b\text{属于}c\,]。$$

再由相等的定义和命题3.3分别有

$$a=b\rightarrow[\,a\text{属于}a\longleftrightarrow a\text{属于}b\,]$$

$$a=b\rightarrow[\,a\text{属于}b\longleftrightarrow b\text{属于}b\,]。$$

因此

$$a=b\rightarrow[\,a\text{属于}a\longleftrightarrow b\text{属于}b\,]$$

作为归纳假设，我们设逻辑符号数比n小的每一公式结果都是真的。如果$n>0$和$A(a)$有确定的逻辑符号数n则$A(a)$必须是下列形式

(1)$\neg B(a)$，(2)$B(a)\wedge C(a)$或(3)$(\forall x)B(a,x)$。

在情形(1)和(2)中，$B(a)$和$C(a)$的逻辑符号数比n小，从而由归纳假设

$$a=b\rightarrow[\,B(a)\longleftrightarrow B(b)\,],$$

$$a=b\rightarrow[\,C(a)\longleftrightarrow C(b)\,]。$$

由否定和合取的如下性质

$$a=b\rightarrow[\,\neg B(a)\longleftrightarrow\neg B(b)\,]$$

$$a=b\rightarrow[\,B(a)\wedge C(a)\longleftrightarrow B(b)\wedge C(b)\,]。$$

这样，如果$A(a)$是$\neg B(a)$或$B(a)\wedge C(a)$，

$$a=b\rightarrow[\,A(a)\longleftrightarrow A(b)\,]。$$

如果$A(a)$是$(\forall x)B(a,x)$，我们首先选择一个在$A(a,x)$中没有出现过的异于a和b的自由变元c，因为

B(a, C)的逻辑符号数比n小，因此由归纳假设

$a=b\rightarrow[B(a, C)\leftrightarrow B(b, C)]$。在这个公式中把C推广，使用逻辑公理4和下述逻辑结果

$(\forall x)[B(a, x)\leftrightarrow B(b, x)]\rightarrow[(\forall x)B(a, x)\leftrightarrow(\forall x)B(b, x)]$。可得结论

$a=b\rightarrow[(\forall x)B(a, x)\leftrightarrow(\forall x)B(b, x)]$。

注：外延性告诉我们，一个集合完全地由它的元素决定。由公理1的假设的一个偶然认识，外延性作为变换原理用于逻辑比集合论更有用处。这就启发我们，如果相等作为原始概念，则公理可以实施。无论何种情况，戴纳—斯科特已经证明不能超越弱系统。如果把相等作为原始逻辑概念添加外延性公理仍然是必要的。

第四章
类

我们指出，引入公理化集合论的一个目的是避免悖论。罗素悖论是这样一个悖论：由接受已知任何性质的朴素思想产生，存在这样一个集合，它的元素是具有已知性质的对象组成。就是，已知一个公式A包含一个自由变元，存在一个集合，它包含有A的所有对象且不具有A的对象。更形象地，存在这样一个集合a

$(\forall x)[x\text{属于}a\leftrightarrow A(x)]$。

这个原理被称为抽象公理，弗雷格收入他的《关于算术概念》，罗素在给弗雷格信中指出，由抽象公理出发导致下面悖论。

考虑公式b不属于b。如果存在这样集合a使

（∀x）［x属于a←→x不属于x］。

则特别地，

a属于a←→a不属于a。

有特殊性质的所有对象的聚合的概念是基本的，我们不能抛弃它。但是如果它被保留，怎样能排除悖论呢？策麦罗—弗兰克尔作如下研究。

对每个公式A（a，a_1，…，a_n）我们引入一个类的符号

｛x｜（A（x，a_1，…，a_n）｝

读作“使A（x，a_1…，a_n）成立的所有x的类。”类符合主解释是具有性质A的个体的类的概指。可以看出，类是集合概念的扩充。每一个集合都是一个类但不是每一个类都是一个集合。

我们用这样的方法把属于关系扩充到类的符号。一个对象是类｛x|A（x）｝的一个元素当且仅当这个对象是一个集合，它有类的定义性质。通过说明｛x|x不属于x｝是一个真类，就是说一个类不是一个集合则可排除罗素悖论。在任何一个类中它都不能是类的一个元素，包括它自身在内也不是一个集合。

把符号｛x|A（x）｝添加到对象语言中，这对推广公式规则和使加法公理确定新的符号是必要的。我们愿意作为定义去引入类的代替项。当然，它实质是提供简化原始符号的有效过程。我们开始用定义去代替所出现的类的符号。广义地说定义有下列规则：

定义4.1（1）如果a和b是自由变元，则a属于b是一个广义公式。

（2）如果A和B是广义公式，a和b是自由变元，则a属

于｛x|B(x)｝，｛x|A(x)｝属于b和｛x|A(x)｝属于｛x|B(x)｝是广义公式。

（3）如果A和B是广义公式则$\neg A$，$A \wedge B$，$A \vee B$，$A \rightarrow B$和$A \longleftrightarrow B$是广义公式。

（4）如果A是广义公式且x是约束变元则$(\exists x)A(x)$和$(\forall x)A(x)$是广义公式。

一个公式是广义公式当且仅当它是从（1）—（4）推演。

每一个广义公式的内涵是一个原始公式的缩写。一个集合属于一个类当且仅当它有类的定义性质，就是

a属于｛x|A(x)｝

当且仅当A(a)。

定义4.2．如果A和B广义上说是公式，则

（1）a属于｛x|A(x)｝$\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$A(a)。

（2）｛x|A(x)｝属于a$\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$$(\exists y)$〔y属于a$\wedge(\forall z)$[z属于y$\longleftrightarrow$(z)]〕。

（3）｛x|A(x)｝属于｛x|B(x)｝$\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$$(\exists y)$[y属于｛x|B(x)｝$\wedge(\forall z)$[z属于y$\longleftrightarrow$A(z)]]。

注：由定义4.2容易证明，广义上说每一个公式A对公式A_1来说是可约的。即它由下列规则唯一确定。

定义4.3．广义上说，如果A和B是公式则

（1）〔a属于b〕$_1$$\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$a属于b。

（2）[a属于｛x|A(x)｝]$_1$$\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$$A_1(a)$$\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$[A(a)]$_1$。

（3）〔｛x|A(x)｝属于a〕$_1 \overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$（∃y）〔y属于a∧（∀z）〔z属于y$\longleftrightarrow$A$_1$(z)〕〕。

（4）〔｛x|A(x)｝属于｛x|B(x)｝〕$_1 \overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$（∃y）〔B$_1$(y)∧（∀z）〔z∈y$\longleftrightarrow$A$_1$(z)〕〕。

（5）〔¬A〕$_1 \overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$¬A$_1$。

（6）〔A∧B〕$_1 \overset{\triangle}{\longleftrightarrow}A_1$∧B$_1$。

（7）〔(∀x)A(x)〕$_1 \overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$(∀x)A$_1$(x)。

命题4.4. 广义上说，每一个公式A对由A通过定义4.3的规则（1）—（7）唯一确定的公式A$_1$是可约的。

证明：（在A中对逻辑符号加类符号数n用归纳法）若n=0，就是A没有逻辑符号或类符号，则A必须是a属于b的形式。由定义4.3中的（1），A$_1$是a属于b。

由归纳假设，设符合命题条件的逻辑符号和类符号数小于n的公式是可约的。在广义上说，如果A是一个公式，它恰有n个逻辑符号和类符号数。且n>0则A必是下列形式之一：

（1）a属于｛x|B(x)｝，

（2）｛x|B(x)｝属于a，

（3）｛x|B(x)｝属于｛x|C(x)｝，

（4）¬B，

（5）B∧C，

（6）(∀x)B。

在每一情形中，B和C的逻辑和类符号数小于n故有分别由B和C和定义4.3的规则（1）—（7）唯一确定的公式B$_1$和C$_1$。

则通过规则（2）—（7）A唯一确定公式A_1。

注：从命题4.4知，广义上说每一个公式A是A_1的缩写。它的证明明显地假设存在一个有效过程使未知公式在广义上说是一个公式。这个过程的存在我们留给读者作练习。由A确定A_1的有效过程是直接的。

命题4.4告诉我们，定义4.1和4.2没有扩充类的概念而仅有扩充类的记号。如果A（x）是一个广义公式，则

$$\{x|A(x)\}\text{和}\{x|A_1(x)\}$$

是相同的类。这直接由命题4.4和现在定义类的相等得到。我们希望这个定义含有类与类之间相等而且集合和类之间也相等。为此我们首先引入一个项的概念。

一个项是指一个自由变元或一个类符号，我们用大写罗马字母A，B，C，…作为项的元变元。

定义4.5，如果A和B是项，则

$$A=B \overset{\triangle}{\longleftrightarrow} (\forall x)[x\text{属于}A\longleftrightarrow x\text{属于}B]。$$

命题4.6. $A\text{属于}B\longleftrightarrow(\exists x)[x=A\wedge x\text{属于}B]$。

证明：定义4.2和4.5。

命题4.7. 如果A，B和C是项，则

（1）$A=A$，

（2）$A=B\rightarrow B=A$，

（3）$A=B\wedge B=C\rightarrow A=C$。

证明与命题3.2类似，留给读者作练习。

命题4.8，如果A和B是项，T是一个广义公式则

$$A=B\rightarrow[T(A)\longleftrightarrow T(B)]。$$

用归纳法证明。这与定理3.4的证明类似留给读者练习。

命题4.9. $a=\{x|x\text{属于}a\}$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo