

# 高等数学 练习题集

西南交通大学公共数学系 \ 编

GAODENG  
SHUXUE  
LIANXITIJI



西南交通大学出版社  
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

# 高等数学练习题集

西南交通大学公共数学系 编

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

-----  
**图书在版编目 ( C I P ) 数据**

高等数学练习题集/西南交通大学公共数学系编.  
—成都:西南交通大学出版社,2011.8(2012.4重印)  
ISBN 978-7-5643-1269-5

I. ①高… II. ①西… III. ①高等数学—高等学校—  
习题集 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 137382 号  
-----

**高等数学练习题集**

西南交通大学公共数学系 编

责任编辑	张宝华
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网 址	<a href="http://press.swjtu.edu.cn">http://press.swjtu.edu.cn</a>
印 刷	四川锦祝印务有限公司
成品尺寸	210 mm×285 mm
印 张	9.25
字 数	218 千字
版 次	2011 年 8 月第 1 版
印 次	2012 年 4 月第 2 次
书 号	ISBN 978-7-5643-1269-5
定 价	18.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换  
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

# 前 言

本练习题集是根据“高等数学课程教学基本要求”，并按照课程的教学过程以章节顺序编排的，其参编人员都是从事该课程教学多年的教师。在编排方面，根据该课程各章、节教学内容的先后次序以及基本概念、基本方法、重点、难点，精选了各类练习题型，题型包含填空题、判断题、选择题、计算题、应用题、证明题等。每章还附有自测题，旨在检验学生对基本概念和基本理论的理解和掌握，挖掘解题思路，提高综合分析能力，巩固学习效果。

本练习题集是按照每周为一个教学单元，每个教学单元交一次作业的形式编排的。每题下方留有学生解题的空白，部分题目还给出了参考提示，以便于学生完成作业和教师批发作业。

本书可作为多学时高等数学课程的学生作业用书。

本练习题集是在《高等数学习题册》的基础上改编完成的。参加本书编写的主要人员有阳锐顺、梁涛、卿铭、何瑞文、秦应兵、苏宁等。本书的编写得到了西南交通大学数学学院（特别是公共数学系）的大力支持与帮助，在此一并致谢。

限于编者水平，不妥之处，敬请同行和读者批评指正。

编 者

2011年4月

# 目 录

<b>第一章 函数的极限与连续</b> .....	1
第一节 数列极限.....	1
第二节 函数极限.....	3
第三节 连续函数与间断点.....	6
极限与连续自测题.....	8
<b>第二章 导数与微分</b> .....	9
第一节 导数的概念.....	9
第二节 函数的求导法则.....	11
第三节 高阶导数.....	13
第四节 隐函数及参数方程所确定的函数的导数、相关变化率.....	15
第五节 微分.....	18
导数与微分自测题.....	19
<b>第三章 微分中值定理与导数的应用</b> .....	20
第一节 微分中值定理.....	20
第二节 洛必达法则.....	22
第三节 泰勒公式.....	24
第四节 函数的单调性与极值.....	25
第五节 曲线的凹凸性与函数图形、曲率.....	28
微分中值定理与导数的应用自测题.....	30
<b>第四章 不定积分</b> .....	32
第一节 不定积分的概念与性质.....	32
第二节 换元积分法.....	33
第三节 分部积分法.....	35
第四节 有理函数的积分.....	38
不定积分自测题.....	40
<b>第五章 定积分</b> .....	41
第一节 定积分的概念与性质.....	41
第二节 微积分基本公式.....	42
第三节 定积分的换元法与分部积分法.....	44
第四节 广义积分.....	47
定积分自测题.....	48
<b>第六章 定积分的应用</b> .....	50
第一节 定积分在几何学上的应用.....	50
第二节 定积分在物理学上的应用.....	53
定积分自测题.....	54
<b>第七章 微分方程</b> .....	55
第一节 微分方程的基本概念.....	55

第二节	可分离变量的微分方程与齐次方程	56
第三节	一阶线性微分方程与贝努利方程	58
第四节	可降阶的高阶微分方程	60
第五节	高阶线性微分方程	61
第六节	二阶常系数齐次线性微分方程	62
第七节	二阶常系数非齐次线性微分方程	63
第八节	欧拉方程及常系数线性微分方程组	65
	微分方程自测题	66
<b>第八章</b>	<b>空间解析几何与向量代数</b>	<b>67</b>
第一节	向量的运算与曲面、空间曲线的方程	67
第二节	平面、直线及其方程	71
	空间解析几何与向量代数自测题	73
<b>第九章</b>	<b>多元函数微分法及其应用</b>	<b>74</b>
第一节	多元函数的基本概念	74
第二节	偏导数与全微分	75
第三节	多元复合函数与隐函数的求导	77
第四节	多元函数微分学的几何应用、方向导数与梯度	80
第五节	多元函数的极值及其求法	83
	多元函数微分法及其应用自测题	85
<b>第十章</b>	<b>重积分</b>	<b>86</b>
第一节	二重积分的概念、性质与计算	86
第二节	三重积分的计算	91
第三节	重积分的应用	94
	重积分自测题	96
<b>第十一章</b>	<b>曲线积分与曲面积分</b>	<b>97</b>
第一节	曲线积分	97
第二节	格林公式及其应用	100
第三节	对面积的曲面积分	103
第四节	对坐标的曲面积分与高斯公式	104
	曲线积分与曲面积分自测题	107
<b>第十二章</b>	<b>无穷级数</b>	<b>108</b>
第一节	常数项级数	108
第二节	幂级数	112
第三节	傅里叶级数	114
	无穷级数自测题	115
	高等数学 I 综合测试题(一)	116
	高等数学 I 综合测试题(二)	118
	高等数学 II 综合测试题(一)	120
	高等数学 II 综合测试题(二)	122
	<b>习题提示、参考答案</b>	<b>124</b>

## 第一章 函数的极限与连续

### 第一节 数列极限

1. 用定义证明下列极限.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - a^2}}{n} = 1.$

2. 若数列  $\{a_n\}$  含有两个收敛子列:  $a_{2n} \rightarrow a$ ,  $a_{2n+1} \rightarrow a$ , 试证明  $a_n \rightarrow a$ .

3. 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ ; 举例说明反之不真, 但当  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

4. 利用夹逼定理求下列极限.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} \right).$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \dots + \sin^2 n}$ .

(3) 设方程  $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1 (n \geq 2)$  在  $(0,1)$  内有唯一根  $x_n$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

5. (1) 已知  $x_1 = 3, x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

(2) 已知  $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + x_n)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .



第二节 函数极限

1. 写出下列极限的定义.

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$

2. 用定义证明下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \ (a \geq 0)$

3. 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$

4. 求下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{x}{n}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x.$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx}.$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x.$

(7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}.$

(8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$

5. 证明:  $\beta$  与  $\alpha$  为等价无穷小的充要条件是  $\beta = \alpha + o(\alpha).$

6. 利用等价无穷小求下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^n}{(\sin x)^m}.$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}.$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$ .

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ .

(6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x}$ .

(7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 2 \sin x)^{\frac{1}{x}}$ .

(8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

(9)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ .

7. 计算下列极限.

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^m)}{\ln(1+x^n)}$ , 其中  $m, n$  为自然数.

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$  及  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$ .

第三节 连续函数与间断点

1. 指出下列函数的间断点并说明其类型.

(1)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ .

(2)  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ .

2. 试确定  $\alpha, \beta$  的值使

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \beta, & x = 0 \end{cases}$$

在点  $x = 0$  处连续.

3. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且对  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 证明  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上处处连续.

4. 证明: (1) 方程  $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个根 ( $n \geq 2$ ).

(2) 方程  $x = \sin x + k$  ( $k > 0$ ) 至少有一个正根.

(3) 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) < a$ ,  $f(b) > b$ , 则方程  $f(x) = x$  在  $(a, b)$  内有一个根.

(4) 证明: 方程  $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$  的三个根都是实根.

5. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

证明: 存在  $\xi_1 \in (a, b)$ ,  $\xi_2 \in (a, b)$  使得

$$f(\xi_1) = \frac{1}{n}[f(x_1) + \dots + f(x_n)]$$

$$f(\xi_2) = \frac{2}{n(n+1)}[f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n)]$$

6. 若  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 证

明:  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

### 极限与连续自测题

一、填空题.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 设常数  $a \neq \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 若  $x \rightarrow 0$  时  $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$  与  $\sin^2 x$  是等价无穷小, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二、计算题.

1. 设  $x_1 = 10$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$  ( $n=1,2,\dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

2. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2+e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right]$ .

3. 设  $0 < x_1 < 3$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$  ( $n=1,2,\dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  的极限存在, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

4. 已知  $0 < x_1 < \pi$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$  ( $n=1,2,\dots$ ),

(1) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求其值;

(2) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ .

## 第二章 导数与微分

## 第一节 导数的概念

1. 根据定义求函数  $f(x)$  的导数.

(1)  $f(x) = \cos x$ .

(2)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$

2. 设  $f(x)$  是偶函数, 且  $f'(0)$  存在, 证明  $f'(0) = 0$ .

3. 设  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处可导, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 证明  $|f(x)|$  在点  $x = x_0$  处也可导; 若  $f(x_0) = 0$ , 问结论是否仍成立?

4. 已知  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 求下列极限.

(1)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h}$ .

(2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ .

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f \left( x_0 + \frac{1}{n} \right) - f(x_0) \right]$

(4) 设  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

5. 在曲线  $y = e^x$  上求一点, 使曲线在该点处的切线过原点.

6. 设  $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 0, \\ ax + b, & x > 0, \end{cases}$  试确定  $a, b$  的值使  $f(x)$  在点  $x = 0$  处可导.

7. 设  $f(x) = (x^2 - 1)g(x)$ , 其中  $g(x)$  在点  $x = 1$  的某个邻域内有定义, 问  $g(x)$  应满足什么条件才能确保  $f(x)$  在  $x = 1$  处可导.

8. 考察下列函数在分段点处的连续性和可导性.

(1)  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(2)  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ x - 1, & x < 1. \end{cases}$



## 第二节 函数的求导法则

1. 求下列函数的导数.

(1)  $y = -x^{-3} \ln x + \cos x$ .

(2)  $y = \frac{1}{\ln x}$ .

(3)  $y = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$ .

(4)  $y = \frac{\sin x}{x}$ .

(5)  $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ .

2. 求下列函数的导数.

(1)  $y = (2x+5)^4$ .

(2)  $y = \ln(2 + \cos x)$ .

(3)  $y = e^{-\cos x}$ .

(4)  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ .

(5)  $y = \tan \frac{1}{1+x^2}$ .

(6)  $y = \arccos \frac{1}{x}$ .

(7)  $y = \arccos e^{-x}$ .

(8)  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

(9)  $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ .

(10)  $y = \ln(\sec x + \tan x)$ .