Mathematics

高等数学练习题集

GAODENG SHUXUE LIANXITI JI

西南交通大学公共数学系\编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高等数学练习题集

西南交通大学公共数学系　编

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（C I P）数据

高等数学练习题集/ 西南交通大学公共数学系编.
—成都：西南交通大学出版社，2011.8（2012.4 重印）
ISBN 978-7-5643-1269-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①西… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－习题集 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 137382 号

高等数学练习题集

西南交通大学公共数学系　编

责任编辑	张宝华
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	四川锦祝印务有限公司
成品尺寸	210 mm×285 mm
印　　张	9.25
字　　数	218 千字
版　　次	2011 年 8 月第 1 版
印　　次	2012 年 4 月第 2 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1269-5
定　　价	18.00 元

前　言

本练习题集是根据“高等数学课程教学基本要求”，并按照课程的教学过程以章节顺序编排的，其参编人员都是从事该课程教学多年的教师。在编排方面，根据该课程各章、节教学内容的先后次序以及基本概念、基本方法、重点、难点，精选了各类练习题型，题型包含填空题、判断题、选择题、计算题、应用题、证明题等。每章还附有自测题，旨在检验学生对基本概念和基本理论的理解和掌握，挖掘解题思路，提高综合分析能力，巩固学习效果。

本练习题集是按照每周为一个教学单元，每个教学单元交一次作业的形式编排的。每题下方留有学生解题的空白，部分题目还给出了参考提示，以便于学生完成作业和教师批发作业。

本书可作为多学时高等教学课程的学生作业用书。

本练习题集是在《高等数学习题册》的基础上改编完成的。参加本书编写的主要人员有阳锐顺、梁涛、卿铭、何瑞文、秦应兵、苏宁等。本书的编写得到了西南交通大学数学学院（特别是公共数学系）的大力支持与帮助，在此一并致谢。

限于编者水平，不妥之处，敬请同行和读者批评指正。

编　者

2011 年 4 月

目　录

班级____________ 姓名______________ 学号____________

第一章 函数的极限与连续

第一节 数列极限

1. 用定义证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-a^2}}{n}=1$.

2. 若数列$\{a_n\}$含有两个收敛子列：$a_{2n}\to a$，$a_{2n+1}\to a$，试证明$a_n\to a$.

3. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；举例说明反之不真，但当$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

4. 利用夹逼定理求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 1+\sin^2 2+\cdots+\sin^2 n}$.

5.（1）已知 $x_1=3,\ x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（2）已知 $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1+x_n)$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（3）设方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1\,(n\geqslant 2)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一根 x_n ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

班级__________ 姓名__________ 学号__________

第二节 函数极限

1．写出下列极限的定义.

（1） $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$.

（2） $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

（3） $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2．用定义证明下列极限.

（1） $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

（2） $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\ (a \geqslant 0)$

3. 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$，证明 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

4．求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x \sin x}$.

（2） $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin \dfrac{x}{n}$.

（3） $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

班级__________ 姓名__________ 学号__________

（4） $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

（5） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$.

（6） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$.

（7） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

（8） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

5. 证明：β 与 α 为等价无穷小的充要条件是 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

6. 利用等价无穷小求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$.

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

班级__________ 姓名__________ 学号__________

（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$.

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

（6） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$.

（7） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

（8） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

（9） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

7．计算下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^m)}{\ln(1+x^n)}$，其中$m,n$为自然数.

（3） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$及$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

班级__________ 姓名__________ 学号__________

第三节 连续函数与间断点

1. 指出下列函数的间断点并说明其类型.

（1） $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

（2） $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

2. 试确定 α,β 的值使

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ \beta, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对 $\forall x,y\in R$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明 $f(x)$ 在 R 上处处连续。

4. 证明：（1）方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根 $(n\geqslant 2)$.

（2）方程 $x=\sin x+k\ (k>0)$ 至少有一个正根.

（3）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，则方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 内有一个根.

（4）证明：方程 $x^3+x^2-4x+1=0$ 的三个根都是实根.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$$

证明：存在 $\xi_1\in(a,b)$, $\xi_2\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi_1)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$$

$$f(\xi_2)=\frac{2}{n(n+1)}[f(x_1)+2f(x_2)\cdots+nf(x_n)]$$

6. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

班级__________ 姓名____________ 学号__________

极限与连续自测题

一、填空题.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________________.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$______.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$______________.

6. 设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$______________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______________.

8. 若 $x\to 0$ 时 $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $\sin^2 x$ 是等价无穷小，则 $a=$______________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______________.

二、计算题.

1. 设 $x_1=10$， $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

3. 设 $0<x_1<3$， $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. 已知 $0<x_1<\pi$， $x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$，

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值；

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

班级__________ 姓名__________ 学号__________

第二章 导数与微分

第一节 导数的概念

1．根据定义求函数 $f(x)$ 的导数.

（1） $f(x)=\cos x$.

（2） $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

2．设 $f(x)$ 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

3．设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，且 $f(x_0)\neq 0$，证明 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处也可导；若 $f(x_0)=0$，问结论是否仍成立?

4．已知 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，求下列极限.

（1） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$.

（2） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$.

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$

（4）设 $f(0)=0$ ，$f'(0)=2$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

5．在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上求一点，使曲线在该点处的切线过原点.

6．设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+1, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0,\end{cases}$ 试确定 a,b 的值使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导.

7．设 $f(x)=(x^2-1)g(x)$ ，其中 $g(x)$ 在点 $x=1$ 的某个邻域内有定义，问 $g(x)$ 应满足什么条件才能确保 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

8．考察下列函数在分段点处的连续性和可导性.

（1） $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

（2） $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ x-1, & x<1.\end{cases}$

班级____________ 姓名______________ 学号____________

第二节 函数的的求导法则

1．求下列函数的导数.

（1） $y=-x^{-3}\ln x+\cos x$.

（2） $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

（3） $y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$.

（4） $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

（5） $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

2．求下列函数的导数.

（1） $y=(2x+5)^4$.

（2） $y=\ln(2+\cos x)$.

（3） $y=e^{-\cos x}$.

（4） $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

（5） $y=\tan\dfrac{1}{1+x^2}$.

（6） $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

（7） $y=\arccos e^{-x}$.

（8） $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

（9） $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

（10） $y=\ln(\sec x+\tan x)$.