高等线性代数

Advanced Linear Algebra

◈ 张贤科

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Advanced Linear Algebra

高等线性代数

Gaodeng Xianxing Daishu

张贤科

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是“线性代数”或称“高等代数”教材，内容全面深入，视角现代，讲解清晰简明。适用于理工类高校的学生，尤其是数学、信息、计算机、电子、物理和力学机电等专业。作者长期在中国科学技术大学、清华大学教学和从事代数数论研究，许多感悟融入此书。内容包括数与多项式和解析几何简介，线性方程组，矩阵，线性空间及其变换，空间分解与矩阵相似，二次型和双线性型，欧空间和酉空间等。附录中简要介绍了群环域，正交与辛几何，Hilbert 空间，张量积与外积等。全书含大量精心选编的例题、习题、提示、中英和英中索引、参考书目等。

图书在版编目(CIP)数据

高等线性代数 / 张贤科编著. —北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978 - 7 - 04 - 035199 - 6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 141046 号

策划编辑 田 玲　　责任编辑 田 玲　　封面设计 张志奇　　版式设计 杜微言
插图绘制 尹文军　　责任校对 刘 莉　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400 - 810 - 0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	32.25	版　　次	2012 年 8 月第 1 版
字　　数	590 千字	印　　次	2012 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010 - 58581118	定　　价	44.80 元

物 料 号 35199 - 00

引　言

本书为“线性代数”或称“高等代数”的系统教材，改写自《高等代数学》(第2版，清华大学出版社)，内容全面深入，视角现代，适用于理工类高校学生。

作者长期在中国科学技术大学、清华大学讲授此课和其他课程，并长期从事代数和现代数论研究工作，已将许多感悟融入此书中。

由《高等代数学》改写为本书时，主要是缓解了部分难度，重写、增加了部分内容，减下内容的主体放入了附录。总体教学内容与原书相当，但适应面更广了。

《高等代数学》从一版到再版一直很受校内外同学欢迎，也被多方采用或参阅。此书源于作者在中国科学技术大学的教学，也受惠于作者在该校学习和科研工作的长期经历，内容和方法风格都深受华罗庚等老一辈科学家在中国科学技术大学的教学和思想理念影响。自1993到清华大学后，又在数、理基科班、学堂班和钱学森力学班等讲授此课，清华许多优秀学生给予作者许多激情，焕发出不少新想法，都影响到本书的编写和多次修改。特别如6.8节“简求Jordan标准形”，就是不久前备课中突然悟得的。学生也时有好的想法，例9.10就改用了学生梁超的证法，并标注了他的名字。作者长期从事代数数论和算术代数几何领域的研究工作，发表约80篇学术研究论文，获得过国家自然科学奖等奖项。这些教学和科研经历以及在其中的感悟心得多少都糅合融入本书，也影响了本书的风格特色。当然，在教学和写书时，也参阅了国内外一些教材，尤其是一些国外著名大学新近的教材，以及研究生教材。最近到南方科技大学给首届实验班授课，也有许多启发。

从总体看，本书比较强调基础，例如矩阵方法阐发得很充分，利于读者建立坚实深厚的基础。在阐述基础时，也适当采用现代数学视角，联系现代数学，并有带星号的课外阅读内容。另一方面，本书也精心、系统地讨论了进一步的理论，例如多种空间的分解、变换和内积，路线方法很有讲求，均非一般。最后还列出了选读内容，如张量积与外积、Hilbert空间、正交几何与辛几何、群环域等近代重要知识。

在改写《高等代数学》时，主要是重写了第一章(数与多项式)，降低了难度，原书一些难点已移至附录。在前面增加了4节简要的解析几何，利于学生

的衔接、适应和应用。增加了6.8节“简求Jordan标准形”。删除了最后三章，将其内容简化后收入附录中。此外，有许多内容的改写、删减或增加，有的是新思维方法，有的是为了更利于学习。完全重写的部分有：6.7节，6.4节四元数，4.4节前部，9.9节定理9.20及其说明，7.9节系6，9.11节开始几段，等等。事实上，各节都有改动。

第1章，介绍几何和代数基础，即解析几何要义、数与多项式。简要的解析几何，有时可以不讲而留作学生参考自学。反之，如果学生不适应抽象，也可先略去数与多项式部分，待到学期最后再讲。

第2至6章的内容，是线性代数的最基本内容，本书讲解比较深入系统。第2章主要讲行列式，也引出矩阵、行向量，讲了较深的一般性Laplace展开，一般性矩阵乘积的行列式。

第3章，线性方程组。由此引出矩阵的行变换、秩。第3.5节关于解的结构的讨论，体现本书特色；连同后面例题，利于对线性相关和方程组的深透理解。选读有结式与消去法，既古老又有生命力。

第4章，矩阵。本章充分体现本书在矩阵方面的独特之处，体现华罗庚(和曾肯成等)老一辈科学家在中国科学技术大学的教导和传统影响。单就事论事而言，他们神妙的矩阵功底和其他基础功夫，以及对深厚基础的强调和影响，使历届以来的中国科学技术大学学生长久受益。本章的写作是作者用心的。课外选读内容有矩阵的广义逆、最小二乘法，都有独特简洁的讲法。读来生动有趣，在数学和应用上会很受益。

第5章，线性空间。商空间是课外选读，但最好课堂上简单讲一讲。

第6章，线性变换。这一章是重点也是难点之一，包含多种重要概念和方法。许多地方做了特别编写。“简求Jordan标准形”一节是作者新发现的独特方法，可以简洁得到Jordan标准形。课外选读是有趣有用的“线性表示介绍”。

第7章，方阵相似标准形和空间分解，是本书核心章，许多毕业生反映此章对他们后来的学习工作受益非常大。主要讲解了准素、循环分解，复、实数域和一般域上的Jordan标准形；另一条路线是：多项式系数矩阵的相抵、不变因子、初等因子等。孙子定理为引子。选读有方阵函数、方阵交换条件、模及其分解介绍。

第8章，二次型和方阵相合。前4节较简单基本，后面讲解双线性型和对偶空间等较深概念。选读为无限维线性空间、二次超曲面的仿射分类。

第9章，欧几里得空间与酉空间，重点是变换与正交(酉)相似，本书处理有特色。选读是二次超曲面的正交分类、变换族与群表示介绍。

附录包括正交几何与辛几何，Hilbert空间，张量积与外积，群环域等知识

的简要介绍。它们都是重要学科知识的简介，概括而简练，对扩大视野、参考应用都很有益。还简要介绍了集合与映射的简单概念符号，无限集，拓扑空间等。并附英－中和中－英名词索引。

丰富的例题及其精心的解法，是本书的特色，读者宜珍惜善用。每章后有难易不等的各类习题，据历届同学反映，做了本书的大部分习题之后，再做其他题就不会遇到多少问题了。书后有答案与提示。读者也可参阅《高等代数解题方法》(第2版，许甫华、张贤科著)，有详细分析和解答。

本书的教程，一般要两学期，特殊情况下也可一学期。对于数学、信息、物理、电子或计算机等学科，宜两学期每周各4学时，另有两周或一周一次习题课，第一学期大约讲到第6章，可略去带星号的部分。学生获得的知识水平和深厚程度，将可惠其在国内外的后续学习和工作中无虞。

对于工科，可第1学期每周4学时，第2学期每周2学时，略去部分内容，如略去第6至9章的部分内容(或不给出证明而介绍结果，例如第7章可略去1～5节或其证明，重点讲解7～9节)。这样学下来，学生的基础也是很厚实的。

对于希望一个学期内4学时讲完的课程，可以主要讲解第2至6章，加第8章的前4节(还可略去少量难点)。

线性代数学是众多理论和应用的基础，与微积分并称为大学中最根本的两门基础课。但初学代数的人，会很不适应，因为它的思维方式不同于"一般"。其实，这正是代数的力量所在，它的高度"创新性"和"抽象性"，曾使它的诞生难为世人接受，却也使它从诞生之日起就解决了诸多历史难题。

近代意义上的"代数学"诞生于19世纪初期，标志性事件是Galois用群的方法解决了方程的根式解难题(即5次以上代数方程根式解问题)。两千多年的不解历史之谜——古希腊三大名题，也因代数的兴起先后被解决。抽象代数学的新风一扫两千多年的迷雾。她的立意是如此有革命性，与传统的思维方式是如此的不同，令当时的许多数学大师(例如Cauchy, Poisson)面对她时都举止失措(详见作者著《古希腊名题与现代数学》)。数论大家A. Selberg指出："今天的数学主要关心的是结构以及结构之间的关系，而不是数之间的关系。这种情况最初发生在1800年左右，首次的突破是抽象群概念的引入。目前它在数学领域中已经无所不在。"几何拓扑大师H. Cartan指出："我们目睹了代数在数学中名副其实的到处渗透"，目睹了"目前数学的代数化"。

按照权威的N. Bourbaki的数学结构主义，全部数学是基于三种"母结构"：代数结构、顺序结构、拓扑结构。它们相互组合、分化，生发出全部数学。像代数数论、代数几何、模形式、算术代数几何、代数K理论、群论、

环和代数理论、李群、李代数、群与代数表示论、同调代数、代数拓扑、泛函分析、范畴理论、拓扑代数，等等，都是代数学衍生的蓬勃兴盛的现代数学分支。即使传统上认为是分析和几何的分支，像微分几何，代数学在其中的影响也很大(Cartan 语：把纯粹代数中的定理用来考虑分析问题)。在应用方面，代数学是处理“离散”（数字化)和“抽象”（概括性)问题的主要方法，随着信息化的兴起，代数的应用越来越深广。数字化社会不觉浩荡而来。“当今如此广泛称颂的高科技在本质上是数学技术”——曾任美国总统科学顾问的 E. David道出了技术真相。

而线性代数，正是代数学的基础和大门，也是数学和几乎所有科学学科、技术工程的必备基础。例如在微分方程、量子物理、统计学、信息计算机等中，都有非常实质性的应用。

线性代数学的真正诞生，可以说是在 1888 年，标志是“线性空间”的抽象概念由 G. Peano 在 1888 年的书中定义。当然，线性代数中某些概念的来源，可以追溯很远，可以追溯到古老的线性方程组，后来的解析几何，线段向量和复数。由方程组的系数就引起行列式(Leibniz 1693) 和 Cramer 法则(1750)。其后引入矩阵及其运算(Sylvester 1848，Cayley 1855)，矩阵乘法来自于线性变换的复合。复数的成功引发了四元数(Hamilton 1843)和 Grassmann 代数(1862)等的发展，不断的探索引致对这些代数中的乘法的“割爱”，最终导致对抽象线性空间的定义(1888)和研究。此后，线性代数有各方面的发展和应用，而且直到最近还在发展着。

代数和其他现代科学，虽然难学，但有志者事竟成。现在的困难，就是将来的高度。中国科学的现代化，正需要也正召唤有志的青年。清华的钱学森班，是培养拔尖人才的班。作者从开始教他们代数，就被学生的学习激情和优秀，及校院系的重视深深感动，特作“钱学森班赞”赠之。录此与有志青年们共勉：

前辈宏图九天开，
学子奋发创未来。
森木千丈皆梁栋，
班生奇志依云裁。

第二年(2010)夏季，又赠该班同学诗，还在中秋晚会上歌之：

去岁迎君菊初黄，
如今满苑荷花香。
夜读需解莲心苦，
映日根下藕节长。

今春到南方科技大学教学，这是一所教改实验校。开学时，作“南方科大创校颂”：

南国春来天下先，
方结硕果又花妍。
科教兴邦千秋事，
大道欲行我当前！

《易·乾》曰：“先天下而天弗违，后天而奉天时。”故“先天弗违，后天奉时”，应是改革者和有志者的箴言。大道之行，天下大同，是中华民族远古以来的梦。中华民族今日要乘凭历史机遇实现的伟大崛起，将谱写超越千年理想的绚烂篇章。中华的崛起，现在科教文化已成关键。科教崛起，势在必然。大道必欲实行，何人争先？黄埔、抗大、中科大的校歌，都高唱勇作时代“先锋”的强音。现在新时代的历史大业，正在呼唤新时代的“先锋”向前！

张贤科
2011 年 10 月

目　　录

第1章　几何与代数基础

线性代数学是具有根本重要性的数学基础，理论影响和应用都很广泛深入.

本章简洁地介绍解析几何、几何向量、数和多项式等. 这些是学习线性代数的基础，其本身也很重要.

先介绍**解析几何与几何向量**.

几何学(geometry)一词原意是“土地测量”，来源于古埃及在尼罗河每年泛滥淤积后对土地的测量. 一片平坦的地面，一方平整的石板表面，这些自然界的存在，促使人类形成“平面”的概念. 地面上的分界，石面上的裂纹，一丝阳光，促使人类形成“线”和“直线”的概念. 线的分界和末端，促使形成“点”的概念. 逐步地，人类由这些概念及其关系发展出抽象的公理化的几何学，用以反映和描述物体的位置和大小关系. 其中古希腊 Euclid(欧几里得)的《几何原本》(约公元前 300 年)影响最大. 但到 1899 年 Hilbert(希尔伯特)才将其公理体系完善. 在此公理体系中，点、直线、平面是作为不定义元素，然后用五组公理规定这些元素的性质和关系，由此可逻辑地演绎出欧几里得几何学的所有结论. 后来，人们又发展出其他几何学，如射影几何学，它们也是现实存在的某种反映和抽象化.

P. de Fermat(费马)和 R. Descartes(笛卡儿)分别在 1629 和 1637 年写书，开创了坐标几何，也称为解析几何，将数及代数运算与几何图形相联系对应. 发展到现代数学，几何空间、图形以及图形间的关系，广泛地以数或数组、代数关系(方程)以及映射表示.

这里，在中学平面几何(二维)和立体几何(三维)基础上，作较深入简洁的讨论.

1.1　向量的运算

首先考虑在空间中取**坐标系**，从而赋予点以**坐标**.

先考虑一条直线. 取定直线上一点(常记为 O，称为原点)和直线的方向(称为正向)，取定线段长度的单位，则称在直线上建立了一个坐标系，称此直线为**(实)数轴**. 直线上的任一点 P 对应于一个实数 $x=\pm|OP|$，正负依$\overrightarrow{OP}$的

指向而定($\overrightarrow{OP}$为由 O 到 P 的有向线段，称为**向量**；$|OP|=|\overrightarrow{OP}|$为 OP 的长度). x 称为点 P 的坐标，P 点也记为 $P(x)$或(x)，称为 x 点. 这样，数轴上的点集和实数集$\mathbb{R}$之间就建立了一一对应的关系.

再看一张平面. 取定平面上一点(常记为 O，称为原点)和过此点的两条互相垂直的数轴，分别称为 x 轴和 y 轴，它们的原点都在 O. 则称在此平面中建立了直角坐标系 Oxy. 对此平面上的任一点P，过 P 分别作 x，y 轴的垂线，垂足 P_x，P_y的坐标分别记为 x，y. 则(x,y) 称为点 P 的坐标. 于是该平面上的点 P 和有序实数对(x,y)之间一一对应. 通常，建立坐标系的人如下选取轴的方向(此时称 Oxy 为**右手直角坐标系**)：人面对该平面与自己右手掌心，让拇指指向 x 轴正向，食指指向 y 轴正向. 进而，常取 x 轴横而向右，y 轴纵而向上，长度单位相同，从而轴(坐标)分别称为横、纵轴(坐标).

与上述类似，可以在立体几何空间中建立坐标系. 在空间中取定一点(常记为 O，称为原点)和三条过此点的两两垂直的数轴，分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，它们的原点都在 O. 这时称在空间中取定了直角坐标系 $Oxyz$. 对空间中的任一点 P，过 P 分别作平面平行于 yz 平面(即 y 轴和 z 轴所在平面)，xz 平面和 xy 平面，分别交 x，y，z 轴于 P_x，P_y，P_z(称$\overrightarrow{OP_x}$,$\overrightarrow{OP_y}$,$\overrightarrow{OP_z}$分别为$\overrightarrow{OP}$在 x,y,z 轴上的投影)，它们在 x，y，z 轴的坐标分别记为 x，y，z. 则(x,y,z) 称为点 P 的坐标. 于是空间中的点 P 和有序三实数组(x,y,z)之间一一对应. 点 P 常记为 $P(x,y,z)$或(x,y,z). 建立坐标系的人(研究者)通常选取 x，y，z 轴的方向和关系如下(此时称 x,y,z 轴构成**右手系**，称坐标系 $Oxyz$ 为**空间右手直角坐标系**，或三维右手笛卡儿直角坐标系)：将右手拇指、食指分别指向 x，y 轴的正向，中指稍弯向手心可指向 z 轴正向. 三个数轴上的单位长度常取为相同.

在直角坐标系之下，空间中两点 $P(x,y,z)$和 $Q(a,b,c)$的距离为

$$|PQ|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

现在讨论向量.

空间中的有向线段，称为**向量**(vector)或**矢量**(有时也称为几何向量，以区别于以后定义的含义更广泛的向量). 而且如果两个向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$经过平行移动能够重合(包括方向重合)，则规定二者是相等的. 所以这里的向量也称为**平移自由向量**. 这样一来，我们可以认为**所有的向量原本都是以原点为起点的**. 也就是说，任意向量均可表示为有向线段$\overrightarrow{OP}$. 点 P 的坐标(x,y,z)也称为向量$\overrightarrow{OP}$的坐标. 在不致引起混淆的情况下，常将向量与其坐标等同，即写作$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$. 称$|\overrightarrow{OP}|=|OP|$为向量长度.

立体空间中的向量全体记为$\mathbb{R}^3$，称为三维向量空间. 类似地，一个平面

(直线) 中的向量全体记为$\mathbb{R}^2$($\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$),称为二维(一维)向量空间.

可以定义向量的两种运算:加法和数乘. **加法**按“平行四边形法则”进行,也就是说,设向量$\alpha=\overrightarrow{OA}$,$\beta=\overrightarrow{OB}$,作平行四边形$OACB$,则定义$\alpha+\beta=\overrightarrow{OC}$(图1.1). 另一种方法是:平移使得$\alpha=\overrightarrow{OA}$,$\beta=\overrightarrow{AC}$,则$\alpha+\beta=\overrightarrow{OC}$(图1.2). 多个向量的加法也可以这样首尾相接得到,因两点间直线最短,故$|\alpha_1+\cdots+\alpha_s|\leqslant|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_s|$.

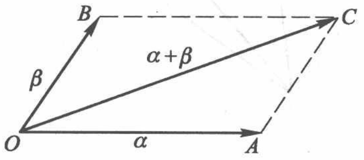

图 1.1

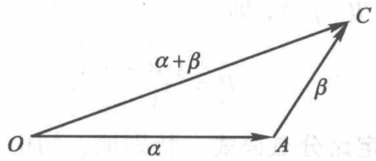

图 1.2

加法显然满足结合律,零向量$0=\overrightarrow{OO}$(即长度为0的向量)加任何向量都不改变该向量,每个向量α都有一个负向量α',使得$\alpha+\alpha'=0$(α'与α同长但反向,记为$-\alpha$). 由此可定义向量的**减法**(加法的逆运算),即$\gamma-\alpha=\gamma+(-\alpha)$,如图1.3. 实数$\lambda\in\mathbb{R}$与向量$\alpha=\overrightarrow{OA}$的**数乘**记为$\lambda\alpha=\lambda\overrightarrow{OA}$,定义为与$\overrightarrow{OA}$平行(即起点相同时共线)而长度是其$\lambda$倍的向量,且依照$\lambda$为正或负规定$\lambda\alpha$与$\alpha$同向或反向. 有时称$\lambda\alpha$是$\alpha$的$\lambda$倍. 从坐标上看,设$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$,$\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$,则易知

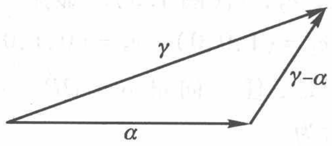

图 1.3

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),$$
$$\lambda\overrightarrow{OA}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

事实上,平行四边形$OACB$的对角线$\overrightarrow{OC}$到x轴的投影,显然是$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{AC}$($=\overrightarrow{OB}$)投影的和,所以$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$的第一个坐标为$a_1+b_1$. 同理可得其余坐标. $\lambda\overrightarrow{OA}$的坐标显然.

易知两个向量α,β**共线**(即起点平移到同一点时共线)的充分必要条件是:其中一个向量是另一个的常数倍. 这相当于存在不全为零的实数λ,μ使$\lambda\alpha+\mu\beta=0$(此时称α,β线性相关),也相当于它们的坐标成比例.

类似地,三个向量α,β,γ**共面**(即起点平移到同一点时共面)的充分必要条件是:其中一个向量可以表示为另两个向量的“常数倍之和”(称为“线性组合”). 这相当于存在不全为零的实数λ,μ,ν使$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$(此时称$\alpha,\beta,\gamma$线性相关). 例如$\lambda\neq0$时,$\alpha=(-\mu/\lambda)\beta+(-\nu/\lambda)\gamma$.

线段AB的**定比分点**P,是直线AB上的一点,使得

$$\overrightarrow{AP}/\overrightarrow{PB}=\lambda/\mu$$

为预先指定的实数(即$\overrightarrow{AP}=(\lambda/\mu)\overrightarrow{PB}$，亦即$|AP|:|PB|=\lambda:\mu$，且依$\lambda/\mu$的正负定$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{PB}$方向的同异)，如图1.4.

任取一点O(例如原点)，简记$\overrightarrow{OA}=\vec{A}$，其余类似. 则定比条件化为$\mu(\vec{P}-\vec{A})=\lambda(\vec{B}-\vec{P})$，$(\lambda+\mu)\vec{P}=\lambda\vec{B}+\mu\vec{A}$，即

$$\vec{P}=\frac{\lambda\vec{B}+\mu\vec{A}}{\lambda+\mu}.$$

这称为**定比分点公式**. 特别地，知中点公式为$\vec{P}=(\vec{B}+\vec{A})/2$.

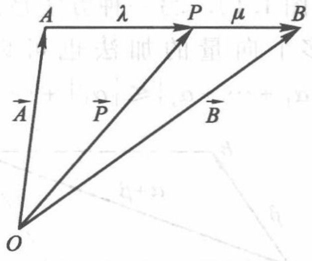

图1.4

空间中取定直角坐标系$Oxyz$后，将x，y，z轴上单位(长)向量分别记为e_1，e_2，e_3(图1.5). 显然

$$e_1=(1,0,0),\quad e_2=(0,1,0),\quad e_3=(0,0,1).$$

于是，任一向量$\alpha=\overrightarrow{OP}=(a_1,a_2,a_3)$可以表示为

$$\alpha=\overrightarrow{OP}=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3.$$

这时，称e_1，e_2，e_3为向量空间$\mathbb{R}^3$的**基(向量)**. 反之，任意指定一点O和三个两两正交的单位向量e_1，e_2，e_3(而且成右手系排列)，也就决定了一个坐标系$Oxyz$(即以e_1,e_2,e_3的方向为x,y,z轴方向). 故坐标系$Oxyz$也记为$[O,e_1,e_2,e_3]$.

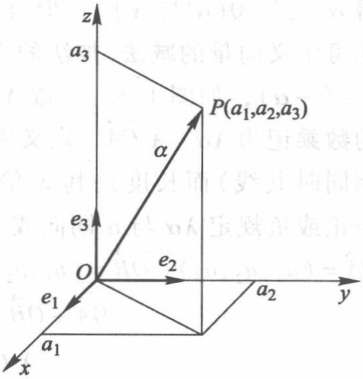

图1.5

符号$\mathbb{R}^3$通常表示空间中向量全体(取定坐标系). 但应注意，向量$\overrightarrow{OP}$与点P及其坐标(x,y,z)之间是一一对应的，有时用同一符号表示，故文献中也常用$\mathbb{R}^3$表示空间中的点集，或(x,y,z)(有序三数组行)全体，读者应按情况分清. 此外，坐标也有两种写法，即(x,y,z)或$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$，分别称为坐标行和坐标列(后者也记为$(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，以减少印刷版面). 本书以$\mathbb{R}^{(3)}$记坐标列(有序三数组列)全体. 对于平面上的向量和点，有类似记号$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{R}^{(2)}$.

最后讨论向量的**内积**与**外积**.

定义1.1 空间中(几何)向量α与β的**内积**$\alpha\cdot\beta$(又称点积，数量积，也