高等职业教育课程改革示范教材

# 经济数学基础

GAODENGZHIYEJIAOYUKECEHNG
GAIGESHIFANJIAOCAI

周　晓◎主 编

第二版

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

# 经济数学基础

## 第二版

主　　编　周　晓
编写人员　戴志娟　周玉平　吕企刚
　　　　　许乃武　姚星桃

南京大学出版社

## 内容简介

本书是遵照教育部"高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求"编写的，也是作者从事高职院校高等数学教学改革课题研究的成果之一，主要内容包括函数、极限与连续，一元函数的导数和微分，微分中值定理和导数的应用，一元函数积分学，线性代数初步，概率论与数理统计。本书可作为高职院校经管类各专业的经济数学教材，参考学时为100学时。

**图书在版编目(CIP)数据**

经济数学基础 / 周晓主编；戴志娟等编写. —2版.
—南京：南京大学出版社，2011.9
高等职业教育课程改革示范教材
ISBN 978-7-305-04761-9

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①周… ②戴… Ⅲ. ①经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 163312 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名 高等职业教育课程改革示范教材
**书　　名 经济数学基础(第二版)**
主　　编 周　晓
责任编辑 吴　华　　**编辑热线** 025-83596997

照　　排 南京玄武湖印刷实业有限公司
印　　刷 丹阳市兴华印刷厂
开　　本 787×1 092 1/16 印张 11.25 字数 278 千
版　　次 2011年9月第2版 2011年9月第1次印刷
印　　数 1～3000
ISBN 978-7-305-04761-9
定　　价 22.00元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

# 前　言

经济数学是高职院校经管类各专业十分重要的基础课程。在高等职业教育快速发展的今天,基础课程的教学如何打破传统的教学内容和教学方法,使之适应高等职业教育的特点,充分体现“以应用为目的,以必需够用为度”的原则,是一个值得研究和实践的课题。我们结合多年从事经济数学教学的实践,广泛吸收各高职院校经济数学教学改革的经验和成果,在充分调查研究、深入分析的基础上,组织一线教师编写了这本教材。

这本教材的编写,主要体现了如下特点:

(1) 在保证数学原有的系统性和科学性的基础上,对传统的经济数学教学内容作了删减和整合,既满足了经管类各专业对高等数学的需求,也有效地缓解了高职院校基础课教学课时少与内容多的矛盾。

(2) 充分考虑高职院校学生的特点,在保证学生掌握所需的基本思想、基本方法和基本技能的同时,恰当把握教学内容的深度和广度,不过分追求理论的严密性,力求内容深入浅出、通俗易懂,便于教,也便于学。

(3) 注重经济实例的引用,从数学概念的引入到数学知识、数学方法的应用,经济实例贯穿各章的始终,有助于培养学生应用数学解决实际问题的意识和能力。

本书的编写、出版得到了扬州职业大学领导和南京大学出版社的大力支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,编写的时间仓促,书中不妥之处在所难免,恳请专家、同行和读者批评指正。

**编　者**
**2011 年 6 月**

# 目　　录

# 第 1 章　函数　极限　连续

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分学研究的主要对象；极限是微积分学研究的基本工具，贯穿高等数学的始终；连续则是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本概念以及它们的一些主要性质.

## §1.1　函　数

### 1.1.1　函数的概念

一、函数的定义

在研究某一自然现象或实际问题的过程中，总会发现问题中的变量并不都是独立变化的，它们之间往往存在着一定的依存关系. 我们先看下面的例子.

**【例 1 - 1】** 某工厂每年最多生产某产品 200 吨，固定成本为 16 万元，每生产 1 吨产品，成本增加 0.8 万元，则每年产品的总成本 $C$ 与年产量 $x$ 的关系可由公式

$$C = 16 + 0.8x,\quad 0 \leqslant x \leqslant 200$$

确定. 当 $x$ 取 0 到 200 之间的任何一个值时，由上式可确定唯一的 $C$ 值与之对应. 变量 $x$ 与 $C$ 之间的这种对应关系，就是函数概念的实质.

**定义 1 - 1** 设某变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$，如果当变量 $x$ 在其变化范围内任取一个值时，变量 $y$ 按照一定的对应法则，有唯一确定的值与它对应，则称 $y$ 是关于 $x$ 的函数，记作 $y = f(x)$，其中 $x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量. 自变量 $x$ 的取值范围称为函数的定义域，$y$ 的对应值称为函数值，全体函数值的集合称为函数的值域. 当变量 $x$ 在定义域内取某一值 $x_0$ 时，函数 $y$ 的对应值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

**【例 1 - 2】** 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 2$，求 $f(1)$，$f(-x)$，$f(x+1)$.

**解** $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$；

$f(-x) = (-x)^2 - 3 \cdot (-x) + 2 = x^2 + 3x + 2$；

$f(x+1) = (x+1)^2 - 3 \cdot (x+1) + 2 = x^2 - x$.

函数的定义域与对应法则是函数的两个要素，给定函数就要指出函数的定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么它们就是相同的函数，否则就是不同的函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 若不考虑函数的实际意义，而抽象地研究函数，则规定函数的定义域是使其表达式有意义的一切实数值.

通常求函数的定义域主要依据是：

(1) 分式函数的分母不能为零；

(2) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零;

(3) 对数函数的真数必须大于零;

(4) 三角函数与反三角函数要符合其定义;

(5) 如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

**【例 1-3】** 判断函数 $f(x)=\lg x^2$ 与函数 $g(x)=2\lg x$ 是否表示同一个函数?

**解** $f(x)$的定义域是 $x\neq 0$ 的一切实数;$g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$. 由于 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同,故 $f(x)$与 $g(x)$表示的不是同一个函数.

**【例 1-4】** 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}+\sqrt{3-x}$;

(2) $f(x)=\lg(x+1)+\arcsin(x+1)$;

(3) $f(x)=\sqrt{\lg(x^2-2x-2)}$.

**解** (1) 由$\begin{cases}x^2-2x\neq 0\\3-x\geqslant 0\end{cases}$得函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,3]$;

(2) 由 $\begin{cases}x+1>0\\|x+1|\leqslant 1\end{cases}$ 得函数的定义域为$(-1,0]$;

(3) 由 $\begin{cases}x^2-2x-2>0\\\lg(x^2-2x-2)\geqslant 0\end{cases}$ 得函数的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

定义 1-1 规定了对于定义域内任一自变量的值,函数只有一个确定的值和它对应,这种函数叫做单值函数,否则就叫做多值函数. 本书所讨论的函数,如果没有特别指出,均指单值函数.

二、函数的表示

函数的表示方法通常有解析法、列表法和图示法三种.

利用解析法表示函数时,一般用一个解析式表示一个函数. 但有时需要用几个解析式表示一个函数,即对于自变量不同的取值范围,函数采用不同的解析式,这种函数叫做分段函数.

**【例 1-5】** 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 千克时,按基本运费计算,从上海到某地每千克收 0.20 元. 当超过 50 千克时,超重部分按每千克 0.30 元收费. 试求从上海到该地的行李费 $y$(元)与行李重量 $x$(千克)之间的函数关系式.

**解** 当 $x\in[0,50]$ 时,$y=0.2x$; 当 $x\in(50,+\infty)$ 时,$y=0.2\times 50+0.3(x-50)=0.3x-5$. 故所求函数为

$$y=\begin{cases}0.2x & 0\leqslant x\leqslant 50\\0.3x-5 & x>50\end{cases}.$$

**注意** (1) 分段函数是用几个解析式表示一个函数,而不是表示几个函数.

(2) 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

【例 1-6】 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}x-1 & -1<x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$.

(1) 求此函数的定义域;(2) 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{3}{2}\right)$的值.

**解** (1) 函数的定义域为$(-1,2]$;

(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ , $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ , $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

### 1.1.2 函数的几种特性

一、单调性

**定义 1-2** 设函数 $y=f(x)$ 定义在区间$(a,b)$内,如果对于$(a,b)$内的任意两点 $x_1$,$x_2$,当 $x_1<x_2$ 时,都有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间$(a,b)$内单调增加(或单调减少),而称区间$(a,b)$为单调增加(或单调减少)区间.

在单调增区间内,函数图像随着 $x$ 的增大而上升,如图 1-1 所示;在单调减区间内,函数图像随着 $x$ 的增大而下降,如图1-2所示.

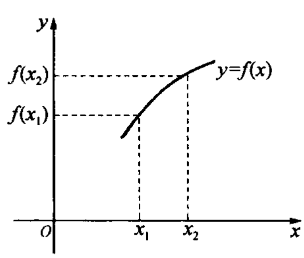



图 1-1

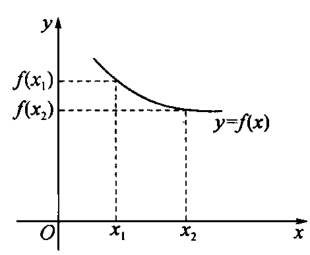



图 1-2

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的,在区间$(-\infty,0)$内是单调减少的,在区间$(-\infty,+\infty)$内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

二、奇偶性

**定义 1-3** 设函数 $y=f(x)$ 定义在区间$(-a,a)(a>0)$内,如果对于任一 $x\in(-a,a)$ ,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间$(-a,a)$内是奇函数;如果对于任一 $x\in(-a,a)$ ,都有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在区间$(-a,a)$内是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称,如图 1-3 所示;偶函数的图像关于 $y$ 轴对称,如图 1-4 所示.

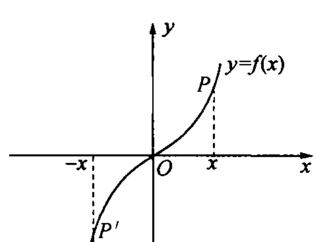



图 1-3

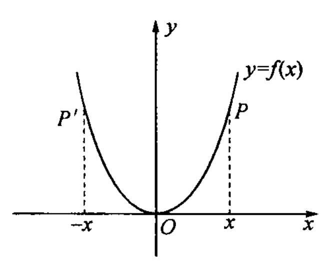



图 1-4

例如，$y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是奇函数，$y=x^4+1$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是偶函数. 有的函数既不是奇函数，也不是偶函数，如 $y=\sin x+\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是非奇非偶函数.

三、周期性

**定义 1-4** 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得对于在其定义域内的所有 $x$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 是周期函数，而称 $T$ 为函数的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

四、有界性

**定义 1-5** 对于定义在区间$(a,b)$内的函数 $y=f(x)$，如果存在一个正数 $M$，使得对于$(a,b)$内的所有 $x$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在$(a,b)$内是有界的. 如果这样的 $M$ 不存在，则称 $y=f(x)$ 在$(a,b)$内是无界的.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内无界，但在区间$(1,2)$内有界.

### 1.1.3 反函数

**定义 1-6** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，值域为 $W$，若对于任一 $y\in W$，在 $D$ 中都有唯一确定的值 $x$，使得 $f(x)=y$，则得到一个以 $y$ 为自变量，$x$ 为因变量的新的函数，这个新的函数叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 $W$，值域为 $D$.

习惯上，常用 $x$ 表示自变量，$y$ 表示因变量，因此，经常把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-5 所示.

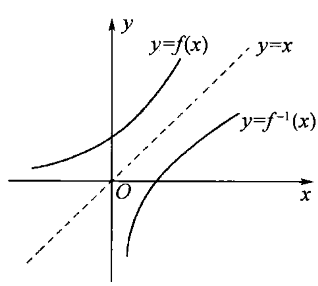



**图 1-5**

**【例 1-7】** 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$；

(2) $y=10^{x+2}$.

**解** (1) 等式两边同乘以 $x+1$，得 $(x+1)y=x-1$，$x(1-y)=1+y$，$x=\dfrac{1+y}{1-y}$，故 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1+x}{1-x}(x\neq 1)$.

(2) 等式两边同时取以 10 为底的对数，得 $x+2=\lg y$，$x=\lg y-2$，故 $y=10^{x+2}$ 的反函数为 $y=\lg x-2(x>0)$.

### 1.1.4　初等函数

一、基本初等函数

常值函数　$y=C$　（$C$ 为常数）；

幂函数　$y=x^{\mu}$　（$\mu$ 为常数）；

指数函数　$y=a^x$　（$a>0, a\neq 1$，$a$ 为常数）；

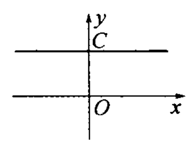
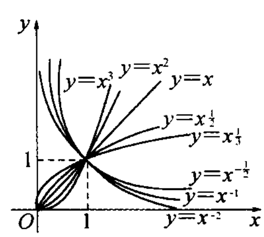
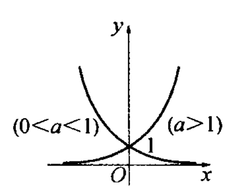
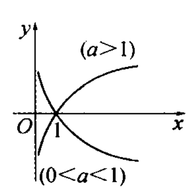
对数函数　$y=\log_a x$　（$a>0, a\neq 1$，$a$ 为常数）；

三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

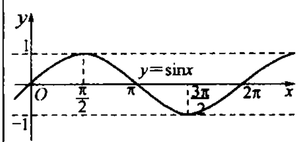
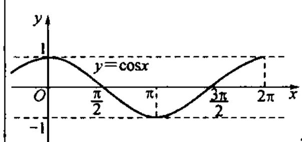
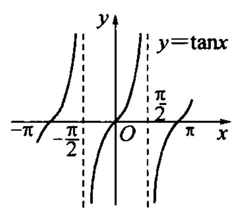
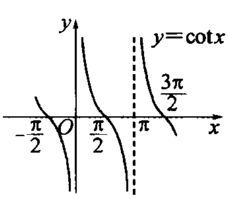
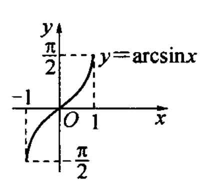
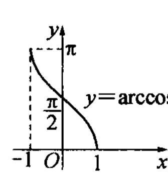
反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$.

以上六类函数统称为基本初等函数，常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质见表 1-1.

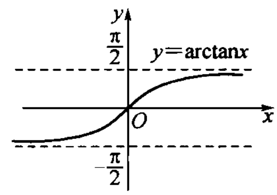
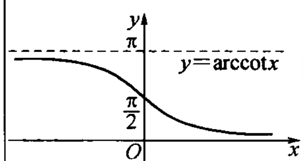
**表 1-1　基本初等函数的主要性质**

| 函数 | 解析式 | 定义域和值域 | 图　像 | 主要特性 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 常值函数 | $y=C$ | $x\in(-\infty,+\infty)$ |  | |
| 幂函数 | $y=x^{\alpha}$<br>$(\alpha\in\mathbb{R})$ | 依 $\alpha$ 不同而异，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义 |  | 在第一象限内：当 $\alpha>0$ 时，$x^{\alpha}$ 单调增；当 $\alpha<0$ 时，$x^{\alpha}$ 单调减 |
| 指数函数 | $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 过点 $(0,1)$；当 $0<a<1$ 时，$a^x$ 单调减；当 $a>1$ 时，$a^x$ 单调增 |
| 对数函数 | $y=\log_a x$<br>$(a>0$ 且 $a\neq 1)$ | $x\in(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 过点 $(1,0)$；当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 单调减；当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 单调增 |

(续表)

| 名称 | 解析式 | 定义域和值域 | 图像 | 主要特性 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 三角函数 | $y=\sin x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,+1]$ |  | 奇函数,周期 $2\pi$,有界;在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 单调增;在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 单调减($k\in\mathbb{Z}$) |
| | $y=\cos x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,+1]$ |  | 偶函数,周期 $2\pi$,有界;在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 单调增;在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 单调减($k\in\mathbb{Z}$) |
| | $y=\tan x$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$<br>($k\in\mathbb{Z}$)<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数,周期 $\pi$,在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 单调增($k\in\mathbb{Z}$) |
| | $y=\cot x$ | $x\neq k\pi$<br>($k\in\mathbb{Z}$)<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数,周期 $\pi$,在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 单调减($k\in\mathbb{Z}$) |
| 反三角函数 | $y=\arcsin x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ |  | 奇函数,单调增,有界 |
| | $y=\arccos x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in[0,\pi]$ |  | 单调减,有界 |

（续表）

| 名称 | 解析式 | 定义域和值域 | 图 像 | 主要特性 |
|---|---|---|---|---|
| 反三角函数 | $y=\arctan x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ |  | 奇函数，单调增，有界 |
| | $y=\text{arccot}\,x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,\pi)$ |  | 单调减，有界 |

二、复合函数

**定义 1－7** 设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域部分或全部包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，那么 $y$ 通过 $u$ 的联系也是 $x$ 的函数. 我们称这样的函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $u$ 叫做中间变量.

例如，设有函数 $y=\cos u$，$u=\sqrt{x}$. 由于 $u=\sqrt{x}$ 的值域$[0,+\infty)$包含在 $y=\cos u$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内，于是函数 $y=\cos u$ 与 $u=\sqrt{x}$ 构成了复合函数 $y=\cos\sqrt{x}$. 而对于函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$，由于 $u=x^2+2$ 的值域$[2,+\infty)$不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内，于是函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能构成复合函数.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由更多个函数复合而成. 例如，由函数 $y=u^2,u=\cos v,v=x^2+1$ 复合成函数 $y=\cos^2(x^2+1)$；由函数 $y=a^u,u=v^3$，$v=\sin w,w=\frac{1}{x}$ 复合成函数 $y=a^{\sin^3\frac{1}{x}}$.

对于复合函数，必须弄清两个问题，那就是“复合”和“分解”. 所谓“复合”，就是把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，也就是把中间变量依次代入的过程；所谓“分解”，就是把一个复合函数分解为几个简单函数，简单函数是指基本初等函数或是由基本初等函数与常数经过四则运算所得到的函数.

**【例 1－8】** 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=e^{-x^2}$；　　(2) $y=\lg\sqrt{1+x^2}$.

**解** (1) $y=e^{-x^2}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=-x^2$ 复合而成的；

(2) $y=\lg\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\lg u$，$u=\sqrt{v}$ 和 $v=1+x^2$ 复合而成的.

三、初等函数

**定义 1－8** 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的函数统称为初等函数. 例如，例 1－8 中的函数都是初等函数.

### 1.1.5 常用的经济函数

一、需求函数与供给函数

1. 需求函数

市场上某种商品的需求量除与商品的价格有关外,还受其他许多因素的影响,如消费者的收入、代用商品的价格、消费者的人数等,这些因素是厂商无法控制的,且在一段时间内不会有太大变化,因此我们假定消费者的收入、代用商品的价格、消费者的人数等都是常量.这样,商品的需求量 $Q_d$ 就是价格 $p$ 的函数,称为需求函数,记为 $Q_d=f(p)$. 通常 $Q_d$ 是 $p$ 的减函数.

常见的需求函数模型有:线性需求函数 $Q_d=a-bp(a>0,b>0,p>0)$;双曲线需求函数 $Q_d=\dfrac{a}{p+c}-b(a>0,b>0,c>0)$;指数需求函数 $Q_d=Ae^{-bp}(A\geqslant 0,b\geqslant 0,p\geqslant 0)$.

2. 供给函数

某商品由于价格不同,生产此种商品的厂商对市场提供的总供给量(简称商品的供给量)将不同,商品的供给量 $Q_s$ 也是价格 $p$ 的函数,称为供给函数,记为 $Q_s=\varphi(p)$. 通常 $Q_s$ 是 $p$ 的增函数.

常见的供给函数有线性供给函数 $Q_s=-c+dp(c>0,d>0)$,还有幂函数、指数函数.

二、成本函数、收益函数和利润函数

1. 成本函数 $C(q)$

一种产品的成本可以分为两部分:固定成本 $C_0$ 和变动成本 $C_1$. 总成本就是固定成本加上变动成本,即

$$C(q)=C_0+C_1=C_0+cq.$$

其中,$q$ 为产量,$c$ 为单位产品的变动成本.

总成本不能说明企业生产的好坏,因此常常用到平均成本的概念:

$$\overline{C}=A(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{\text{固定成本}+\text{变动成本}}{\text{产量}}$$

2. 收益函数 $R(q)$

$$R(q)=pq=qp(q).$$

其中,$p(q)$是价格 $p$ 与产量 $q$ 之间的函数关系.

3. 利润函数 $L(q)$

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

$L(q)>0$ 盈利,$L(q)<0$ 亏损,$L(q)=0$ 盈亏平衡.满足 $L(q)=0$ 的 $q_0$ 称为盈亏平衡点(又称保本点).

**【例 1-9】** 已知某厂生产某种产品的成本函数为 $C(q)=500+2q$(元),其中 $q$ 为该产品的产量,如果该产品的售价定为每件 6 元,试求:

(1) 生产 200 件该产品时的利润;

(2) 求生产该产品的盈亏平衡点.

**解**　(1) 由题意可知，$C(q)=500+2q$ (元)，$R(q)=6q$. 因此，利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=6q-(500+2q)=4q-500(\text{元}).$$

故生产200件该产品时的利润为 $L(200)=4\times200-500=300$(元).

(2) 由 $L(q)=0$ 得 $4q-500=0$，解得 $q=125$ (件)，即盈亏平衡点为125件.

## 习题 1.1

1. 下列各题中的函数是否表示同一个函数？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

(2) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\ln 2x$，$g(x)=\ln 2\cdot\ln x$；

(4) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$，$g(x)=1$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{5}{x^2+1}$；　　(2) $y=\lg(x^2-4)$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　　(4) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x<1\\ 0 & x=1\\ 1-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求此函数的定义域，并求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{5}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. 已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$.

5. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $y=x(1+x)(1-x)$；　　(2) $y=x^4-2x^2$；

(3) $y=a^x+a^{-x}(a>0,a\neq1)$；　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x^3-1$；　　(2) $y=3^{2x+5}$.

7. 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的？

(1) $y=3^{\sin x}$；　　(2) $y=\lg\tan 3x$；

(3) $y=\cot\sqrt{2x+1}$；　　(4) $y=\arccos\lg\sqrt{x}$.

8. 设 $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$，求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$.

9. 一台机器的价值是50万元，如果每年的折旧率为4.5%(即每年减少它的价值的4.5%)，经过 $n$ 年后机器的价值是 $Q$ 万元，试写出 $Q$ 与 $n$ 的函数关系式.

10. 某厂生产电冰箱，每台售价1 200元，生产1 000台以内可以全部售出，超过1 000台时，经广告宣传后又可以再多售出500台，假定支付广告费为2 500元，试将电冰箱的销售收入 $y$ 表示成销售量 $x$ 的函数.

# §1.2 极 限

## 1.2.1 数列的极限

**定义 1-9** 以自然数 $n$ 为自变量的函数 $a_n = f(n)$ (称为整标函数),其函数值按自变量 $n$ 由小到大排列成一列数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

叫做数列,记为 $\{a_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项,第 $n$ 项 $a_n$ 叫做数列的通项或一般项.

例如
$$3, 6, 12, 24, \cdots, 3 \cdot 2^{n-1}, \cdots$$
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$$
$$1, 2\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{4}, \cdots, 2+\frac{(-1)^n}{n}, \cdots$$
$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$$

都是数列的例子,它们的一般项分别为 $3 \cdot 2^{n-1}$ , $\frac{n}{n+1}$ , $2+\frac{(-1)^n}{n}$ , $(-1)^{n+1}$.

观察以下两个数列:

(1) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ,即数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(2) $\{a_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ ,即数列 $0, 1, 0, 1, \cdots$

将数列(1)(2)的各项分别画在数轴上,如图 1-6 所示. 从图中可以发现,当 $n$ 无限增大时,数列(1)的各项呈现出确定的变化趋势,即无限趋近于常数零;而数列(2)的各项在 0 和 1 两数之间变动,不趋近于一个确定的常数.

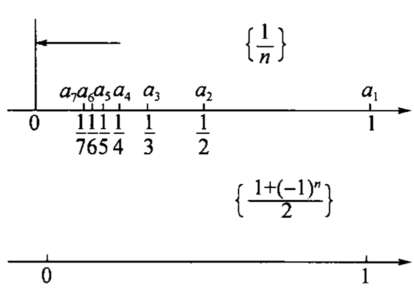



**图 1-6**

**定义 1-10** 对于数列 $\{a_n\}$,如果 $n$ 无限增大时,通项 $a_n$ 无限趋近于某个确定的常数 $A$,则称该数列以 $A$ 为极限,或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $A$,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \to A (n \to \infty).$$

若数列$\{a_n\}$没有极限，则称该数列发散.

【例1-10】 观察下列数列的极限.

(1) $\{a_n\}=\{C\}$ ($C$为常数)；

(2) $\{a_n\}=\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$；

(3) $\{a_n\}=\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$；

(4) $\{a_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$.

**解** 将数列(1)(2)(3)(4)的各项分别画在数轴上，如图1-7所示.

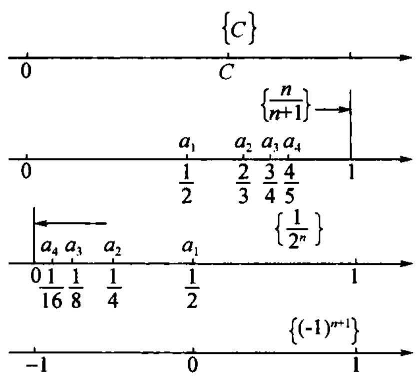



图1-7

观察数列在$n\to\infty$时的变化趋势，得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$不存在.

如果数列$\{a_n\}$对于每一个正整数$n$，都有$a_n\leqslant a_{n+1}$，则称数列$\{a_n\}$为单调递增数列；如果数列$\{a_n\}$对于每一个正整数$n$，都有$a_n\geqslant a_{n+1}$，则称数列$\{a_n\}$为单调递减数列.

对于数列$\{a_n\}$，如果存在一个正的常数$M$，使得对于每一项$a_n$，都有$|a_n|\leqslant M$，则称数列$\{a_n\}$为有界数列.

有界数列与收敛数列有怎样的关系呢？不加证明地给出下列定理.

**定理1-1** 单调有界数列必定收敛.

**定理1-2** 收敛数列必定有界.

### 1.2.2 函数的极限

数列是整标函数，因而数列极限也是一种函数极限，现在我们讨论一般函数的极限.

一、$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

当$x\to\infty$（包括$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，观察函数$y=\dfrac{1}{x}$的变化趋势. 从图1-8容易看出，当$x\to\infty$时，函数$y=\dfrac{1}{x}$趋向于确定的常数0.