全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

矩阵论与数值分析

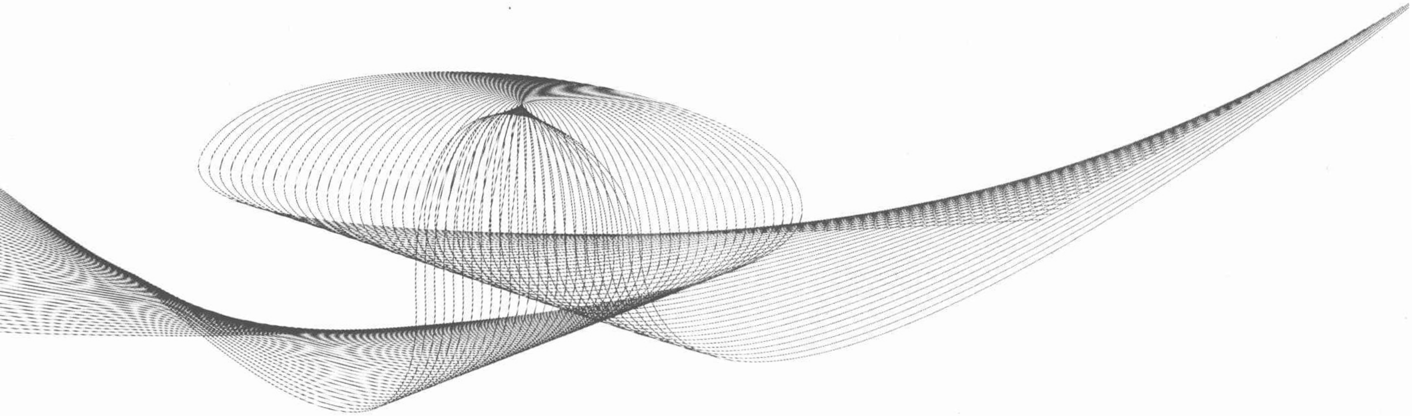
——[illegible]应用

邱启荣 编著

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材



矩阵论与数值分析

——理论及其工程应用

邱启荣 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本教材根据(全日制、在职)工程硕士研究生的特点和培养创新型人才的要求,将矩阵论与数值分析的有关理论与方法按内容体系编写.全书共6章,分别是矩阵运算与矩阵分解、线性空间与线性变换、矩阵的若尔当标准形与矩阵函数、方程与方程组的数值解法、数值逼近方法与数值微积分、常微分方程的数值解法.为提高工程硕士研究生应用数学方法和科学计算解决实际问题的能力,各章最后一节给出了一些应用案例,对一些重要的问题给出了求解问题的 MATLAB 程序.

本书可供工程硕士研究生以及理工科非计算数学专业的大学生阅读,也可供科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论与数值分析:理论及其工程应用/邱启荣编著.--北京:清华大学出版社,2013.1
(全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材)
ISBN 978-7-302-31044-0

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①邱… Ⅲ.①矩阵论－研究生－教材 ②数值分析－研究生－教材 Ⅳ.①O151.21 ②O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第305010号

责任编辑:张占奎　赵从棉
封面设计:常雪影
责任校对:刘玉霞
责任印制:沈　露

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者:北京世知印务有限公司
装 订 者:三河市兴旺装订有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×230mm　　**印　　张**:18.75　　**字　　数**:408千字
版　　次:2013年1月第1版　　**印　　次**:2013年1月第1次印刷
印　　数:1～3000
定　　价:39.00元

产品编号:047688-01

前言

矩阵论与数值分析是工科院校硕士研究生重要的公共基础课程，在工科类硕士研究生的课程设置中，它们是两门课，一般分别在研究生一年级第一学期的上、下两个半学期中开设. 在国内外著名大学中，它们大都也是分成两门课，因此，教材是单独的，两课程内容结合的很少. 由于学历教育类工程硕士要求有一年的时间参加工程训练，非学历教育类工程硕士以自学为主，为了在有限的时间内，让研究生在掌握必需的数学基本理论与方法的同时，具备应用数学和计算机解决实际问题的能力，有必要针对工程硕士研究生的特点和培养创新型人才的要求，重新组织和精选教材内容，以提高工程硕士研究生应用数学方法和计算机解决实际问题的能力.

本教材根据(全日制、在职)工程硕士研究生的特点和培养创新型人才的要求，将矩阵论与数值分析的内容按内容体系重新编写. 教材内容的组织注重数学概念的理解与应用，突出数学思想与数学方法的阐述，不片面强调数学的严谨性，根据工科类工程硕士的数学要求精简了定理的证明、公式的推导，注重与电气工程等工程类专业的结合，在每章的最后一节，通过利用矩阵理论与数值分析方法处理来自工程实际问题的案例，使研究生在学习数学知识的同时，逐步提高应用数学方法的能力. 在计算手段的处理上，在介绍基本概念、基本理论和算法原理及其步骤等内容时，采用以手工计算为主，计算机辅助计算为辅的策略. 本书的很多例题采用一题多解，以开阔读者的解题思路，有利于读者在众多的算法中根据问题的实际情况选择合适的算法. 考虑到研究生今后的科学研究和工程实践的需要，将 MATLAB 软件的应用贯穿到大部分教学内容中，同时对重要的方法给出了 MATLAB 程序。这样，一方面使学生从繁琐的计算中解脱出来，另一方面可以提高学生运用数学方法解决问题的能力. 课程所选内容的起点低、范围广，以适应不同专业研究生的需要. 学习者只需具备基本的大学数学知识，就可以进行课程学习。教材内容尽可能做到深入浅出，通俗易懂，使大家易于阅读理解. 对于与案例有关的问题，读者可与参考文献中相应的作者联系讨论，或进一步学习有关文献资料.

相应地，本书对教师也提出了更高的要求：不但能讲授矩阵论与数值分析的知识，对案例涉及的专业知识也要有一些了解，而且会应用计算软件，还要改进教学方法，能够进行创新性研究，这也有利于教师科研能力和教学水平的提高.

全书共 6 章，它们是矩阵运算与矩阵分解、线性空间与线性变换、矩阵的若尔当标准形与矩阵函数、方程与方程组的数值解法、数值逼近方法与数值微积分、常微分方程的数值解法.

本书得到全国工程硕士研究生教育核心教材建设工程的支持，同时作为我校承担的华北电力大学“211 工程”三期 2009 年创新人才培养建设项目的一部分，得到了学校、研究生院和数理系的大力支持. 本书在编写过程中，参考或引用了同行的工作成果，他们的工作不仅为本书的编写提供了丰富的素材，也提供了有益的借鉴；本书的应用案例有些是根据近些年发表的学术论文编写的，有些直接引用了学术论文；清华大学出版社的有关工作人员付出了辛勤劳动，进行了精心编校；我的学生李选晓、张卉对文稿进行了认真的校对. 在此，作者对他们表示衷心的感谢.

由于作者水平所限，在编写中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正.

华北电力大学　邱启荣

2012 年 12 月

目录

第5章 数值逼近方法和数值微积分 /198

第6章 常微分方程的数值解法 /247

第1章

矩阵运算与矩阵分解

1.1 矩阵及其基本运算

1.1.1 矩阵及其基本运算回顾

在科学研究和社会生产实践中，大量的问题都涉及矩阵的概念. 对这些问题的研究常常反映为对有关矩阵的研究，甚至有些性质完全不同、表面上完全没有联系的问题，归结成矩阵以后的问题却是相同的，这就使矩阵成为数学中一个应用广泛的概念.

定义 1.1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素. $m\times n$ 阶实矩阵全体记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$，$m\times n$ 阶复矩阵全体记为 $\mathbf{C}^{m\times n}$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};$$

数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix};$$

对 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.$$

例 1.1.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&4\\-2&5&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-3&-2\\1&2&-3\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&9&12\\-6&15&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-6&-4\\2&4&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&15&16\\-8&11&0\end{pmatrix}$.

例 1.1.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\4&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+2\times0&1\times(-1)+2\times3&1\times1+2\times2\\4\times2+2\times0&4\times(-1)+2\times3&4\times1+2\times2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&5&5\\8&2&8\end{pmatrix}.$$

一般情况下：

(1) 消去律不成立，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，推不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(2) 交换律不成立，一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵；如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复方阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为埃尔米特阵.

由定义可知，反对称阵的对角线上元素一定是 0，而埃尔米特阵的对角线上元素一定是实数.

如 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&-4\\0&-4&-6\end{bmatrix}$ 是实对称阵，而 $\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}2&1-3\mathrm{i}&0\\1+3\mathrm{i}&3&-4+5\mathrm{i}\\0&-4-5\mathrm{i}&-6\end{bmatrix}$ 是埃尔米特阵.

定义 1.1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}>0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}<0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵.

定理 1.1.1(霍尔维茨定理)

(1) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,\quad\cdots$$

(2) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1,2,\cdots,n$$

方阵的行列式：由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的 n 阶行列式(各元素的位置不变)，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$.

由 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的如下 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^*$.

定义 1.1.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，若存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并称方阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 1.1.2 方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* \tag{1.1.1}$$

特别地，对于二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，如果

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

由定理 1.1.2 可知，对于数值矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，我们总可以利用公式(1.1.1)来求 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 但是，当 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 较大时，计算量太大，因此这个公式主要用于理论推导和求低阶方阵以及特殊方阵的逆阵. 对于一般可逆矩阵求逆阵的方法是初等变换法，同时希望大家注意，初等行变换的方法也便于计算机编程实现.

1.1.2 矩阵的初等变换

定义 1.1.4 下面 3 种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 对换两行(对换 i,j 两行,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 以不为 0 的数 k 乘以矩阵的某一行的所有元素(第 i 行乘 k 记为 $r_i \times k$);

(3) 把某一行的 k 倍加到另一行对应的元素上(第 j 行的 k 倍加到第 i 行,记为 $r_i + kr_j$).

对应地,可以定义矩阵的初等列变换.矩阵的初等行变换和矩阵的初等列变换统称为矩阵的初等变换.

由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换在线性代数中的应用十分广泛,概括起来包括以下几个方面:

(1) 求逆矩阵;

(2) 解矩阵方程;

(3) 求矩阵的行最简型;

(4) 求矩阵和向量组的秩;

(5) 求向量组的极大无关组;

(6) 解线性方程组.

例 1.1.3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

$$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}2&1&2&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\2&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-3&-2&1&-2&0\\1&2&2&0&1&0\\0&1&-1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&0&-5&-2&-2&3\\1&0&4&2&1&-2\\0&1&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\\1&0&0&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&0&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&0&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&1&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-3&2\\-3&2&2\\2&2&-3\end{pmatrix}.$$

例 1.1.4 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 由 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$，得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1&1\\1&0&0&1&2&0\\1&0&-1&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&1&2&1&1\\1&0&-1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&1&2&1&1\\0&0&-1&0&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&1&2&1&1\\0&0&1&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&2&-1&2\\0&0&1&0&2&-1\end{pmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&2\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

定义 1.1.5 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，而所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全为 0，则称 D 为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

我们知道，初等变换不改变矩阵的秩. 用初等变换求矩阵秩的方法是把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

定义 1.1.6 设 $m\times n$ 复矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的秩为 $r(r>0)$，并且满足以下条件：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的前 r 行中的每一行至少含有一个不为零的元，而后 $m-r$ 行的元素均为零；

(2) 如果矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的第 i 行的第一个不为零的元素在第 j_i 列($i=1,2,\cdots,r$)，那么 $j_1<j_2<\cdots<j_r$；则称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为行阶梯阵.

定义 1.1.7 如果行阶梯阵 $\boldsymbol{H}$ 的 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列是单位矩阵 $\boldsymbol{E}_m$ 的前 r 列，则称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为行最简型.

如

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&1&-4&3\\0&0&-2&-4&4&3\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

是行阶梯阵，但不是行最简型，而矩阵

$$H_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0&-4&-3\\0&0&1&0&3&5\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

是行最简型.

例 1.1.5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}$ 的行最简型和秩.

解 对矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\2&3&1&-3&-7\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B,$$

B 是 A 的行最简型，$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=3$.

在 MATLAB 中，求矩阵 A 的行最简型的命令是 rref(A).

例 1.1.6 求解以下非齐次方程组的通解：

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1,\\x_1-2x_2+x_3-x_4=-1,\\x_1-2x_2+x_3+5x_4=5.\end{cases}$$

解 $(A\quad b)=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&-2&1&5&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

得到同解方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\x_4=1.\end{cases}$$

原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad k_1,k_2\ \text{为任意常数}.$$

例 1.1.7 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$ 及$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)^{\mathrm{T}}$.

(1) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合？

(2) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的唯一的线性表示式？并写出该表示式.

解 考虑向量方程 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，即

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3, \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix},$$

因而有

(1) 当 $a=-1,b\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合；

(2) 当 $a\neq -1$ 时，表示式唯一，且$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\,\boldsymbol{\alpha}_4$.

例 1.1.8 某一电网的输电线路，过网负荷量及流向如图 1.1 所示.

(1) 计算各个线路的负荷量.

(2) 若线路 BC 出现故障无法运行，那么线路 AD 段的负荷量控制在什么范围内，才能使所有线路的负荷流量都不超过 300.

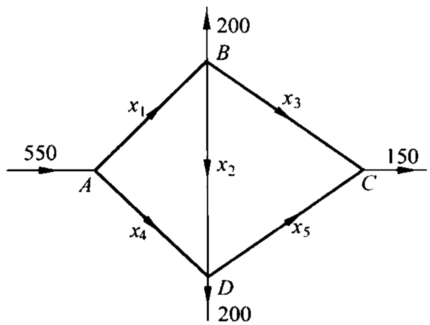


图 1.1 过网负荷量及流向图

解 (1) 设线路 AB,BD,BC,AD,DC 的负荷分别为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5，根据进出负荷平衡可得如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_4=550, \\ x_1-x_2-x_3=200, \\ x_3+x_5=150, \\ x_2+x_4-x_5=200. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 550 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 200 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得