



全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

矩阵论与数值分析

——理论应用

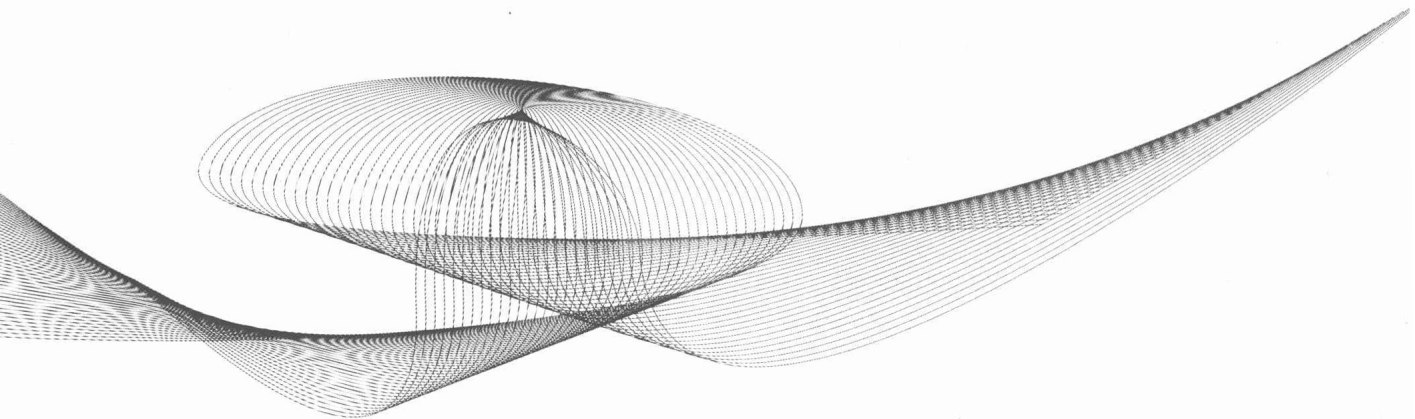
邱启荣 编著



<http://www.tup.com.cn>

清华大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材



矩阵论与数值分析

——理论及其工程应用

邱启荣 编著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本教材根据(全日制、在职)工程硕士研究生的特点和培养创新型人才的要求,将矩阵论与数值分析的有关理论与方法按内容体系编写.全书共6章,分别是矩阵运算与矩阵分解、线性空间与线性变换、矩阵的若尔当标准形与矩阵函数、方程与方程组的数值解法、数值逼近方法与数值微积分、常微分方程的数值解法.为提高工程硕士研究生应用数学方法和科学计算解决实际问题的能力,各章最后一节给出了一些应用案例,对一些重要的问题给出了求解问题的 MATLAB 程序.

本书可供工程硕士研究生以及理工科非计算数学专业的大学生阅读,也可供科技工作者参考.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论与数值分析:理论及其工程应用/邱启荣编著. —北京:清华大学出版社,2013.1

(全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材)

ISBN 978-7-302-31044-0

I. ①矩… II. ①邱… III. ①矩阵论—研究生—教材 ②数值分析—研究生—教材 IV. ①O151.21
②O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 305010 号

责任编辑:张占奎 赵从棉

封面设计:常雪影

责任校对:刘玉霞

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:北京世知印务有限公司

装 订 者:三河市兴旺装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:18.75

字 数:408千字

版 次:2013年1月第1版

印 次:2013年1月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:39.00元

产品编号:047688-01

前 言

矩阵论与数值分析是工科院校硕士研究生重要的公共基础课程,在工科类硕士研究生的课程设置中,它们是两门课,一般分别在研究生一年级第一学期的上、下两个半学期中开设.在国内外著名大学中,它们大都也是分成两门课,因此,教材是单独的,两课程内容结合的很少.由于学历教育类工程硕士要求有一年的时间参加工程训练,非学历教育类工程硕士以自学为主,为了在有限的时间内,让研究生在掌握必需的数学基本理论与方法的同时,具备应用数学和计算机解决实际问题的能力,有必要针对工程硕士研究生的特点和培养创新型人才的要求,重新组织和精选教材内容,以提高工程硕士研究生应用数学方法和计算机解决实际问题的能力.

本教材根据(全日制、在职)工程硕士研究生的特点和培养创新型人才的要求,将矩阵论与数值分析的内容按内容体系重新编写.教材内容的组织注重数学概念的理解与应用,突出数学思想与数学方法的阐述,不片面强调数学的严谨性,根据工科类工程硕士的数学要求精简了定理的证明、公式的推导,注重与电气工程等工程类专业的结合,在每章的最后一节,通过利用矩阵理论与数值分析方法处理来自工程实际问题的案例,使研究生在学习数学知识的同时,逐步提高应用数学方法的能力.在计算手段的处理上,在介绍基本概念、基本理论和算法原理及其步骤等内容时,采用以手工计算为主,计算机辅助计算为辅的策略.本书的很多例题采用一题多解,以开阅读者的解题思路,有利于读者在众多的算法中根据问题的实际情况选择合适的算法.考虑到研究生今后的科学研究和工程实践的需要,将 MATLAB 软件的应用贯穿到大部分教学内容中,同时对重要的方法给出了 MATLAB 程序.这样,一方面使学生从繁琐的计算中解脱出来,另一方面可以提高学生运用数学方法解决问题的能力.课程所选内容的起点低、范围广,以适应不同专业研究生的需要.学习者只需具备基本的大学数学知识,就可以进行课程学习.教材内容尽可能做到深入浅出,通俗易懂,使大家易于阅读理解.对于与案例有关的问题,读者可与参考文献中相应的作者联系讨论,或进一步学习有关文献资料.

相应地,本书对教师也提出了更高的要求:不但能讲授矩阵论与数值分析的知识,对案例涉及的专业知识也要有一些了解,而且会应用计算软件,还要改进教学方法,能够进行创新性研究,这也有利于教师科研能力和教学水平的提高.

全书共 6 章,它们是矩阵运算与矩阵分解、线性空间与线性变换、矩阵的若尔当标准形与矩阵函数、方程与方程组的数值解法、数值逼近方法与数值微积分、常微分方程的数值解法.

本书得到全国工程硕士研究生教育核心教材建设工程的支持,同时作为我校承担的华北电力大学“211 工程”三期 2009 年创新人才培养建设项目的一部分,得到了学校、研究生院和数理系的大力支持.本书在编写过程中,参考或引用了同行的工作成果,他们的工作不仅为本书的编写提供了丰富的素材,也提供了有益的借鉴;本书的应用案例有些是根据近些年发表的学术论文编写的,有些直接引用了学术论文;清华大学出版社的有关工作人员付出了辛勤劳动,进行了精心编校;我的学生李选晓、张卉对文稿进行了认真的校对.在此,作者对他们表示衷心的感谢.

由于作者水平所限,在编写中难免有错误和不妥之处,恳请读者批评指正.

华北电力大学 邱启荣

2012 年 12 月

目 录

第 1 章 矩阵运算与矩阵分解 /1

1.1 矩阵及其基本运算	1
1.1.1 矩阵及其基本运算回顾	1
1.1.2 矩阵的初等变换	3
1.2 矩阵分解及其在解线性方程组中的应用	10
1.2.1 矩阵的三角分解(LU 分解)	10
1.2.2 矩阵的正交三角分解(QR 分解)	18
1.2.3 矩阵的满秩分解	20
1.2.4 矩阵的奇异值分解	21
1.3 矩阵的特征值与特征向量	23
1.3.1 特征值与特征向量	24
1.3.2 特征值的估计	27
1.3.3 求主特征值及其特征向量的幂法	29
1.3.4 QR 方法简介	31
1.4 矩阵的广义逆及其应用	33
1.4.1 广义逆矩阵 A^-	33
1.4.2 广义逆 A^+	36
1.5 应用案例	39
1.5.1 电力系统小干扰稳定性分析	39
1.5.2 火力发电机组热功效率的在线计算	43
1.5.3 奇异值与特征值分解在谐波源定阶中的等价性	47
本章小结	49
习题 1	50

第 2 章 线性空间与线性变换

/53

2.1	线性空间	53
2.1.1	集合与映射	53
2.1.2	线性空间	54
2.1.3	线性空间的基、维数与坐标	55
2.1.4	线性子空间	60
2.2	赋范线性空间与矩阵范数	64
2.2.1	赋范线性空间	64
2.2.2	矩阵的范数	65
2.3	内积空间	69
2.3.1	内积的定义与性质	69
2.3.2	向量的正交性与施密特(Schmidt)正交化方法	71
2.4	矩阵分析初步	77
2.4.1	矩阵序列的极限	77
2.4.2	矩阵级数	78
2.4.3	矩阵幂级数	79
2.4.4	矩阵的微分和积分	81
2.5	线性变换	82
2.5.1	线性变换的定义与性质	82
2.5.2	线性变换与矩阵	85
2.5.3	线性变换的特征值与特征向量	88
2.5.4	正交变换	89
2.6	应用案例	90
2.6.1	电路变换及其应用	90
2.6.2	基于正交分解的 MOA 泄漏电流有功分量提取算法	96
2.6.3	基于范数的唯一稳态消谐法及其应用	101
2.6.4	线性变换在求高阶线性常微分方程特解中的应用	104
	本章小结	107
	习题 2	108

第 3 章 矩阵的若尔当标准形与矩阵函数

/112

3.1	λ 矩阵及其史密斯(Smith)标准形	112
3.2	矩阵的若尔当标准形	115

3.3 最小多项式	119
3.4 矩阵函数	125
3.5 应用案例	128
3.5.1 矩阵函数在求解电路暂态响应中的应用	128
3.5.2 线性系统的能控性与能观性	129
3.5.3 一阶线性常系数微分方程组和高阶线性常微分方程的 初值问题的求解	132
本章小结	136
习题 3	137

第 4 章 方程与方程组的数值解法 /140

4.1 线性方程组的迭代法	140
4.1.1 迭代法的构造	140
4.1.2 迭代法的收敛性与收敛速度	142
4.1.3 几个常用的迭代法	144
4.2 线性方程组的共轭梯度法	152
4.2.1 共轭方向法	152
4.2.2 共轭梯度法	153
4.3 非线性方程的数值解法	156
4.3.1 根的隔离与求方程实根的二分法和试位法	157
4.3.2 不动点迭代法	162
4.3.3 牛顿迭代法	169
4.4 解非线性方程组的迭代法	173
4.4.1 不动点迭代法	174
4.4.2 牛顿迭代法	175
4.5 应用案例	178
4.5.1 电力系统潮流计算的数学模型及基本解法	178
4.5.2 管路计算	186
4.5.3 气-液平衡计算	190
4.5.4 架空导线的应力计算	193
本章小结	194
习题 4	195

第5章 数值逼近方法和数值微积分

/198

5.1	多项式插值	198
5.1.1	插值问题与插值多项式	198
5.1.2	拉格朗日(Lagrange)插值	201
5.1.3	均差与牛顿插值公式	205
5.1.4	埃尔米特(Hermite)插值	211
5.2	数值积分	214
5.2.1	数值求积公式及代数精度	215
5.2.2	插值型求积公式	216
5.2.3	等距节点的求积公式	217
5.2.4	复化求积公式	219
5.2.5	龙贝格(Romberg)求积法	222
5.2.6	高斯(Gauss)型求积公式	227
5.3	数值微分	231
5.3.1	泰勒展开法求数值微分	232
5.3.2	用插值多项式求数值微分	233
5.3.3	将数值微分转化为求数值积分	236
5.4	应用案例	237
5.4.1	混频器中变频损耗的数值计算	237
5.4.2	梯形平坡明渠的数值积分水力计算	239
	本章小结	242
	习题5	243

第6章 常微分方程的数值解法

/247

6.1	常微分方程初值问题的欧拉方法	247
6.1.1	欧拉(Euler)法	248
6.1.2	梯形法	250
6.1.3	预测-校正法(改进欧拉法)	251
6.1.4	局部截断误差	253
6.2	龙格-库塔方法	254
6.3	线性多步法	259
6.4	边值问题的差分方法和打靶法简介	262

6.4.1	解线性方程边值问题的差分方法	262
6.4.2	打靶法	264
6.5	应用案例	265
6.5.1	无源元件的“瞬态伴随模型”的建立	265
6.5.2	磁流体发电通道的数值计算	270
6.5.3	平面温度场计算问题	272
	本章小结	274
	习题 6	275
参考答案	/277	
参考文献	/289	

第 1 章

矩阵运算与矩阵分解

1.1 矩阵及其基本运算

1.1.1 矩阵及其基本运算回顾

在科学研究和社会生产实践中,大量的问题都涉及矩阵的概念.对这些问题的研究常常反映为对有关矩阵的研究,甚至有些性质完全不同、表面上完全没有联系的问题,归结成矩阵以后的问题却是相同的,这就使矩阵成为数学中一个应用广泛的概念.

定义 1.1.1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) 排成的 m 行 n 列的数表

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵,简称 $m \times n$ 矩阵,其中 a_{ij} 叫做矩阵 \mathbf{A} 的元素. $m \times n$ 阶实矩阵全体记为 $\mathbf{R}^{m \times n}$, $m \times n$ 阶复矩阵全体记为 $\mathbf{C}^{m \times n}$.

对矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的和

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix};$$

数 k 乘矩阵 \mathbf{A}

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix};$$

对 $A=(a_{ij})_{m \times s}$, $B=(b_{ij})_{s \times n}$, A 与 B 的乘积 AB 是一个 $m \times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n.$$

例 1.1.1 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, 求 $3A - 2B$.

解 $3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ -6 & 15 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 15 & 16 \\ -8 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$

例 1.1.2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求 AB .

解 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 0 & 1 \times (-1) + 2 \times 3 & 1 \times 1 + 2 \times 2 \\ 4 \times 2 + 2 \times 0 & 4 \times (-1) + 2 \times 3 & 4 \times 1 + 2 \times 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$

一般情况下:

(1) 消去律不成立, 即由 $AB=AC$, 推不出 $B=C$.

(2) 交换律不成立, 一般情况下 $AB \neq BA$.

设 A, B 都是 n 阶方阵. 若 $AB=BA$, 则称 A, B 是可交换的.

设 A 是 n 阶实方阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 如果 $A^T=A$, 则称 A 为实对称阵; 如果 $A^T=-A$, 则称 A 为反对称阵.

设 A 是 n 阶复方阵, A^H 是 A 的共轭转置矩阵, 如果 $A^H=A$, 则称 A 为埃尔米特阵.

由定义可知, 反对称阵的对角线上元素一定是 0, 而埃尔米特阵的对角线上元素一定是实数.

如 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ 是实对称阵, 而 $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1-3i & 0 \\ 1+3i & 3 & -4+5i \\ 0 & -4-5i & -6 \end{pmatrix}$ 是埃尔米特阵.

特阵.

定义 1.1.2 设 A 为实对称阵, 如果对任意非零向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x^T A x > 0$, 则称 A 是正定矩阵; 如果对任意非零向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x^T A x < 0$, 则称 A 是负定矩阵.

定理 1.1.1 (霍尔维茨定理)

(1) 对称矩阵 A 是正定的充分必要条件是 A 的各阶主子式都为正, 即

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

(2) 对称矩阵 A 是负定的充分必要条件是: 奇数阶主子式为负, 而偶数阶主子式为正, 即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

方阵的行列式: 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的 n 阶行列式(各元素的位置不变), 称为方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det(A)$.

由 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 构成的如下 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵, 记作 A^* .

定义 1.1.3 设 A 为 n 阶方阵, E 是 n 阶单位阵, 若存在一个 n 阶方阵 B , 使得 $AB = BA = E$, 则称方阵 A 可逆, 并称方阵 B 为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1} .

定理 1.1.2 方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \quad (1.1.1)$$

特别地, 对于二阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 如果

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

则

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

由定理 1.1.2 可知, 对于数值矩阵 A , 如果 $|A| \neq 0$, 我们总可以利用公式 (1.1.1) 来求 A^{-1} . 但是, 当 A 的阶数 n 较大时, 计算量太大, 因此这个公式主要用于理论推导和求低阶方阵以及特殊方阵的逆阵. 对于一般可逆矩阵求逆阵的方法是初等变换法, 同时希望大家注意, 初等行变换的方法也便于计算机编程实现.

1.1.2 矩阵的初等变换

定义 1.1.4 下面 3 种变换称为矩阵的初等行变换:

- (1) 对换两行(对换 i, j 两行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$);
- (2) 以不为 0 的数 k 乘以矩阵的某一行的所有元素(第 i 行乘 k 记为 $r_i \times k$);
- (3) 把某一行的 k 倍加到另一行对应的元素上(第 j 行的 k 倍加到第 i 行, 记为 $r_i + kr_j$).

对应地, 可以定义矩阵的初等列变换. 矩阵的初等行变换和矩阵的初等列变换统称为矩阵的初等变换.

由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

对 A 进行一次初等行变换, 相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 施行一次初等列变换, 相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换在线性代数中的应用十分广泛, 概括起来包括以下几个方面:

- (1) 求逆矩阵;
- (2) 解矩阵方程;
- (3) 求矩阵的行最简型;
- (4) 求矩阵和向量组的秩;
- (5) 求向量组的极大无关组;
- (6) 解线性方程组.

例 1.1.3 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } (A \ E) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \\
 A^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

例 1.1.4 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足矩阵方程 $AX = 2X + A$, 求 X .

解 由 $AX = 2X + A$, 得 $(A - 2E)X = A$.

$$\begin{aligned} (A - 2E \quad A) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

定义 1.1.5 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D , 而所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全为 0, 则称 D 为 A 的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 A 的秩, 记为 $\text{rank}(A)$ 或 $r(A)$.

我们知道, 初等变换不改变矩阵的秩. 用初等变换求矩阵秩的方法是把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵, 行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

定义 1.1.6 设 $m \times n$ 复矩阵 H 的秩为 $r (r > 0)$, 并且满足以下条件:

- (1) 矩阵 H 的前 r 行中的每一行至少含有一个不为零的元, 而后 $m-r$ 行的元素均为零;
- (2) 如果矩阵 H 的第 i 行的第一个不为零的元素在第 j_i 列 ($i=1, 2, \dots, r$), 那么 $j_1 < j_2 < \dots < j_r$; 则称矩阵 H 为行阶梯阵.

定义 1.1.7 如果行阶梯阵 H 的 j_1, j_2, \dots, j_r 列是单位矩阵 E_m 的前 r 列, 则称矩阵 H 为行最简型.

如

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是行阶梯阵, 但不是行最简型, 而矩阵

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是行最简型.

例 1.1.5 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的行最简型和秩.

解 对矩阵施行初等行变换

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B, \end{aligned}$$

B 是 A 的行最简型, $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 3$.

在 MATLAB 中, 求矩阵 A 的行最简型的命令是 `rref(A)`.

例 1.1.6 求解以下非齐次方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

解 $(A \ b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

例 1.1.7 设 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)^T$ 及 $\beta = (1, 1, b+3, 5)^T$.

(1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, β 有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

解 考虑向量方程 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix},$$

因而有

(1) 当 $a = -1, b \neq 0$ 时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合;

(2) 当 $a \neq -1$ 时, 表示式唯一, 且 $\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 + 0\alpha_4$.

例 1.1.8 某一电网的输电线路, 过网负荷量及流向如图 1.1 所示.

(1) 计算各个线路的负荷量.

(2) 若线路 BC 出现故障无法运行, 那么线路 AD 段的负荷量控制在什么范围内, 才能使所有线路的负荷流量都不超过 300.

解 (1) 设线路 AB, BD, BC, AD, DC 的负荷分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , 根据进出负荷平衡可得如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 550, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 200, \\ x_3 + x_5 = 150, \\ x_2 + x_4 - x_5 = 200. \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 550 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 200 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解得

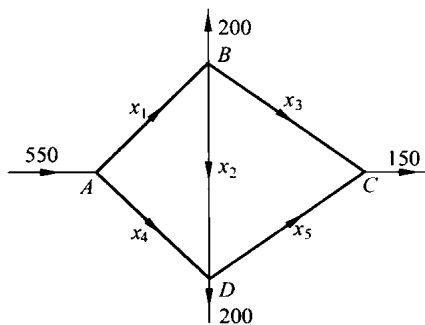


图 1.1 过网负荷量及流向图