



毛纲源 考研数学辅导系列

系统 · 专业 · 经典 · 实用

毛纲源 编著

# 考研数学



## 历年真题分题型精解



**[ 解题思路 ]**



指引解题方向

获得解题捷径

**[ 一题多解 ]**



扩大考生视野

提升应试能力

**[ 错解分析 ]**



远离解题误区

轻取考研高分

**[ 考查知识点 ]**



了解考试重点

把握命题核心



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

## 内 容 简 介

本书严格按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学三考试大纲》的要求编写,对历年考研真题分题型逐题给出详细解答,且绝大部分真题给出了一题多解.很多试题的解法是作者从事数学教学和考研数学辅导班的实践中研究、总结出来的,其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷.

读者复习时,只要认真分析、了解、消化和掌握历年试题的核心内容,便能发现考研数学试题中总是反复出现共性问题,从这些共性中能够发现命题规律和命题趋势,找出考点之间的有机联系,明确各部分考点内容的重点、难点.

全书按照“考点—题型—真题—解题思路—精解(一题多解)—考查知识点—错解分析”的思路编写,使备考人员可以了解到每一考点中已考过的题型,这种题型以前考过什么样的题目,常与哪些知识点联合命题,从哪个角度命题,等等,从而使备考人员更好、更快地掌握命题重点和规律,熟悉各考点之间的有机联系,促成各考点融会贯通,能快速地提高应试人员的解题能力.

本书除了可以供准备参加考研数学三的人员使用外,还可以作为经济类和工商管理类的学生平时学习时的参考资料.

### 图书在版编目(CIP)数据

考研数学(三)历年真题分题型精解/毛纲源 编著. —武汉:华中科技大学出版社,2012.7  
ISBN 978-7-5609-7888-8

I. 考… II. 毛… III. 高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 068832 号

考研数学(三)历年真题分题型精解

毛纲源 编著

策划编辑:王汉江(QQ:14458270)

责任编辑:王汉江

封面设计:范翠璇

责任校对:朱 玢

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:荆州市今印印务有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:23.75

字 数:670千字

版 次:2012年7月第1版第1次印刷

定 价:45.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换

全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务

版权所有 侵权必究

## 作者简介

毛纲源教授,毕业于武汉大学,留校任教,后调入武汉理工大学担任数学物理系系主任,在高校从事数学教学与科研工作40余年,发表多篇关于考研数学的论文.主讲微积分、线性代数、概率论与数理统计课程.理论功底深厚,教学经验丰富,思维独特.曾多次受邀在山东、广东、湖北等地主讲考研数学,并得到学员的广泛认可和一致好评:“知识渊博,讲解深入浅出,易于接受”,“解题方法灵活,技巧独特,辅导针对性极强”,“对考研数学的出题形式、考试重难点了如指掌,上他的辅导班受益匪浅”……同样,毛老师的辅导书也受到读者的欢迎与好评,有兴趣的读者可以上网查询有关对他编写的图书的评价.

◎毛纲源经济类数学辅导系列(3本)

◎毛纲源理工类数学辅导系列(4本)

◎毛纲源考研类数学辅导系列(13本)

## 编辑推荐

毛纲源教授是我社的特约作者,先后编著并在我社出版的图书品种达20余种,其出书数量在国内实属罕见,不论是数学辅导书(经济类、理工类)的编写,还是考研数学辅导书的编写,都体现了老一辈教师严谨治学的工作作风,作为毛老师系列图书的责任编辑也从中受益匪浅.同时,毛老师的系列图书十几年来一直作为我社的畅销书和常销书,在读者心目中赢得了良好的口碑,已有数十万学子从中受益.

为了更好地让读者了解本书,特将各大网站读者对毛纲源老师系列图书的评价进行了整理、归纳(见读者书评),其目的并不是宣传本书,而是让那些在学习数学的过程中遇到困难的读者能够找到一本真正的好书,让那些希望学好数学并准备考研的朋友从中受益.为了让学习数学的朋友有一个交流的空间,特建立了一个QQ群(群号:149812311)和一个博客(<http://blog.sina.com.cn/pop528>),希望读者相互交流、相互受益.

特此推荐!

## 读者书评

毛纲源老师的系列书自出版以来,深受读者青睐,同时受到读者的一致好评.现将各大网站(当当网、卓越网、京东商城、淘宝网等,关键字搜索“毛纲源”)读者的反馈信息收集整理如下,以飨读者.

相信毛老师的书! 2012-04-17 17:59

如果你选择了此书,请就以此书为主,不要再买其他资料,最多再加历年真题、若干模拟题,那么 135 分以上不是梦.

题型全,试题经典 2011-02-17 17:59

解题方法归纳得好! 书的质量也很好!

很细致,很到位,值得购买 2012-04-05 18:12:35

囊括了大部分考研题型……内容很经典,很实用! 强烈推荐! 相当不错!

试题经典,解析清楚 2011-08-10 9:20:10

对基本概念、基本理论进行剖析,同时配合经典例题介绍了许多新的、快捷的解题方法和技巧.

确实物有所值 2011-04-05 18:12:35

准备考研啦.以前的知识点遗忘的差不多了,很是郁闷,师兄推荐了华科大出版社出版的毛纲源老师编写的考研书,第一轮复习用,书中归纳的解题方法与技巧是其他参考书里没有的.很赞! 对我帮助很大.

题目讲解很细,分难度解析 2010-11-23 16:40:19

很喜欢这本书,题目讲解得很细,归纳得很好,分层次地解答,总结得通俗易懂,基础中有提高,让你很开心地就掌握了方法.内容真的不错!

是老师介绍我们买的 2010-03-11 16:54:29

数学老师说毛纲源的考研系列书很好,买了之后看了,觉得书中的案例太经典了,值得推荐.

很好,喜欢华中科大出版的数学辅导书 2010-03-18 19:13

推荐大家用这一系列的书,个人比较喜欢.大家可以试试看.

书很好很好,值得一看 2010-12-15 20:28:51

我们数学老师给我们推荐买的,这本书的体系很好,是按照题型来编排的,而且题很好,推荐这本书.

书不错! 2010-03-26 08:27

这本书还是很经典的,相对那些考试机构的书最大的优点就是详细,方法经典.

书很好,值得推荐 2010-10-20 11:50:30

注重归纳总结,力求一题多解,解答规范、详细.思路清晰,很适合我用来考前突击.

# 前 言

自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学考试实行统考以来已有 26 载. 这 26 年的考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料, 也是命题组专家们的智慧结晶. 而拥有一套内容丰富、题型全面、讲解详尽的历届数学真题分类精解图书, 则是广大考生的殷切期盼.

本书严格按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学三考试大纲》的要求编写, 对历年 (1997—2012 年) 考研真题逐题给出详细解答, 且绝大部分真题给出了一题多解. 这就是真题精解的含义. 给出一题多解有利于考生通晓基本考点, 熟悉各考点之间的有机联系, 促成各考点融会贯通, 因而有利于综合提高考生的应试能力.

本书有很多试题的解法是作者从事数学教学和考研数学辅导班的实践中研究、总结出来的, 其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷.

本书把历年考研数学三的试题依据统一考试大纲的次序, 按试题考点内容分章, 且将历年同一考点的试题归纳在一起, 分题型讲解, 这样便于考生复习. 复习时, 考生只要认真分析、了解、消化和掌握历年试题的核心内容, 便能发现考研数学试题中总是反复出现共性问题, 考生也能从这些共性问题中发现命题规律和命题趋势, 找出考点之间的有机联系, 明确各部分考点内容的重点、难点.

本书具有下述特点.

## 1. 一题多解、内容丰富

对每一道真题, 首先给出解题思路, 介绍该题应如何下手, 以提高考生的解题能力.

对绝大多数考题都给出一题多解, 以帮助考生扩大视野, 有利于考生熟悉各考点之间的有机联系, 促使各考点融会贯通, 提高考生对考点理解的深度与广度, 从而综合提高考生的应试能力, 有利于考研数学成绩的提高.

对于考生的答题错误, 还给出错解分析, 帮助考生分析错因, 使其引以为戒, 远离解题误区.

为了帮助备考数学三的考生更全面地了解与考点相关内容的命题情况. 本书还精选了数学一、数学二及原数学四相关内容的典型考题, 并给出解答, 同时也精选了 1996 年(含)以前数学三相关内容的典型考题, 并给出了解答, 供备考数学三的考生复习之用.

## 2. 题型细分, 有利于提高应试能力

本书按考点对历年真题分类, 对各类题型进行详细归纳和总结, 给出了各类题型的解题思路、方法和技巧, 使考生能举一反三、触类旁通, 从而提高应试能力.

此外, 通过“考点—题型—真题—解题思路—精解(一题多解)—考查知识点—错解分析”这一过程的学习, 使备考人员可以了解到每一考点中已考过的题型, 这种题型以前考过什么样的题目, 常与哪些知识点联合命题, 从哪个角度命题, 等等, 从而使备考人员更好、更快地掌握命题重点和规律, 快速提高应试人员的解题能力.

## 3. 真题解答详尽, 适于自学

考虑到文科类考生备考数学三的特点, 编写此书时, 在理论推导和文字叙述等方面尽量做到由浅入深, 易于接受, 便于自学.

本书给备考数学三的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会,笔者建议阅读本书前应先认真阅读数学考试大纲,以明确数学三考试的有关要求,接着再阅读有关教材和参考书.在这里特向读者推荐由本人编写的《最新考研数学(三)常考题型解题方法技巧归纳》.该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本定理和基本计算公式都作了全面介绍,对各类题型的解题思路、方法和技巧进行了归纳、总结,复习完后再来看本书以检测自己的水平.建议考生将本书中的全部试题做两到三遍,直到对所有题一看就能熟练、正确地解答出来.

历年的考研数学三的试卷在附录中给出,供考生自测和查阅之用,其精解在正文的位置全部标明.(2013年以后的试题及解析可在QQ群(群号:149812311)共享栏目下载)

本书在编写过程中由于时间紧、任务重,加上水平有限,难免有许多疏漏之处,敬请广大读者和专家、同行不吝赐教.

祝考生朋友:复习顺利,考研成功,圆入名校之梦.

毛纲源

于武汉理工大学国际教育学院

2012年5月

# 目 录

## 第1部分 高等数学

|                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 第1章 函数、极限、连续 .....                                                                  | (2)  |
| 考点 1.1.1 函数的概念与性质 .....                                                             | (2)  |
| 题型 1.1.1.1 求分段函数的复合函数 .....                                                         | (2)  |
| 题型 1.1.1.2 判定数列或函数在区间上的有界性 .....                                                    | (3)  |
| 考点 1.1.2 极限的概念与性质 .....                                                             | (4)  |
| 题型 1.1.2.1 判定极限的存在性 .....                                                           | (4)  |
| 题型 1.1.2.2 讨论极限的性质 .....                                                            | (5)  |
| 考点 1.1.3 求函数极限 .....                                                                | (6)  |
| 题型 1.1.3.1 求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限 .....                      | (6)  |
| 题型 1.1.3.2 求 $\infty - \infty$ 型极限 .....                                            | (7)  |
| 题型 1.1.3.3 求幂指函数型极限 .....                                                           | (8)  |
| 题型 1.1.3.4 求极限式含幂指函数的极限 .....                                                       | (9)  |
| 题型 1.1.3.5 求极限式含指数函数差的极限 .....                                                      | (10) |
| 题型 1.1.3.6 求极限式含 $\ln f(x)$ 的函数极限, 其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$ ..... | (11) |
| 题型 1.1.3.7 求含有界变量为因子的函数极限 .....                                                     | (12) |
| 题型 1.1.3.8 求幂指函数型的数列极限 .....                                                        | (12) |
| 考点 1.1.4 确定未知参(函)数 .....                                                            | (13) |
| 题型 1.1.4.1 已知极限式的极限, 反求其所含的未知参数 .....                                               | (13) |
| 题型 1.1.4.2 已知含未知函数的一极限, 求含该函数的另一函数极限 .....                                          | (15) |
| 考点 1.1.5 无穷小量或无穷大量的比较 .....                                                         | (16) |
| 题型 1.1.5.1 无穷小量阶的比较 .....                                                           | (16) |
| 题型 1.1.5.2 确定无穷小量的阶数 .....                                                          | (16) |
| 题型 1.1.5.3 无穷大量阶的比较 .....                                                           | (18) |
| 考点 1.1.6 讨论函数的连续性 & 间断点的类型 .....                                                    | (18) |
| 题型 1.1.6.1 讨论函数的连续性 .....                                                           | (18) |
| 题型 1.1.6.2 判别函数 $f(x)$ 的间断点的类型 .....                                                | (20) |
| 题型 1.1.6.3 已知分段函数的连续性求其待定常数 .....                                                   | (22) |
| 考点 1.1.7 连续函数性质的应用 .....                                                            | (23) |
| 题型 1.1.7.1 介值定理(零点定理)的应用 .....                                                      | (23) |
| 第2章 一元函数微分学 .....                                                                   | (24) |
| 考点 1.2.1 导数定义的应用 .....                                                              | (24) |
| 题型 1.2.1.1 讨论函数在某点的可导性 .....                                                        | (24) |
| 题型 1.2.1.2 讨论分段函数的可导性及导函数的连续性 .....                                                 | (26) |
| 题型 1.2.1.3 利用导数定义求极限或导数 .....                                                       | (27) |
| 考点 1.2.2 求一元函数的导数和微分 .....                                                          | (28) |
| 题型 1.2.2.1 求各类一元函数的各阶导数 .....                                                       | (28) |
| 题型 1.2.2.2 微分的概念与计算 .....                                                           | (30) |

|                                                                       |      |
|-----------------------------------------------------------------------|------|
| 考点 1.2.3 利用导数讨论函数性态 .....                                             | (31) |
| 题型 1.2.3.1 确定单调区间与极值 .....                                            | (31) |
| 题型 1.2.3.2 已知一极限式,讨论函数是否取得极值 .....                                    | (34) |
| 题型 1.2.3.3 求函数曲线的凹凸区间与拐点 .....                                        | (35) |
| 题型 1.2.3.4 求函数曲线的渐近线 .....                                            | (37) |
| 题型 1.2.3.5 确定函数方程存在实根及其个数问题 .....                                     | (38) |
| 考点 1.2.4 微分中值定理的应用 .....                                              | (40) |
| 题型 1.2.4.1 利用微分中值定理的条件与结论解题 .....                                     | (40) |
| 题型 1.2.4.2 使用罗尔定理证明中值等式 .....                                         | (41) |
| 题型 1.2.4.3 证明中值等式 $f'(\xi) \pm g'(\xi)f(\xi) = 0$ .....               | (44) |
| 题型 1.2.4.4 证明与函数差值有关的中值命题 .....                                       | (46) |
| 题型 1.2.4.5 证明存在多个中值所满足的中值等式 .....                                     | (46) |
| 题型 1.2.4.6 证明函数与其导数的关系 .....                                          | (49) |
| 题型 1.2.4.7 利用导数证明不等式 .....                                            | (50) |
| 考点 1.2.5 一元函数微分学的几何应用 .....                                           | (52) |
| 题型 1.2.5.1 求曲线的切线和(或)法线方程 .....                                       | (52) |
| 题型 1.2.5.2 求解与两曲线相切的有关问题 .....                                        | (52) |
| 题型 1.2.5.3 求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题 .....                                   | (53) |
| 考点 1.2.6 导数在经济活动分析中的应用 .....                                          | (54) |
| 题型 1.2.6.1 计算与弹性有关的问题 .....                                           | (54) |
| 题型 1.2.6.2 计算与边际和弹性有关的应用题 .....                                       | (55) |
| 题型 1.2.6.3 求解经济应用中一元函数的最值问题 .....                                     | (57) |
| 第 3 章 一元函数积分学 .....                                                   | (59) |
| 考点 1.3.1 原函数与不定积分的关系 .....                                            | (59) |
| 题型 1.3.1.1 原函数与不定积分的概念及其性质 .....                                      | (59) |
| 题型 1.3.1.2 连续函数 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的性质之间的关系 ..... | (59) |
| 考点 1.3.2 计算不定积分 .....                                                 | (60) |
| 题型 1.3.2.1 计算分母含根号因子的无理函数的不定积分(定积分) .....                             | (60) |
| 题型 1.3.2.2 求简单无理函数的不定积分 .....                                         | (61) |
| 题型 1.3.2.3 求被积函数含反三角函数、对数函数为因子函数的不定积分 .....                           | (62) |
| 考点 1.3.3 计算定积分 .....                                                  | (63) |
| 题型 1.3.3.1 利用定积分的几何意义计算定积分 .....                                      | (63) |
| 题型 1.3.3.2 计算对称区间 $[-a, a]$ 上的定积分 .....                               | (64) |
| 题型 1.3.3.3 计算被积函数含导函数的积分 .....                                        | (66) |
| 题型 1.3.3.4 计算 $\int_a^b f[\varphi(x)]dx$ .....                        | (66) |
| 题型 1.3.3.5 求解函数方程,该方程含积分区间(区域)确定的未知函数的定(二重)积分 .....                   | (67) |
| 题型 1.3.3.6 比较定积分值的大小 .....                                            | (68) |
| 题型 1.3.3.7 计算周期函数的定积分 .....                                           | (69) |
| 考点 1.3.4 求解与变限积分有关的问题 .....                                           | (71) |
| 题型 1.3.4.1 求变限积分的导数 .....                                             | (71) |
| 题型 1.3.4.2 求含变限积分的未定式极限 .....                                         | (72) |
| 题型 1.3.4.3 讨论变限积分函数的性态 .....                                          | (72) |
| 考点 1.3.5 有关定积分的证明 .....                                               | (74) |
| 题型 1.3.5.1 证明定积分的等式 .....                                             | (74) |
| 题型 1.3.5.2 证明定积分的不等式 .....                                            | (75) |



|                                                       |       |
|-------------------------------------------------------|-------|
| 考点 1.3.6 计算反常积分(广义积分)                                 | (77)  |
| 题型 1.3.6.1 计算无穷区间上的反常积分                               | (77)  |
| 题型 1.3.6.2 计算无界函数的反常积分                                | (78)  |
| 考点 1.3.7 一元函数积分学的应用                                   | (79)  |
| 题型 1.3.7.1 已知曲线方程,求其所围平面图形的面积                         | (79)  |
| 题型 1.3.7.2 求旋转体体积                                     | (81)  |
| 题型 1.3.7.3 求解与最值问题相结合的几何应用题                           | (82)  |
| 题型 1.3.7.4 由边际函数求总函数                                  | (83)  |
| 第 4 章 多元函数微积分学                                        | (85)  |
| 考点 1.4.1 二元(多元)函数微分学中的基本概念                            | (85)  |
| 题型 1.4.1.1 二元函数极限、连续、可偏导及可微的基本概念                      | (85)  |
| 题型 1.4.1.2 二元函数的极限、连续、可偏导及可微的关系                       | (86)  |
| 考点 1.4.2 计算复合函数的偏导数                                   | (87)  |
| 题型 1.4.2.1 计算二元(多元)显函数的偏导数(的值)                        | (87)  |
| 题型 1.4.2.2 求带抽象函数记号的复合函数的偏导数                          | (88)  |
| 考点 1.4.3 求二元函数的全微分                                    | (91)  |
| 题型 1.4.3.1 求二元显函数的全微分                                 | (92)  |
| 题型 1.4.3.2 求多元隐函数的偏导数及其全微分                            | (94)  |
| 考点 1.4.4 多元函数微分学的应用                                   | (96)  |
| 题型 1.4.4.1 求二元函数的极值(无条件极值)和最值                         | (96)  |
| 题型 1.4.4.2 求二(多)元函数的条件极值                              | (97)  |
| 考点 1.4.5 计算二重积分                                       | (101) |
| 题型 1.4.5.1 根据积分区域选择积分次序计算二重积分                         | (101) |
| 题型 1.4.5.2 交换二次积分的积分次序                                | (102) |
| 题型 1.4.5.3 转换二次积分(转换坐标系)                              | (103) |
| 题型 1.4.5.4 利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算                    | (103) |
| 题型 1.4.5.5 分块计算二重积分                                   | (106) |
| 题型 1.4.5.6 计算简单无界区域上的二重积分                             | (110) |
| 题型 1.4.5.7 讨论二重积分的不等式                                 | (112) |
| 考点 1.4.6 计算圆域上的二重积分                                   | (112) |
| 题型 1.4.6.1 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0)$ 上的二重积分   | (112) |
| 题型 1.4.6.2 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax (a > 0)$ 上的二重积分   | (113) |
| 题型 1.4.6.3 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2by (b > 0)$ 上的二重积分   | (114) |
| 题型 1.4.6.4 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq -2by (b > 0)$ 上的二重积分  | (115) |
| 题型 1.4.6.6 计算圆域 $x^2 + y^2 \leq 2ax + 2by + c$ 上的二重积分 | (116) |
| 第 5 章 无穷级数                                            | (117) |
| 考点 1.5.1 判别(证明)常数项级数的敛散性                              | (117) |
| 题型 1.5.1.1 判别正项级数的敛散性                                 | (117) |
| 题型 1.5.1.2 判别交错级数的敛散性                                 | (118) |
| 题型 1.5.1.3 判别任意项级数的收敛、发散、绝对收敛、条件收敛                    | (119) |
| 题型 1.5.1.4 已知数项级数的敛散性,确定其参数的取值范围                      | (122) |
| 考点 1.5.2 幂级数                                          | (122) |
| 题型 1.5.2.1 求幂级数的收敛半径或(和)收敛域                           | (122) |
| 题型 1.5.2.2 求幂级数的和函数                                   | (124) |
| 题型 1.5.2.3 求数项级数的和                                    | (128) |
| 考点 1.5.3 将函数展为幂级数                                     | (131) |

|                                                 |       |
|-------------------------------------------------|-------|
| 题型 1.5.3.1 求函数在指定点的幂级数展开式 .....                 | (132) |
| 题型 1.5.3.2 利用幂级数展开式求其和函数或数项级数的和 .....           | (133) |
| <b>第 6 章 常微分方程与差分方程</b> .....                   | (136) |
| <b>考点 1.6.1 求解一阶线性微分方程</b> .....                | (136) |
| 题型 1.6.1.1 求解变量可分离的微分方程 .....                   | (136) |
| 题型 1.6.1.2 求解齐次微分方程 .....                       | (136) |
| 题型 1.6.1.3 求解一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ ..... | (137) |
| 题型 1.6.1.4 求解以分段函数为非齐次项或系数的一阶线性微分方程 .....       | (138) |
| 题型 1.6.1.5 求解可化为一阶微分方程的方程 .....                 | (139) |
| <b>考点 1.6.2 求解未知函数出现在积分号内的方程</b> .....          | (140) |
| 题型 1.6.2.1 求解含变限积分的方程 .....                     | (140) |
| 题型 1.6.2.2 求解含积分区域变化的二重积分的函数方程 .....            | (141) |
| <b>考点 1.6.3 求解二阶(高阶)常系数线性微分方程</b> .....         | (143) |
| 题型 1.6.3.1 确定二阶常系数非齐次线性微分方程特解形式 .....           | (143) |
| 题型 1.6.3.2 求解二阶常系数线性微分方程 .....                  | (144) |
| <b>考点 1.6.4 微分方程的简单应用</b> .....                 | (145) |
| 题型 1.6.4.1 求解与平面图形面积有关的问题 .....                 | (145) |
| 题型 1.6.4.2 求解与旋转体体积有关的问题 .....                  | (146) |
| <b>考点 1.6.5 一阶常系数线性差分方程</b> .....               | (148) |
| 题型 1.6.5.1 求解一阶常系数线性非齐次差分方程 .....               | (148) |
| 题型 1.6.5.2 一阶常系数线性非齐次差分方程的简单应用 .....            | (149) |

## 第 2 部分 线性代数

|                                                                    |       |
|--------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>第 1 章 行列式</b> .....                                             | (151) |
| <b>考点 2.1.1 计算数字型行列式</b> .....                                     | (151) |
| 题型 2.1.1.1 计算行和(或列和)相等的行列式 .....                                   | (151) |
| 题型 2.1.1.2 计算非零元素(主要)在一条或两条线上的行列式 .....                            | (152) |
| 题型 2.1.1.3 计算非零元素在平行于主对角线的三条线上的行列式 .....                           | (153) |
| <b>考点 2.1.2 计算抽象矩阵的行列式</b> .....                                   | (155) |
| 题型 2.1.2.1 求解同阶矩阵 $A, B$ 的线性组合的行列式 $ aA + bB $ ( $a, b$ 为常数) ..... | (155) |
| 题型 2.1.2.2 计算零子块的四分块矩阵的行列式 .....                                   | (156) |
| 题型 2.1.2.3 利用方阵相乘的行列式性质计算行列式 .....                                 | (156) |
| 题型 2.1.2.4 利用秩、特征值、相似矩阵等计算行列式 .....                                | (158) |
| <b>考点 2.1.3 克莱姆法则的应用</b> .....                                     | (158) |
| 题型 2.1.3.1 求方程组 $AX = b$ 的唯一解或判定方程组 $AX = 0$ 只有零解 .....            | (158) |
| 题型 2.1.3.2 已知方程组 $A_{n \times n} X = 0$ 只有零解或有非零解, 确定待求常数 .....    | (159) |
| <b>第 2 章 矩阵</b> .....                                              | (160) |
| <b>考点 2.2.1 矩阵运算</b> .....                                         | (160) |
| 题型 2.2.1.1 利用矩阵乘法的结合律计算乘积矩阵 .....                                  | (160) |
| 题型 2.2.1.2 计算矩阵的高次幂 .....                                          | (160) |
| 题型 2.2.1.3 证明抽象矩阵可逆, 并求其逆矩阵的表示式 .....                              | (161) |
| 题型 2.2.1.4 求元素已知的矩阵的逆矩阵 .....                                      | (161) |
| <b>考点 2.2.2 求解与伴随矩阵有关的问题</b> .....                                 | (164) |
| 题型 2.2.2.1 计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式 .....                                   | (164) |
| 题型 2.2.2.2 求 $(A^*)^{-1}$ 或 $(A^{-1})^*$ .....                     | (165) |
| 题型 2.2.2.3 求与伴随矩阵有关的矩阵的秩 .....                                     | (165) |

|                                                                                                                        |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 题型 2.2.2.4 求伴随矩阵的表达式 .....                                                                                             | (165) |
| 考点 2.2.3 求矩阵的秩 .....                                                                                                   | (168) |
| 题型 2.2.3.1 求数字型矩阵的秩 .....                                                                                              | (168) |
| 题型 2.2.3.2 求抽象矩阵的秩 .....                                                                                               | (168) |
| 题型 2.2.3.3 已知矩阵的秩,求其待定常数或其待定常数所满足的关系 .....                                                                             | (170) |
| 考点 2.2.4 求解矩阵方程 .....                                                                                                  | (171) |
| 题型 2.2.4.1 求解单个矩阵方程 .....                                                                                              | (172) |
| 题型 2.2.4.2 求解矩阵方程组 .....                                                                                               | (172) |
| 考点 2.2.5 求解与初等变换有关的问题 .....                                                                                            | (173) |
| 题型 2.2.5.1 用初等矩阵表示初等变换 .....                                                                                           | (173) |
| 题型 2.2.5.2 利用初等矩阵及其性质表示变换前或变换后的矩阵或运算后的矩阵 .....                                                                         | (174) |
| 题型 2.2.5.3 讨论等价矩阵的有关问题 .....                                                                                           | (176) |
| 第 3 章 向量 .....                                                                                                         | (178) |
| 考点 2.3.1 向量的线性组合与线性表示 .....                                                                                            | (178) |
| 题型 2.3.1.1 讨论一向量能否用一向量组线性表示 .....                                                                                      | (178) |
| 题型 2.3.1.2 若向量 $\beta$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为抽象型的向量组(向量的具体元素未知),<br>讨论 $\beta$ 能否由该向量组线性表示 ..... | (180) |
| 题型 2.3.1.3 判别两数字型向量组,一组向量能否由另一组向量线性表出 .....                                                                            | (181) |
| 考点 2.3.2 向量组的线性相关性 .....                                                                                               | (183) |
| 题型 2.3.2.1 判别(证明)向量组的线性相关性 .....                                                                                       | (183) |
| 题型 2.3.2.2 已知一向量组线性无关,判定其线性组合的向量组的线性相关性 .....                                                                          | (184) |
| 题型 2.3.2.3 证明向量组线性无关 .....                                                                                             | (186) |
| 题型 2.3.2.4 两个有线性关系的向量组的性质 .....                                                                                        | (189) |
| 题型 2.3.2.5 已知向量组的线性相关性,求其待定常数 .....                                                                                    | (190) |
| 题型 2.3.2.6 求向量组的极大线性无关组和向量组的秩 .....                                                                                    | (192) |
| 第 4 章 线性方程组 .....                                                                                                      | (194) |
| 考点 2.4.1 线性方程组解的判定 .....                                                                                               | (194) |
| 题型 2.4.1.1 判定齐次和非齐次线性方程组解的情况 .....                                                                                     | (194) |
| 题型 2.4.1.2 已知线性方程组解的情况,求其参数 .....                                                                                      | (195) |
| 考点 2.4.2 基础解系 .....                                                                                                    | (197) |
| 题型 2.4.2.1 基础解系的判定或证明 .....                                                                                            | (197) |
| 题型 2.4.2.2 基础解系和特解的求法 .....                                                                                            | (198) |
| 考点 2.4.3 求解线性方程组 .....                                                                                                 | (201) |
| 题型 2.4.3.1 求解不含参数的线性方程组的通解 .....                                                                                       | (201) |
| 题型 2.4.3.2 求解含参数的齐次线性方程组 .....                                                                                         | (202) |
| 题型 2.4.3.3 求解含参数的非齐次线性方程组 .....                                                                                        | (205) |
| 题型 2.4.3.4 求解其通解满足一定条件的含参数的方程组 .....                                                                                   | (208) |
| 考点 2.4.4 求(抽象)线性方程组的通解 .....                                                                                           | (209) |
| 题型 2.4.4.1 $A$ 没有具体给出,利用解的结构定理求 $AX=0$ 的通解 .....                                                                       | (209) |
| 题型 2.4.4.2 利用线性方程组的向量形式求其通解 .....                                                                                      | (210) |
| 考点 2.4.5 求两线性方程组的公共解 .....                                                                                             | (211) |
| 题型 2.4.5.1 已知具体的线性方程组求其公共解 .....                                                                                       | (212) |
| 题型 2.4.5.2 已知一个方程组的通解及另一具体方程组,求其(非零)公共解 .....                                                                          | (213) |
| 考点 2.4.6 讨论两方程组同解的有关问题 .....                                                                                           | (214) |
| 题型 2.4.6.1 证明两齐次线性方程组同解 .....                                                                                          | (214) |
| 题型 2.4.6.2 已知两线性方程组有公共非零解或同解,求其待定常数 .....                                                                              | (216) |

|                                                                 |       |
|-----------------------------------------------------------------|-------|
| <b>第 5 章 矩阵的特征值和特征向量</b>                                        | (219) |
| <b>考点 2.5.1 求矩阵的特征值、特征向量</b>                                    | (219) |
| 题型 2.5.1.1 求数字型矩阵的特征值和特征向量                                      | (219) |
| 题型 2.5.1.2 求抽象矩阵的特征值、特征向量                                       | (221) |
| 题型 2.5.1.3 已知一矩阵的特征值、特征向量,求相关矩阵的特征值、特征向量                        | (222) |
| <b>考点 2.5.2 使用特征值、特征向量求解有关问题</b>                                | (223) |
| 题型 2.5.2.1 已知矩阵的特征值、特征向量,反求其矩阵的待定常数                             | (223) |
| 题型 2.5.2.2 已知矩阵的特征值、特征向量反求其矩阵                                   | (223) |
| 题型 2.5.2.3 矩阵特征值的两条性质的应用                                        | (226) |
| <b>考点 2.5.3 相似矩阵与相似对角化</b>                                      | (227) |
| 题型 2.5.3.1 判别两矩阵相似                                              | (227) |
| 题型 2.5.3.2 判别方阵是否可相似对角化                                         | (227) |
| 题型 2.5.3.3 利用相似矩阵的性质求矩阵中的参数                                     | (229) |
| <b>考点 2.5.4 将矩阵化为相似对角矩阵</b>                                     | (231) |
| 题型 2.5.4.1 已知矩阵 $A$ 可相似对角化,求可逆矩阵 $P$ 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵         | (231) |
| 题型 2.5.4.2 已知 $A$ 可相似对角化,求对角矩阵 $\Lambda$ 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ | (232) |
| <b>考点 2.5.5 实对称矩阵性质的应用</b>                                      | (233) |
| 题型 2.5.5.1 已知实对称矩阵的部分特征向量,求另一部分特征向量                             | (233) |
| 题型 2.5.5.2 $A$ 为实对称矩阵,求正交矩阵 $Q$ 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵              | (234) |
| 题型 2.5.5.3 利用相似对角化求矩阵的高次幂                                       | (235) |
| <b>第 6 章 二次型</b>                                                | (237) |
| <b>考点 2.6.1 二次型的几个基本概念</b>                                      | (237) |
| 题型 2.6.1.1 求二次型的矩阵表示                                            | (237) |
| 题型 2.6.1.2 求二次型的秩                                               | (238) |
| <b>考点 2.6.2 求解与化标准形有关的问题</b>                                    | (239) |
| 题型 2.6.2.1 用正交变换化二次型(实对称矩阵)为标准形(对角矩阵)                           | (239) |
| 题型 2.6.2.2 已知二次型的标准形(规范形),反求原二次型中的未知参数                          | (241) |
| <b>考点 2.6.3 判别实二次型(实对称矩阵)的正定性</b>                               | (242) |
| 题型 2.6.3.1 判别二次型或其矩阵的正定性                                        | (242) |
| 题型 2.6.3.2 确定参数值使二次型或其矩阵正定                                      | (244) |
| <b>考点 2.6.4 合同矩阵与合同变换</b>                                       | (247) |
| 题型 2.6.4.1 判别(证明)两实对称矩阵合同                                       | (247) |

## 第 3 部分 概率论与数理统计

|                                          |       |
|------------------------------------------|-------|
| <b>第 1 章 随机事件与概率</b>                     | (251) |
| <b>考点 3.1.1 随机事件的关系及其运算法则</b>            | (251) |
| 题型 3.1.1.1 随机事件的关系                       | (251) |
| 题型 3.1.1.2 随机事件的运算及其性质                   | (252) |
| <b>考点 3.1.2 计算事件的概率</b>                  | (252) |
| 题型 3.1.2.1 计算古典型概率                       | (252) |
| 题型 3.1.2.2 计算几何型概率                       | (253) |
| 题型 3.1.2.3 计算伯努利概型的概率                    | (255) |
| <b>考点 3.1.3 计算概率的几个常用公式的应用</b>           | (256) |
| 题型 3.1.3.1 计算概率的加法公式、乘法公式、条件概率公式与减法公式的应用 | (256) |
| 题型 3.1.3.2 全概率公式和贝叶斯公式的应用                | (257) |
| 题型 3.1.3.3 全概率公式的应用                      | (257) |

|                                                                  |       |
|------------------------------------------------------------------|-------|
| 考点 3.1.4 判别事件的独立性 .....                                          | (259) |
| 题型 3.1.4.1 判别(证明)两事件相互独立 .....                                   | (259) |
| 题型 3.1.4.2 判别(证明) $n(n>2)$ 个事件相互独立 .....                         | (259) |
| 第 2 章 一维随机变量及其分布 .....                                           | (261) |
| 考点 3.2.1 判别分布列、概率密度、分布函数 .....                                   | (261) |
| 题型 3.2.1.1 分布函数的判别 .....                                         | (261) |
| 题型 3.2.1.2 概率密度函数的判定 .....                                       | (262) |
| 考点 3.2.2 求分布律和分布函数 .....                                         | (262) |
| 题型 3.2.2.1 求离散型随机变量的分布律(概率分布) .....                              | (262) |
| 题型 3.2.2.2 求随机变量的分布函数 .....                                      | (263) |
| 题型 3.2.2.3 讨论分布函数的性质 .....                                       | (265) |
| 考点 3.2.3 利用分布计算事件的概率 .....                                       | (266) |
| 题型 3.2.3.1 利用分布函数计算事件的概率 .....                                   | (266) |
| 题型 3.2.3.2 利用常见分布计算概率 .....                                      | (266) |
| 考点 3.2.4 求与随机变量分布有关的参数 .....                                     | (268) |
| 题型 3.2.4.1 已知随机变量的分布求其参数 .....                                   | (268) |
| 题型 3.2.4.2 已知概率,计算区间参数或数字特征参数 .....                              | (269) |
| 考点 3.2.5 求随机变量函数的分布 .....                                        | (271) |
| 题型 3.2.5.1 求连续型随机变量 $X$ 的函数 $g(X)$ 的分布 .....                     | (271) |
| 题型 3.2.5.2 已知 $X, Y$ 的分布,求 $\max(X, Y)$ 与 $\min(X, Y)$ 的分布 ..... | (272) |
| 第 3 章 二维随机变量及其分布 .....                                           | (275) |
| 考点 3.3.1 求二维离散随机变量的联合概率分布 .....                                  | (275) |
| 题型 3.3.1.1 给定随机试验,求离散型随机变量的联合分布 .....                            | (275) |
| 题型 3.3.1.2 由随机事件或一对随机变量的分布,求出另一对随机变量的联合概率分布 .....                | (277) |
| 题型 3.3.1.3 在一定条件下,由 $X, Y$ 的分布律求 $(X, Y)$ 的联合分布律 .....           | (281) |
| 考点 3.3.2 求二维连续型随机变量的分布 .....                                     | (282) |
| 题型 3.3.2.1 已知分区域定义的联合密度,求其分布函数 .....                             | (282) |
| 题型 3.3.2.2 由联合概率密度求其边缘概率密度 .....                                 | (283) |
| 题型 3.3.2.3 已知联合密度、边缘密度求其条件密度 .....                               | (284) |
| 题型 3.3.2.4 由条件分布反求联合分布、边缘分布 .....                                | (286) |
| 考点 3.3.3 二维随机变量函数的分布 .....                                       | (287) |
| 题型 3.3.3.1 求二维离散型随机变量函数的概率分布 .....                               | (287) |
| 题型 3.3.3.2 求二维连续型随机变量函数的分布 .....                                 | (288) |
| 题型 3.3.3.3 求两个随机变量和的分布,其中一个是连续型,另一个是离散型 .....                    | (293) |
| 考点 3.3.4 求二维随机变量取值的概率 .....                                      | (295) |
| 题型 3.3.4.1 求二维离散型随机变量取值的概率 .....                                 | (295) |
| 题型 3.3.4.2 求二维连续型随机变量落入平面区域内的概率 .....                            | (296) |
| 考点 3.3.5 随机变量的独立性 .....                                          | (298) |
| 题型 3.3.5.1 判别两随机变量的独立性 .....                                     | (298) |
| 题型 3.3.5.2 利用两随机变量的独立性确定联合分布中的参数 .....                           | (299) |
| 第 4 章 随机变量的数字特征 .....                                            | (301) |
| 考点 3.4.1 一维随机变量的数字特征 .....                                       | (301) |
| 题型 3.4.1.1 求一维随机变量的数学期望与方差 .....                                 | (301) |
| 题型 3.4.1.2 求一维随机变量函数的期望与方差 .....                                 | (302) |
| 考点 3.4.2 求二维随机变量的数字特征 .....                                      | (304) |
| 题型 3.4.2.1 求二维随机变量函数的数学期望和方差 .....                               | (304) |

|                                          |       |
|------------------------------------------|-------|
| 题型 3.4.2.2 计算协方差及相关系数 .....              | (305) |
| 题型 3.4.2.3 确定两随机变量的相关性 .....             | (311) |
| 考点 3.4.3 求解与数字特征有关的应用题 .....             | (311) |
| 题型 3.4.3.1 求解与数字特征有关的经济应用题 .....         | (311) |
| 题型 3.4.3.2 求解与数字特征有关的其他实际应用题 .....       | (312) |
| 第 5 章 大数定律和中心极限定理 .....                  | (315) |
| 考点 3.5.1 切比雪夫不等式 .....                   | (315) |
| 题型 3.5.1.1 用切比雪夫不等式估计事件的概率 .....         | (315) |
| 考点 3.5.2 大数定律 .....                      | (315) |
| 题型 3.5.2.1 利用三个大数定律成立的条件和结论解题 .....      | (315) |
| 考点 3.5.3 中心极限定理 .....                    | (316) |
| 题型 3.5.3.1 应用列维-林德伯格中心极限定理的条件和结论解题 ..... | (317) |
| 题型 3.5.3.2 列维-林德伯格中心极限定理的应用 .....        | (318) |
| 题型 3.5.3.3 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理的应用 .....       | (319) |
| 第 6 章 数理统计的基本概念 .....                    | (321) |
| 考点 3.6.1 求统计量的分布 .....                   | (321) |
| 题型 3.6.1.1 判别或证明统计量服从 $\chi^2$ 分布 .....  | (321) |
| 题型 3.6.1.2 判别或证明统计量服从 $t$ 分布 .....       | (322) |
| 题型 3.6.1.3 判别或证明统计量服从 $F$ 分布 .....       | (324) |
| 考点 3.6.2 统计量的数字特征 .....                  | (325) |
| 题型 3.6.2.1 求统计量的数字特征 .....               | (325) |
| 第 7 章 参数估计 .....                         | (331) |
| 考点 3.7.1 参数的矩估计和极大似然估计 .....             | (331) |
| 题型 3.7.1.1 求参数的矩估计 .....                 | (331) |
| 题型 3.7.1.2 求未知参数的极(最)大似然估计量(值) .....     | (333) |
| 附录 1997—2012 年考研数学三试题 .....              | (337) |
| 1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (337) |
| 1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (338) |
| 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (340) |
| 2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (341) |
| 2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (343) |
| 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (344) |
| 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (346) |
| 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (347) |
| 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (349) |
| 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (351) |
| 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (352) |
| 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (354) |
| 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (356) |
| 2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (357) |
| 2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (359) |
| 2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 .....           | (360) |

(2013 年以后的试题及解析可在 QQ 群(群号:149812311)共享栏目下载)

# 第1部分 高等数学

---

## 第1章 函数、极限、连续

- 考点 1.1.1 函数的概念与性质
- 考点 1.1.2 极限的概念与性质
- 考点 1.1.3 求函数极限
- 考点 1.1.4 确定未知参(函)数
- 考点 1.1.5 无穷小量或无穷大量的比较
- 考点 1.1.6 讨论函数的连续性及其间断点的类型
- 考点 1.1.7 连续函数性质的应用

## 第2章 一元函数微分学

- 考点 1.2.1 导数定义的应用
- 考点 1.2.2 求一元函数的导数和微分
- 考点 1.2.3 利用导数讨论函数性态
- 考点 1.2.4 微分中值定理的应用
- 考点 1.2.5 一元函数微分学的几何应用
- 考点 1.2.6 导数在经济活动分析中的应用

## 第3章 一元函数积分学

- 考点 1.3.1 原函数与不定积分的概念及其关系
- 考点 1.3.2 计算不定积分
- 考点 1.3.3 计算定积分
- 考点 1.3.4 求解与变限积分有关的问题
- 考点 1.3.5 有关定积分的证明
- 考点 1.3.6 计算反常积分(广义积分)
- 考点 1.3.7 一元函数积分学的应用

## 第4章 多元函数微积分学

- 考点 1.4.1 二元(多元)函数微分学中的基本概念
- 考点 1.4.2 计算复合函数的偏导数
- 考点 1.4.3 求二元函数的全微分
- 考点 1.4.4 多元函数微分学的应用
- 考点 1.4.5 计算二重积分
- 考点 1.4.6 计算圆域上的二重积分

## 第5章 无穷级数

- 考点 1.5.1 判别(证明)常数项级数的敛散性
- 考点 1.5.2 幂级数
- 考点 1.5.3 将函数展为幂级数

## 第6章 常微分方程与差分方程

- 考点 1.6.1 求解一阶线性微分方程
- 考点 1.6.2 求解未知函数出现在积分号内的方程
- 考点 1.6.3 求解二阶(高阶)常系数线性微分方程
- 考点 1.6.4 微分方程的简单应用
- 考点 1.6.5 一阶常系数线性差分方程

# 第1章 函数、极限、连续

## 考点 1.1.1 函数的概念与性质

### 题型 1.1.1.1 求分段函数的复合函数

若  $f(x)$  为分段函数,  $g(x)$  为分段函数或初等函数, 求其复合函数  $f(g(x))$  或  $g(f(x))$  或  $f(f(x))$  或  $g(g(x))$  时, 可采用先内后外或先外后内的代入法求之, 即先将内(或外)层函数的表达式代入, 然后将外(或内)层函数的表达式代入.

当  $f(x)$  与  $g(x)$  的分段点相同时, 则  $f(g(x)), g(f(x))$  也为分段函数, 且其分段点与  $f(x)$  或  $g(x)$  的相同, 这时还可采用以分段点为界点的分区间求之.

例 1.1.1.1 [2012 年 3]<sup>①</sup> 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{x}, & x \geq 1, \\ 2x-1, & x < 1, \end{cases} y = f(f(x)),$  则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} =$  \_\_\_\_\_.

[解题思路] 按照分段函数的复合函数的求法, 采取先内后外的方法, 先求出  $y = f(f(x))$  的表示式, 再求导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } y = f(f(x)) &= \begin{cases} \ln\sqrt{f(x)}, & f(x) \geq 1 \\ 2f(x)-1, & f(x) < 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & f(x) = \ln\sqrt{x} \geq 1, x \geq 1 \\ \ln\sqrt{2x-1}, & f(x) = 2x-1 \geq 1, x < 1 \\ 2\ln\sqrt{x}-1, & f(x) = \ln\sqrt{x} < 1, x \geq 1 \\ 2(2x-1)-1, & f(x) = 2x-1 < 1, x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x \geq e^2, x \geq 1 \\ \ln\sqrt{2x-1}, & x \geq 1, x < 1 \\ 2\ln\sqrt{x}-1, & x < e^2, x \geq 1 \\ 4x-3, & x < 1, x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\ln x\right), & x \geq e^2, \\ \ln x - 1, & 1 \leq x < e^2, \\ 4x - 3, & x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

当  $x=e$  时,  $y=\ln x-1$ , 故  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = (\ln x - 1)' \Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$ .

[考查知识点] 求分段函数的复合函数及其在一点的导数.

例 1.1.1.2 [1997 年 2]<sup>②</sup> 设  $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$  则  $g[f(x)]$  为( ).

$$(A) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (C) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

[解题思路]  $g(x), f(x)$  均为分段函数, 可采用先内后外或先外后内的方法求其复合函数  $g[f(x)]$ . 由于  $g(x), f(x)$  的分段点相同,  $g[f(x)]$  也是分段函数且其分段点与  $f(x), g(x)$  的相同, 因而可以以分段点为界点分区间求之.

解一 以分段点为界点分区间求之.

① [2012 年 3] 表示该例为 2012 年数学三的考题. 下同.

② 为帮助考数学三的考生全面复习有关考点内容的命题情况, 本书中精选了数学一、二及原数学四(1996 年及以前)中相关内容的典型试题及解答.



当  $x < 0$  时,  $f(x) = x^2 > 0$ , 则  $g[f(x)] = f(x) + 2 = x^2 + 2$ ,

当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = -x \leq 0$ , 则  $g[f(x)] = 2 - f(x) = 2 - (-x) = 2 + x$ , 故

$$g[f(x)] = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0, \\ x + 2, & x \geq 0. \end{cases} \text{ 仅(D)入选.}$$

解二 采用先外后内的方法求之.

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leq 0 \\ 2 + f(x), & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x^2, & x^2 \leq 0, & x < 0, & \text{①} \\ 2 + x^2, & x^2 > 0, & x < 0, & \text{②} \\ 2 - (-x), & -x \leq 0, & x \geq 0, & \text{③} \\ 2 + (-x), & -x > 0, & x \geq 0. & \text{④} \end{cases}$$

显然不等式组①与④无解, 不等式组②与③的解分别为  $x < 0, x \geq 0$ , 故

$$g[f(x)] = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0, \\ x + 2, & x \geq 0. \end{cases} \text{ 仅(D)入选.}$$

解三 采用先内后外的方法求之.

$$g[f(x)] = \begin{cases} g(x^2), & x < 0, \\ g(-x), & x \geq 0, \end{cases} = \begin{cases} 2 - x^2, & x^2 \leq 0, & x < 0, & \text{①} \\ x^2 + 2, & x^2 > 0, & x < 0, & \text{②} \\ 2 - (-x), & -x \leq 0, & x \geq 0, & \text{③} \\ 2 + (-x), & -x > 0, & x \geq 0. & \text{④} \end{cases}$$

显然不等式组①与④无解, 不等式组②与③的解分别为  $x < 0, x \geq 0$ , 故

$$g[f(x)] = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0, \\ x + 2, & x \geq 0. \end{cases} \text{ 仅(D)入选.}$$

[考查知识点] 求分段函数的复合函数.

题型 1.1.1.2 判定数列或函数在区间上的有界性

常用下述命题判别.

命题 1.1.1.1 (1) 如果  $x_0 \in (a, b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内

无界.

(2) 如果  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在, 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

(3) 如果在  $x$  的某一变化过程中变量  $y$  有极限, 则变量  $y$  是有界变量.

利用命题 1.1.1.1 判别函数在一区间内有界, 常转化为利用左、右极限来考察函数在所给区间端点是否有极限.

例 1.1.1.3 [2004 年 3] 函数  $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$  在区间( )内有界.

(A)  $(-1, 0)$  (B)  $(0, 1)$  (C)  $(1, 2)$  (D)  $(2, 3)$

[解题思路] 利用命题 1.1.1.1 判别之.

解一 大家知道, 若  $f(x)$  在有限闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  一定在  $[a, b]$  上有界, 但若  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内未必有界, 而如果再附加条件  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  必在  $(a, b)$  内有界, 这就是命题 1.1.1.1(2). 由于下述极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) = -\frac{\sin 3}{18}$$

存在, 又  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  内连续, 故由命题 1.1.1.1(2) 知  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  内有界. 仅(A)入选.

解二 因  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = +\infty$ ,