北京教育学院西城分院 主编

青年自学辅导丛书

第二版

高中数学
总复习与测试

SHUXUE

中国农业机械出版社

青 年 自 学 辅 导 丛 书

高中数学总复习与测试

第 二 版

北京教育学院西城分院 主编

中 国 农 业 机 械 出 版 社

本书在第一版的基础上进行了修改。全书共分六篇二十五章。第一篇精选了初中代数和平面几何重点内容，为复习高中数学打下基础。第二篇到第六篇是高中数学内容，它由代数、三角、立体几何、解析几何等组成。每一章分为《基础知识》、《例题分析》、《练习题》和《提示与答案》四部分。

本书既重点突出、又注意了知识的覆盖面，便于读者用较短时间复习更多的知识。例题和习题是按照目的性、顺序性、启发性、典型性、综合性和多样性这个原则选编的。突出了分析方法，又注意了解题过程的规范化，以利于基本能力的训练和创造性思维的培养。

本书可供自学青年、职工和高中毕业生参加各类成人高等学校招生考试和高考前复习时使用，也可作为教师的教学参考书。

高中数学总复习与测试

第二版

北京教育学院西城分院　主编

•

责任编辑：张淑琴

•

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

•

开本 787×1092 1/32·印张 22 1/4·字数 496 千字

1985年12月北京第一版

1988年1月北京第二版·1988年1月北京第三次印刷

印数 137,801—209,300·定价：4.10 元

•

ISBN 7-80032-000-6/G·1

再 版 前 言

为了帮助广大自学青年系统复习中学各科课程，以适应各类成人高等学校招生考试和“四化”建设的需要，我们曾于1985年编写了一套《青年自学辅导丛书》。该书出版后，深受广大青年的欢迎，先后印刷两次。

今年，国家教育委员会颁布了《中学部分学科教学内容要点》。《要点》的“说明”中指出：“……由国家教育委员会批准执行的全日制中学各学科教学大纲，于1987年春季开始实行。这套大纲……也是会考、中考、高考命题的依据。”我们根据这一精神，按照教学大纲的要求和规定，在原书的基础上进行了修改，增加了新知识、新内容，删掉了一些多余的内容，而且测试题也大部分采用标准化试题方式，并附有参考答案。本书适合自学青年和职工参加各类成人高等学校考试复习时使用，也适合应届高中毕业生参加高考前系统复习时使用。

这套丛书由北京教育学院西城分院组织北京市50多位有丰富的中学教学实践经验的教师编写，并特邀有关专家、教授审阅定稿。全套丛书包括：《政治》、《语文》、《历史》、《地理》、《英语》、《数学》、《物理》、《化学》等八个分册。

本分册跟目前同类书相比，具有以下四方面突出的特点：

1. 既突出了重点，又注意了知识的覆盖面。每一章在重点讲解基本知识和基本技能的基础上，大部分以题组的形式，配备了一些典型的例题和习题，便于集中解决某些重点

和难点的问题，而一些非重点的内容则渗透于例题和习题之中，这样可以使读者用较短时间复习到更多的知识。

2．既突出了分析方法，又注意了解题过程的规范化．对于例题，着重于分析为什么这么做，而不是只满足于知道怎么做，在此基础上写出解答过程．这样，既可以提高分析问题和解决问题的能力，又为自学创造了良好的条件。

3．既突出了基本能力的训练，又注意了创造性思维的培养。对于例题和习题的编写，尽可能做到由浅入深，由特殊到一般，由基本到综合。也注意到了一题多解、引伸推广和总结规律。这样，可以做到学一道、会一类，收到举一反三、事半功倍的效果。对于灵活思维、开阔视野，培养综合运用知识的能力，培养创造性思维将有积极的意义。

4．既突出了例题和习题的目的性、顺序性、启发性，典型性和综合性，又注意了题型的多样性．例题和习题的选编除了常见的题型外，还选编了一些选择题、填空题、是非判断题等。这样除了能够帮助读者更好地全面复习之外，还能培养读者思维的批判性和灵活性，也适应了考试改革的要求。

参加编写本分册的有傅佑珊、张国栋、古永喜、汪庆麟、张纯兰、雷学丽、尹宝一、张民范、周良栋。全书由张国珩同志审订。

限于编者水平，书中难免存在缺点和错误，欢迎读者批评指正。

北京教育学院西城分院

1987年10月

目　录

第一篇　预 备 知 识

第一章　绝对值与算术根

基 础 知 识

一、绝对值

(一) 绝对值的概念和几何意义

实数的绝对值的定义：正数的绝对值是这个正数本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零．即

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

绝对值的几何意义：数轴上表示数的点到原点的距离，就是这个数的绝对值．

(二) 绝对值的运算

1．$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，

2．$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$，

3．$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　　$(b\neq 0)$

二、算术根

(一) 定义

正数 a 的正的 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根．记为$\sqrt[n]{a}$

($a>0$). 0的算术根是零.

(二) 性质

1. $(\sqrt[n]{a})^n=a$,

2. $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & n\text{为奇数},\\ |a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0\ n\text{为偶数}),\\ -a & (a<0\ n\text{为偶数}).\end{cases}\end{cases}$

3. $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a\geqslant 0)$,

4. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\quad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$,

5. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad(a\geqslant 0,\ b>0)$,

6. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$,

7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

三、算术根与绝对值的关系

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

一般有 $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$，此公式将求算术根的问题转化为求绝对值的问题.

例题分析

例1. 选择题：下面每个小题都给出A、B、C、D四个结论，其中只有一个结论是正确的，请把正确结论的代号选出.（以后各章的选择题都是如此要求，不再说明）

(1) 在实数范围内，式子$\dfrac{1}{\sqrt{a-|a|}}$有意义，那么a的取值范围是(　　).

(A) $a>0$；(B) $a<0$；(C) $a\neq 0$；(D) 以上都不是.

(2) 函数$y=\frac{(|x|-10)^{\circ}}{1+\lg|x|}$的定义域是(　　).

(A) $x\neq 0$；(B) $x\neq\pm\frac{1}{10}$；(C) $x\neq 0$且$x\neq\pm\frac{1}{10}$；(D) $x\neq 0$，$x\neq\pm\frac{1}{10}$，$x\neq\pm 10$.

(3) $A=\{x||x|\geqslant 1\}$，$B=\{x||x-1|<2\}$，那么$A\cap B=$(　　).

(A) $\{x|1<x<3\}$；(B) $\{x|1\leqslant x<3\}$；(C) $\{x|x<-1\}$；(D) $\{x|x>3\}$.

(4) x、y、z为实数，且$(x-2)^2+|y+1|+\sqrt{x+y+z}=0$，那么$x$、$y$、$z$的值分别是(　　).

(A) 2，1，0；(B) 2，-1，3；(C) -2，-1，3；(D) 2，-1，-1.

(5) 若$a>0$、$b<0$　化简$\sqrt{-ab^3}$得到(　　).

(A) $-b\sqrt{ab}$；(B) $-b\sqrt{-ab}$；(C) $b\sqrt{-ab}$；(D) $b\sqrt{ab}$.

解：(1) 由于总有$a-|a|\leqslant 0$故为(D).

(2) 注意到0°无意义，故为(D).

(3) 依题意，实数x所对应的点到原点的距离不小于1且它到点1的距离小于2．故为(B).

(4) 在实数范围内，绝对值、算术根以及一个数的偶次方幂都是非负数，又若干个非负数的和等于零，它们只能分别都是零，故为(D).

(5) 据算术根和绝对值的概念，有$\sqrt{-ab^3}=\sqrt{a(-b)^3}=\sqrt{a(-b)^2(-b)}=|-b|\sqrt{-ab}=-b\sqrt{-ab}$，故为(B).

例2．直接写出结果，填在括号内.

(1) 若$a>1$，$|\lg\frac{1}{a}-\lg a|=$(　　)；

（2）当 $\sin\alpha \leqslant \cos\alpha$ 时，$\sqrt{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=($　　$)$；

（3）式子 $|x-a|<b$ 表示为 $A<x<B$ 的形式有（　　）；

（4）式子 $A<x<B$ 表示为 $|x-a|<b$ 的形式有（　　）；

解：（1）$\because a>1$，$\therefore \lg a>0$，$\left|\lg\frac{1}{a}-\lg a\right|=|-2\lg a|=2\lg a$.

（2）$\sqrt{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=\cos\alpha-\sin\alpha$.

（3）由于 $|x-a|$ 表示点 x 到点 a 的距离，利用图1-1-1，可得 $a-b<x<a+b$.

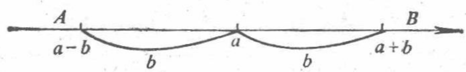

图　1-1-1

（4）方法同（3）．利用图1-1-2，可得 $\left|x-\frac{A+B}{2}\right|<\frac{B-A}{2}$.

例3．解下列方程或不等式：

（1）$\sqrt{2x+7}-\sqrt{2-x}=\sqrt{5-x}$；

（2）$|x-3|+\sqrt{2-x}=3$；

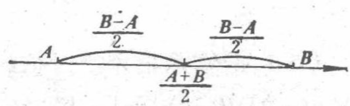

图　1-1-2

（3）$2<|4-\log_2 x|<3$；

(4) $\sqrt{\left[\lg\left(\frac{1}{2}-x\right)-1\right]^2}-\left|\lg\frac{\sqrt{2-4x}}{2}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$;

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

解：(1) 先看方程的解允许在什么样的范围之内，为了使每个根式有意义，就必须使$2x+7\geqslant 0$，$2-x\geqslant 0$，$5-x\geqslant 0$．于是有

$$-\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant 2. \qquad (1)$$

又因为每个根式都应为非负数，所以

$\sqrt{2x+7}\geqslant\sqrt{2-x}$和$\sqrt{2x+7}\geqslant\sqrt{5-x}$，于是

$$x\geqslant -\frac{2}{3}. \qquad (2)$$

综合(1)，(2)可知方程的解的可能允许值范围是

$$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2.$$

再对原方程进行变形，经过两次平方化简得

$$3x^2+7x-10=0, \qquad (3)$$

解(3)得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{10}{3}$.

由于$x_2=-\frac{10}{3}$不在解的允许范围内，故$x_2=-\frac{10}{3}$不是原方程的解，是增根．而$x_1=1$在解的允许范围之内，所以$x_1=1$是原方程的解．

(2) $\because$根式$\sqrt{2-x}$要有意义，$\therefore 2-x\geqslant 0$即$x\leqslant 2$．当$x\leqslant 2$时，$x-3<0$，故原方程可变形为$3-x+\sqrt{2-x}=3$，即$x=\sqrt{2-x}$．又$\because\sqrt{2-x}$为非负数，$\therefore x$的允许值范围是$0\leqslant x\leqslant 2$，解之$x_1=-2$，$x_2=1$.

$\because$ $x_1 = -2$ 不在允许值范围内．所以是增根．

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 1$．

（3）由 $2 < |4 - \log_2 x| < 3$ 可转为解不等式组

$$\begin{cases} |4 - \log_2 x| > 2, \\ |4 - \log_2 x| < 3. \end{cases}$$

又可以转化为解下面两个不等式组：

$$\text{I}\begin{cases} 4 - \log_2 x > 2, \\ -3 < 4 - \log_2 x < 3. \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} 4 - \log_2 x < -2, \\ -3 < 4 - \log_2 x < 3. \end{cases}$$

不等式组Ⅰ、Ⅱ与原不等式同解．

解不等式组Ⅰ得 $\begin{cases} x < 4, \\ 2 < x < 128. \end{cases}$ 即 $2 < x < 4$．

解不等式组Ⅱ得 $\begin{cases} x > 64, \\ 2 < x < 128. \end{cases}$ 即 $64 < x < 128$．

所以原不等式的解是 $2 < x < 4$ 或 $64 < x < 128$．

（4）将原不等式逐步变形：即

$$\left|\lg\left(\frac{1}{2} - x\right) - 1\right| - \left|\lg\sqrt{\frac{1-2x}{2}} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2},$$

$$\left|\lg\left(\frac{1}{2} - x\right) - 1\right| - \frac{1}{2}\left|\lg\left(\frac{1}{2} - x\right) - 1\right| < \frac{1}{2}$$

$$\left|\lg\left(\frac{1}{2} - x\right) - 1\right| < 1,$$

$$-1 < \lg\left(\frac{1}{2} - x\right) - 1 < 1,$$

$$0 < \lg\left(\frac{1}{2} - x\right) < 2,$$

$$\lg 1 < \lg\left(\frac{1}{2} - x\right) < \lg 100,$$

$$1<\frac{1}{2}-x<100,$$

$$-99\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{2}.$$

又因为此范围内的x能使$\lg\left(\frac{1}{2}-x\right)$及$\lg\frac{\sqrt{2-4x}}{2}$有意义，所以原不等式的解为$-99\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{2}$.

说明：解含有绝对值符号及根式的方程或不等式，关键在于合理地去掉绝对值的符号及根号．去掉绝对值符号的方法是根据绝对值的定义；去掉根号的方法是利用根式性质$\sqrt{a^2}=|a|$，但要注意未知数的允许值范围．

（5）$\because\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$,

$\therefore\ \sqrt{x^6-2x^3+1}>1-x$,

$\therefore\ |x^3-1|>1-x$.

当$1-x<0$，即$x>1$时，原不等式成立．

当$x=1$时，有$0>0$，故$x=1$不是原不等式的解．

当$x<1$时，$\because |x^3-1|=1-x^3$，$\therefore$原不等式变形为$1-x^3>1-x$．$\because 1-x>0$，$\therefore$原不等式又可变形为$1+x+x^2>1$，解这个不等式得$x>0$或$x<-1$．

由此看出，不等式的解是$x<-1$或$0<x<1$或$x>1$．

例4．解方程组$\begin{cases}|x+y|=1\\|x|+|y|=2.\end{cases}$

解：解原方程组可分以下四种情况进行讨论．

（1）当$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$时，$|x+y|=x+y$，$|x|=x$，$|y|=y$，

因此 $\begin{cases}x+y=1\\x+y=2\end{cases}$ 显然方程组无解.

（2）当 $x<0$，$y<0$ 时，$|x+y|=-(x+y)$，$|x|+|y|=-x-y$，

因此$\begin{cases}x+y=-1\\x+y=-2\end{cases}$ 仍然无解.

（3）当$x>0$，$y<0$ 时，又分两种情况：

① 当 $x>|y|$时，$|x+y|=x+y$，$|y|=-y$，$|x|=x$，因此$\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases}$ 解得 $x_1=\frac{3}{2}$，$y_1=-\frac{1}{2}$.

② 当 $x<|y|$ 时，$|x+y|=-(x+y)$，$|x|=x$，$|y|=-y$，

因此$\begin{cases}x+y=-1\\x-y=2\end{cases}$ 解得 $x_2=\frac{1}{2}$，$y_2=-\frac{3}{2}$.

（4）当$x<0$，$y>0$ 时，又分两种情况：

① 当 $y>|x|$时，$|x+y|=x+y$，$|x|=-x$，$|y|=y$，

因此$\begin{cases}x+y=1\\-x+y=2\end{cases}$ 解得$x_3=-\frac{1}{2}$，$y_3=\frac{3}{2}$.

② 当 $y<|x|$时，$|x+y|=-(x+y)$，$|x|=-x$，$|y|=y$，

因此$\begin{cases}x+y=-1\\-x+y=2\end{cases}$ 解得 $x_4=-\frac{3}{2}$，$y_4=\frac{1}{2}$.

综合上述，知原方程组的解是：

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2},\\y_1=-\frac{1}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\frac{1}{2},\\y_2=-\frac{3}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=-\frac{1}{2};\\y_3=\frac{3}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-\frac{3}{2},\\y_4=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

例5. 已知$\sqrt{(x+y)(x-y)-15}-|4-xy|=0$ （x,y为实数），求$x+xy+xy^2+xy^3+\cdots+xy^{99}$的值

分析：在实数范围内，绝对值、算术根都是非负数，又几个非负数的和等于零，只能它们分别都是零。

解： ∵ x，y为实数，

∴ $\sqrt{(x+y)(x-y)-15}\geqslant 0$，$|4-xy|\geqslant 0$.

由于$\sqrt{(x+y)(x-y)-15}+|4-xy|=0$，

$$\therefore \begin{cases}(x+y)(x-y)-15=0,\\ 4-xy=0.\end{cases}$$

解这个方程组得$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-4,\\ y_2=-1.\end{cases}$

当$x_1=4$，$y_1=1$时，

$$\begin{aligned}x+xy+xy^2+\cdots+xy^{99}&=x(1+y+y^2+\cdots+y^{99})\\&=4(1+1+\cdots+1)\\&=400.\end{aligned}$$

当$x_2=-4$，$y_2=-1$时，

$$\begin{aligned}x+xy+xy^2+\cdots+xy^{99}&=x(1+y+y^2+\cdots+y^{99})\\&=-4(1-1+1-1+\cdots-1)\\&=0.\end{aligned}$$

例6. 求函数$y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$的极小值.

解： 根据算术根的定义，

$y=|x+2|+|x|+|x-1|+|x-3|$，

下面分区间来研究这个函数.

当$x\leqslant-2$时，$y=-x-2-x+1-x+3-x=2-4x$，

所以在$(-\infty,-2]$上，y为递减函数，

因此当$x=-2$时，y有最小值$y_{min}=10$.

当$-2\leqslant x\leqslant 0$时，

$$y=x+2-x+1-x+3-x=6-2x;$$

所以在〔-2，0〕上，y为递减函数.

因此当$x=0$时，y有最小值$y_{min}=6$.

当$0\leqslant x\leqslant 1$…时，

$$y=x+2+x+1-x+3-x=6\cdots,$$

所以在〔0，1〕上，y为常数6.

当$1\leqslant x\leqslant 3$时，

$$y=x+2+x+x-1+3-x=2x+4$$

所以在〔1，3〕上，y为递增函数.

因此当$x=1$时，y有最小值$y_{min}=6$.

当$x\geqslant 3$时，

$$y=x+2+x+x-1+x-3=4x-2.$$

所以在〔3，$+\infty$〕上，y为递增函数，

因此当$x=3$时，y有最小值$y_{min}=10$.

所以原函数在$(-\infty, +\infty)$上的极小值是6.

练 习 题

1. 化简下列各题：

(1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$;

(2) $|2x+1|+|3x-4|$;

(3) $\sqrt{1+2a+a^2}-\sqrt{a^2-12a+36}$;

(4) $\sqrt{(\lg x-1)^2}$;

(5) 已知$2a^2-5a+2<0$；化简$2\sqrt{a^2-4a+4}+|2a-1|$;

(6) $\sqrt{1-2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}$.