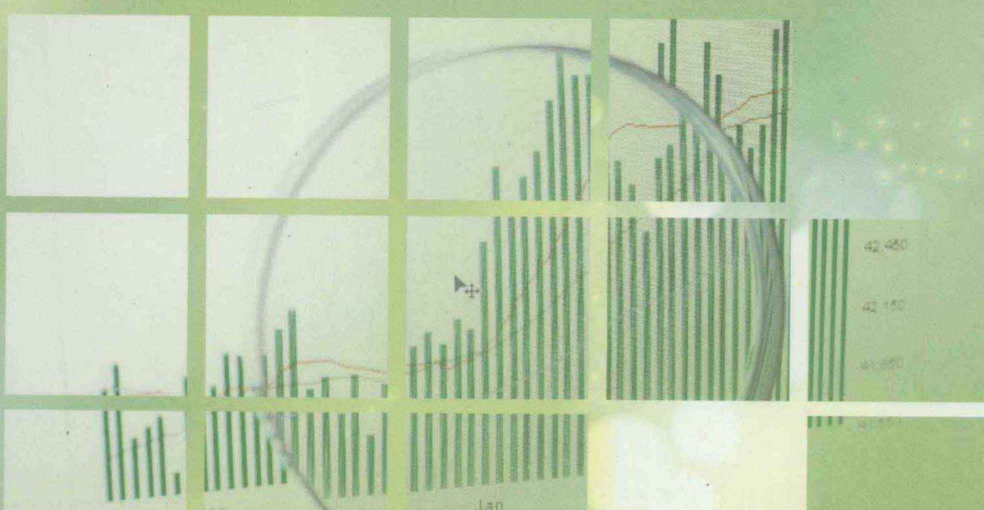
高等教育“十二五”规划教材

运筹学简明教程

YUNCHOUXUE JIANMING JIAOCHENG

谭代伦　李　军　主编



科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

运筹学简明教程

谭代伦　李　军　主　编
肖胜超　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书从难易适中、便于教学安排的角度出发，对运筹学的分支内容进行了整合，形成三个有机联系的章节：线性规划、线性规划的特殊类型、其他典型运筹学问题简介，其中以线性规划为核心和基础。

本书第 1 章主要包括线性规划基础、对偶规划、灵敏度分析等内容；第 2 章主要包括整数规划、运输问题、分派问题、目标规划等内容；第 3 章主要包括非线性规划基础、动态规划、库存论、排队论、图论、对策论等内容。第 1、2 章以“线性”为核心贯穿各个知识模块，案例选择做到前后呼应、循序渐进；第 3 章突出重点、精选案例，虽为简介但并不是简单铺陈。

本书语言通俗简练，条理清楚，逻辑性强，案例和习题丰富，易于广大师生和科技工作者学习阅读。本书可作为各普通高校和高职高专院校教材，也可供企事业单位管理人员和科技工作者作参考之用。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学简明教程/谭代伦，李军主编．—北京：科学出版社，2010

（高等教育“十二五”规划教材）

ISBN 978-7-03-029646-7

Ⅰ．①运…　Ⅱ．①谭…②李…　Ⅲ．①运筹学—高等学校—教材

Ⅳ．①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 231859 号

策划：姜天鹏　宋　芳

责任编辑：王纯刚　李　瑜/责任校对：马英菊

责任印制：吕春珉　/封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 2 月第一版　开本：B5（720×1000）

2011 年 2 月第一次印刷　印张：12 1/2

印数：1－3000　字数：241 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

销售部电话 010-62140850　编辑部电话 010-62135517-2038

前　言

朴素的运筹思想古已有之，但运筹学作为一门学科则兴起于20世纪初期。自20世纪中期以后，随着科学技术和社会生产的飞速发展，经济活动日益频繁，形成了很多具有典型性和代表性的生产管理问题，由此带动了运筹学研究的活跃和蓬勃发展，并逐渐形成了包括线性规划、对偶规划、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划、库存论、排队论、图论、对策论等众多的分支内容。这些分支都具有较强的独立性，都可单独成书或以专著论述，因此如何整合这些分支内容以利教学之用成为编写运筹学教材的一个难点。本书编写组的老师都有着长期的相关领域的教学和学术研究经验，有着多年选用不同运筹学教材的深刻体会，这些经验和体会促使我们从方便教学、易于接受的角度出发，细致梳理运筹学的相关分支内容，尝试编写一本基础性和可读性强、内容有所侧重的运筹学教材。

作为基础性读物，本书把运筹学的重点放在线性规划及与“线性”相关的分支内容上，因此本书将运筹学的众多分支内容归类和整合为3章：第1章主要包括线性规划、对偶规划、灵敏度分析等内容；第2章主要包括整数规划、运输问题、分派问题、目标规划等内容；第3章主要包括非线性规划基础、动态规划、库存论、排队论、图论、对策论等内容。全书力求做到有“点”有“面”：在线性规划类问题方面作重点介绍，视为“点”；在独立性更强的第3章内容方面以精选和简介为主，视为“面”。这样安排既切合当前普通高校教学方法改革、课程教学时数有所减少的现状，也能使不同类型的读者通过阅读本书有所收获。

本书精选了具有典型性和可读性的案例，与注重求解方法及结果的同类运筹学图书相比，本书进一步加强了这些案例的数学建模过程，注重培养和训练读者用数学理论与方法来刻画和表达实际问题的能力。这和当前各高校广泛开展全国大学生数学建模竞赛有着密切联系，编写本书的各位老师都有长期指导全国大学生数学建模竞赛的经历，积累了较为丰富的数学建模经验。另外，本书在介绍求解方法时注重方法来源的原始介绍，注重条理性、逻辑性、清晰性和可读性，对求解结果有简要的解读，语言叙述做到简洁准确、通俗易懂。

随着现代计算机技术的进步，运筹学问题的求解能力和效率得到大大提高，运筹学的数学实验也逐渐成为一个重要环节。当前，已出版了不同版本的运筹学数学实验书籍，大多数图书主要是选择一个数学实验环境进行重点介绍。鉴于此，本书在附录中对运筹学的主要数学实验环境进行了概述，通过实例简单说明

应用，为读者今后进一步掌握这些数学实验环境提供入门知识。

本书绪言由刘益编写，第 1 章的第 1～4 节、第 2 章和附录部分由谭代伦编写，第 1 章的第 5～6 节由李军编写，第 3 章由肖胜超编写。全书由谭代伦和刘益统稿定稿。

本书的出版得到了西华师范大学立项支持，校教务处、教材发行中心、数学与信息学院给予了全程关心和指导，科学出版社及宋芳、李瑜等同志给予了大力支持。在规划本书体系结构、重点、特色等方面得到了数学与信息学院刘益老师的悉心指导，学院陈豫眉老师也给予了很多建议。全书在编写过程中参考了大量运筹学图书和文献，林挺、刘建军、岳永鹏、沈倩等同学参与了文稿录入与编辑工作。作者谨在此表示由衷的谢意！

限于时间和能力，书中难免有疏漏和错误之处，恳请读者批评指正。

谭代伦
2010 年 10 月
于西华师范大学

目　　录

绪　言

运筹学(Operational Research 或 Operations Research)是现代数学的一个重要分支，主要用于处理调配、设计、布局等实际背景中的最优化问题。

一、历史源流

与数学的大部分分支学科相比较，运筹学的历史很短，迄今不过七十余年。运筹学起源于20世纪第二次世界大战中的英国。那时，顽强的英国为了有效地抗击法西斯德国的水陆轰炸，由军方出面，于1939年9月从全国各地调来一批科学家，共11人，包括将军1人、数学家2人、理论物理学家2人、应用物理学家1人、天体物理学家1人、测量学家1人、生物学家3人。他们来到英国皇家空军指挥部，组成了以著名物理学家、诺贝尔奖获得者布莱柯特(P. M. S. Blacket，1897—1974)为核心的世界上第一个运筹学小组，他们的任务就是应用系统论的观点和统筹规划的方法研究作战问题，这个运筹学小组在作战中发挥了卓越的作用，解决了诸如雷达如何合理布置、航船在受到飞机轰炸时如何转向等紧迫的实际问题，受到英国政府极大的重视，同时参与该小组工作的人员也稳步增加。后来，美国、加拿大也建立了类似的小组。到第二次世界大战结束时，全世界从事与战争相关的运筹学研究人员约为七百人。

第二次世界大战结束后，运筹学的研究与应用工作从军事领域大规模地转向民用领域，尤其是民用企业，大学也开设了相应的课程。1948年英国成立了“运筹学俱乐部”，并于1953年在英国伦敦召开了第一次国际运筹学会议，这成为运筹学正式建立的一个重要标志。

在中国，运筹学的引入约在20世纪50年代中后期。1956年，中国第一个运筹学小组在钱学森(1911—2009)等科学家的推动下于中国科学院力学研究所成立；1959年，第二个运筹学研究小组在中国科学院数学研究所成立，由此开始了运筹学研究与应用在中国的发展历程。值得一提的是，在20世纪的“文化大革命”运动中，中国许多学科的正常学术研究与应用处于停滞状态，但运筹学却在杰出数学家华罗庚(1910—1985)的支持与推动下，在中国得到了一定程度的普及。“文化大革命”期间，身为中国数学会理事长的华罗庚先生亲自率领一个小组(称为“华罗庚小分队”)，到农村、工厂传授优化技术和统筹方法，使之用于生产和生活中。自1965年起的10年时间里，全国约二十个省份留下了他的足迹。

二、学科内容

从其诞生背景和发展历史来看，运筹学无疑应该划入到应用学科的范围中。但关于该学科的确切描述，至今仍无统一的看法。如果从学科特点着眼，运筹学可以被描述为："运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际生活中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据。"运筹学的这个特点决定了它的探讨内容一般应该是与"最优性"相关联的。具体来说，在其发展的历史阶段，如下的一些内容通常被归结到运筹学中。

1. 线性规划(Linear Programming)

线性规划内容奠基于前苏联数学家康托洛维奇(L. V. Kantorovich，1912—1986)和美国数学家丹兹格(G. B. Dantzig，1914—2005)的开创性工作。1938 年，26 岁的康托洛维奇碰到一个来自一家胶合板生产厂家的难题：如何为 8 台具有不同生产能力的车床制定工作程序表，以使 5 种胶合板的总产量达到最大限度？他敏锐地觉察到这个问题具有普遍性，一些生产的组织和计划问题与此很相似，因此发明了一套数学方法和程序能够有效地解决这类问题。这套方法构成了线性规划的主要内容之一。而丹兹格则在 20 世纪 40 年代末面对一个实际问题，即寻找一个方法能更快地计算出分时间段的调度、训练和后勤物资的供给方案。他根据对于这个问题的思考提出了线性规划中目标函数的概念及单纯形算法。

2. 动态规划(Dynamic Programming)

动态规划内容的原始材料来自美国数学家贝尔曼(R. E. Bellman)。20 世纪 50 年代初，贝尔曼等人在研究多阶段决策过程的优化问题时，提出了著名的最优化原理，把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，利用各阶段之间的关系逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法——动态规划。1957 年他的名著《动态规划》(*Dynamic Programming*)出版了，这是该领域的第一本著作。

3. 排队论(Queuing Theory)

排队论起源于 20 世纪初的电话通话。1909—1920 年，丹麦数学家、电气工程师爱尔朗(A. K. Erlang，1878—1929)用概率论方法研究电话通话问题，从而开创了这门应用数学学科，并为这门学科建立了许多基本原则。他在热力学理论的启发下，成功建立了电话统计平衡模型，并由此得到一组递推状态方程，从而导出著名的爱尔朗电话损失率公式。20 世纪 30 年代中期，当费勒(W. Feller，1906—1970)引进生灭过程后，排队论才被数学界承认为一门重要的学科。第二次世界大战期间和之后，排队论成为运筹学领域中重要的内容。

4. 库存论(Inventory Theory)

库存论是运筹学中发展较早的分支。早在 1915 年，哈李斯(F. Harris)针对

银行货币的储备问题进行了详细研究，建立了一个确定性的存贮费用模型，并求得了最佳批量公式。1934 年威尔逊(R. H. Wilson)重新得出了这个公式，后来人们称该公式为经济订购批量公式(简称为 EOQ 公式)。这是属于存贮论的早期工作。第二次世界大战中，由于军事上的需要，库存问题得到比较深入的研究，理论上也有很大发展，开始成为一种专门的学问。库存论真正作为一门理论发展起来是在 20 世纪 50 年代。1958 年，威汀(T. M. Whitin)发表了《存贮管理的理论》一书，随后阿罗(K. J. Arrow)等发表了《存贮和生产的数学理论研究》，毛恩(P. A. Moran)在 1959 年发表了《存贮理论》。此后，库存论成为运筹学中一个独立的分支，有关学者相继对随机或非平稳需求的存贮模型进行广泛深入的研究。

5. 博弈论(Game Theory)

博弈论又称对策论，是二人在平等的对局中各自利用对方的策略变换自己的对抗策略，以达到取胜的目的。博弈论的思想古已有之，如中国古代故事“田忌赛马”，就隐含着独特的博弈论思想。博弈论最初主要研究象棋、桥牌、赌博中的胜负问题，人们对博弈局势的把握只停留在经验上，没有向理论化发展。

近代对于博弈论系统的理论研究开始于策墨洛(E. Zermelo，1871—1953)，及冯·诺依曼(J. von Neumann，1903—1957)等人的开创性工作。1928 年，冯·诺依曼证明了博弈论的基本原理，从而宣告了博弈论的正式诞生。1944 年，冯·诺依曼和摩根斯坦合著的划时代巨著《博弈论与经济行为》将二人博弈推广到 n 人博弈结构，并将博弈论系统应用于经济领域，从而奠定了这一学科的基础和理论体系。

三、运筹学资源

随着计算机技术和互联网技术的高度普及，教与学的方式也发生了很大变化，教学活动不仅仅局限在课堂上，众多的网站资源可以为教学活动增添许多精彩的内容。以下是涉及运筹学内容的一些网站。

(1) Association of European Operational Research Societies (EURO)-International Federation of Operational Research Societies(IFORS)欧洲运筹学协会，是一个非营利性的组织，坐落于瑞士，它的目的是促进运筹学的发展。

(2) Economics，Operations Research，Programming，Games-Dave Rusin；The Mathematical Atlas 提供一些简短的、介绍运筹学方面的文章，其用象征性的语言描述优化资源方面的研究。

(3) IFORS tutORial Project-Moshe Sniedovich 这个站点是国际运筹学联盟(IFORS)赞助的一个项目。该项目的目的是通过 3 年的时间建立一个基于 Web 的运筹学和管理学在线指导系统。

(4) ORSC 中国运筹学会官方网站，这里面有众多可供大家学习和参考的内容。

第 1 章　线 性 规 划

1939 年，前苏联数学家康托络维奇(Kantorovich)编著了《生产组织与计划中的数学方法》一书，书中首次整理并提出了线性规划问题及其解法。随着社会工业化生产的进步和第二次世界大战的需要，人们对线性规划问题及其应用展开了系统的研究。1947 年，美国数学家丹兹格(G. B. Dantzig)提出了求解一般线性规划问题的算法——单纯形法(Simplex Method)，为发展线性规划的理论、方法和应用奠定了基础。其后，随着计算机技术的普及，线性规划的求解能力得到极大提高，使其越来越广泛地应用于工农业生产、交通运输、军事、经济等各种决策领域，从而成为现代科学管理的一种重要手段。

近七十年来，线性规划(Linear Programming，简记为 LP)成为运筹学中研究最早、理论最成熟、方法通用性最高、应用最广泛的一个重要分支。

本章从一些典型生产生活实例出发引入线性规划，重点介绍了线性规划模型、图解法与单纯形法、线性规划的对偶问题(对偶规划)及对偶单纯形法，最后探讨了灵敏度分析。

1.1　引例与线性规划模型

线性规划研究的问题总体上可归纳为两大类：一类是在有限资源(人财物等)条件下的效益最大化问题，另一类是在给定任务下的成本(费用)最小化问题。常见的典型问题包括：资源合理利用、生产的组织与计划、下料、配料、选址、合理布局，等等。在这些问题中，影响问题的关键因素之间往往具有线性关系，而这些线性关系可以借助一定的数学方法刻画和表达出来，从而体现该问题本身所追求的最优解或最优方案。这正是线性规划的基本内涵，其中用数学方法所刻画和描述出来的一组数学公式通常称为**线性规划的数学模型**。

1.1.1　引例

在生产生活实践中存在大量的线性规划问题。下面将通过两个实例来分析建立线性规划模型的过程和方法。

[例 1－1－1]　资源合理利用问题。

某企业每月生产甲、乙两种产品，需要 3 种生产资源：技术服务、劳动力、行政管理。单位产品对 3 种资源的需求量、单位产品的利润以及 3 种资源的总量如

表 1.1.1所示。问：如何安排生产以使产品获利最大(假设产品均能全部售出)？

表 1.1.1 甲乙两种产品的资源量、消耗量及其利润情况

产品	单位产品消耗资源量/工时			单位产品利润/(元/件)
	技术服务	劳动力	行政管理	
甲产品	1	10	2	10
乙产品	1	5	6	4
资源总量/工时	100	600	300	

解 根据问题的要求易知，产品的获利取决于产品的数量和单位利润，而产品的单位利润是常数，因此产品的数量是本问题达成目标的关键因素，“如何安排生产”就是指甲、乙两种产品生产数量多少的问题。由于甲、乙两种产品的数量是可变的，即是一组变量，其不同的取值组合可得到不同的产品销售利润，通常称这样的变量为该问题的**决策变量**。

设 x_1 和 x_2 分别为甲、乙两种产品的生产数量，z 为企业每月销售甲、乙两种产品的总利润，则 z 与 x_1 和 x_2 之间有如下关系式

$$z=10x_1+4x_2 \tag{1.1.1}$$

其刻画了本问题的目标(产品总利润)与决策变量(产品数量)的关系，通常称这样的数学表达式为该问题的**目标函数**。目标函数的值通常是变化的，本问题的目标是使 z 达到最大，以 maximize(简记为 max)表示，则使目标函数取最大值的完整表示为

$$\max z=10x_1+4x_2 \tag{1.1.2}$$

显然，要达成上述目标，甲、乙两种产品的生产数量 x_1 和 x_2 还要受到各种生产资源的限制，即存在如下 3 个方面的关系式。

“技术服务”的需求与限制：$x_1+x_2\leqslant 100$ (1.1.3)

“劳动力”的需求与限制： $10x_1+5x_2\leqslant 600$ (1.1.4)

“行政管理”的需求与限制：$2x_1+6x_2\leqslant 300$ (1.1.5)

式(1.1.3)～式(1.1.5)构成了对决策变量 x_1 和 x_2 的限制，通常称这样的数学式为该问题的**约束条件**(subject to，简记为 S. T. 或 s. t.)。由于这些约束条件在题目中已经明确给出或提到，因此也称其为**显式约束条件**。

除上述 3 类约束条件外，由于决策变量 x_1 和 x_2 的取值一般不可能为负，即

$$x_1\geqslant 0，x_2\geqslant 0 \tag{1.1.6}$$

称这类限制条件为**隐式约束条件**。

一般地，目标函数和约束条件共同构成了该问题的数学模型。

综合上述分析，本问题的数学模型可表述为

$$\max z=10x_1+4x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 100 \\ 10x_1+5x_2\leqslant 600 \\ 2x_1+6x_2\leqslant 300 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1.7}$$

在模型(1.1.7)中，目标函数和所有约束条件关于决策变量均为线性关系，因此称其为**线性规划模型**，相应问题称为线性规划问题。

上面实例属于效益最大化问题，而在线性规划问题中，成本(费用)最小化问题也大量存在，下面举例说明。

[例 1-1-2] 下料问题。

某建筑工地需要做 100 套成品钢筋，每套 3 根，其规格分别为 2.9m、2.1m 和 1.5m。现原料钢筋的长度均为 7.4m。问：应该怎样截割原料钢筋，才能使所需原料钢筋根数最少(设截割时截口宽度忽略不计)？

解 从题目所给数据来看，一根原料钢筋足够同时截割出 3 种规格的成品钢筋，即 3 种规格各截割出 1 根，材料还余 0.9m，那么本问题的答案是否就是总共截割 100 根原料钢筋且原材料总计剩余 90m(100×0.9m)呢？

可以看到，如果这样计算，一方面原材料的剩余量比较多，另一方面也并不能确定符合题目要求“使所需原材料根数最少”。为此，需要进一步分析截割一根原料钢筋的情况。事实上，上面的截割方法仅仅是一种而已，除此以外还有其他截割方法。例如，可以将一根原料钢筋截割为 2 根 2.9m 和 1 根 1.5m 而剩余 0.1m，或截割为 1 根 2.9m 和 3 根 1.5m 而剩余为 0m，等等。表 1.1.2列出了截割一根原料钢筋时所有可能的情况。

表 1.1.2 一根原料钢筋的不同截割方法及余料情况

成品钢筋及根数	截割方法							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9m(根数)	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1m(根数)	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5m(根数)	1	0	1	3	0	2	3	4
剩余材料/m	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

根据表 1.1.2 可知，要使所用原料钢筋根数最少，显然不能只采用一种截割方法，而应该将多种截割方法综合使用，使其既满足成品钢筋的需求量又保证材料剩余最少，从而使原料钢筋根数最少。因此，本问题的**决策变量**应该是每种截割方法截割钢筋的根数(由于每种截割方法使用一次就是截割一根原料钢筋，因

此所有截割方法使用的总次数就是所截割原料钢筋的总根数)。事实上，题目所问“如何截割”也是指不同截割方法分别截割了多少根钢筋(或采用了多少次)的问题。

设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8 分别表示表 1.1.2 中 8 种截割方法所对应的截割钢筋的根数，以截割剩余材料总数最少为目标函数、以满足成品钢筋的订单需求量为约束条件，用 minimize(简记为 min)表示“使目标函数值达到最小”，则可建立如下数学模型

$$\min z=0.1x_1+0.3x_2+0.9x_3+0\cdot x_4+1.1x_5+0.2x_6+0.8x_7+1.4x_8$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3+1\cdot x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_6+0\cdot x_7+0\cdot x_8\geqslant 100\\0\cdot x_1+2\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4+3\cdot x_5+2\cdot x_6+1\cdot x_7+0\cdot x_8\geqslant 100\\1\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+3\cdot x_4+0\cdot x_5+2\cdot x_6+3\cdot x_7+4\cdot x_8\geqslant 100\\x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,8\end{cases}\tag{1.1.8}$$

模型(1.1.8)没有整理和化简，以更好地体现表 1.1.2 的作用和意义。模型中目标函数是截割的余料总数，3 个约束条件分别是 3 种规格成品钢筋的订购需求量下限，其中目标函数和约束条件关于决策变量都是线性的，因此也是线性规划模型，相应问题属于线性规划问题。

本例属于给定任务下的成本最小化问题，即在满足订购需求量(任务)的要求下如何能最节省原材料。

1.1.2 线性规划模型

上节从两个典型的实例出发建立了相应的线性规划模型。在建立模型的过程中，给出了相关的基本概念，下面对线性规划模型的建立过程及其一般形式作简要归纳和总结。

一、建立线性规划模型的一般步骤

通过上节的两个例子可以看到，不同的线性规划问题其线性规划模型也不相同，但模型的建立过程和方法却有相似之处，归纳起来包括以下几个基本步骤。

1. 整理和抽象问题，分析问题的基本要求和各类限制

对已经过抽象和整理而形成的线性规划问题来说(如本书中的大多数例题和习题)，问题中一般都有明确的要求，也给出了大多数的约束条件，部分约束条件可能需要通过进一步分析才能得到，其中隐含的约束条件有时容易被忽略。如果一个实际生产生活问题未经抽象和整理，则首先需要在问题背景的基础上进行归纳和整理，形成具有代表性的线性规划问题。

2. 确立问题要达成的目标，分析影响目标的关键因素，进而确定决策变量

问题要达成的目标是构建目标函数的基础，但有时不一定直接以问题的要求为目标，也可以从其他角度来确立目标函数。如例 1－1－2，是以原料钢筋截割后的余料最少为目标，而不是直接以问题要求的“原料根数最少”为目标。

在线性规划问题中，决策变量与问题目标之间总存在某种线性关系，抓住这一点去分析问题中到底哪些因素决定了问题目标的变化，从而确定决策变量。当然，有时候问题的决策变量并不是明显的，如例 1－1－2，首先需要明确“一根钢筋到底有哪些截割方法”，才能确定决策变量为“各种截割方法所截割的原料钢筋根数”。

3. 刻画和表达问题的目标以及各类限制，形成目标函数和约束条件

这里主要讨论的是线性规划模型，因此刻画和表达问题的目标和各类限制时，通常采用数学上的线性表达式。有时可能会出现分式或含绝对值等非线性的式子，通过适当变换后，一般也能化为线性表达式。如果必须采用非线性的表达式来刻画，那么该类问题往往不再是纯线性规划问题。

4. 以线性规划模型的一般形式统一书写

上节两个实例已经采用了线性规划模型的一般形式来统一表达和书写，体现了用数学语言来描述一个实际问题的简洁性和准确性。模型中，一般用 max (min)来表达“使目标函数值达到最大(最小)”，用“s. t. (S. T.)”来引起约束条件，所有约束条件通常用大括号括起来。

需要注意的是，建立一个实际问题数学模型的过程是一个复杂的思维过程，因此上述基本步骤只是建立线性规划模型过程的一个参考，期间还需要根据问题对模型进行反复修正和检验，有时甚至还要对问题本身进行补充和完善。

二、线性规划模型的一般形式及特点

1. 线性规划模型的一般形式

通过上节两个实例，可以看到线性规划模型通常具有如下一般形式

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \begin{matrix}\leqslant\\ \geqslant\\ =\end{matrix} b_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ x_j\geqslant 0 \text{ 或 } x_j\leqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1.1.9}$$

其中，$x_j(j=1,2,\cdots,n)$是决策变量，全体决策变量构成**决策向量**，记为 $\boldsymbol{x}$，相应地，$z=f(\boldsymbol{x})$即为目标函数；$c_j(j=1,2,\cdots,n)$称为**目标函数系数**，全体目标函数系

数构成目标函数系数向量，记为 $\boldsymbol{c}$；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为**约束系数**，全体约束系数构成**约束矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}$；$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为**右端常数**，全体右端常数构成右端常数向量，记为 $\boldsymbol{b}$。

由此可知，线性规划模型的一般形式还可以写成矩阵形式，读者可自行写出。

2. 线性规划模型的主要特点

结合上节两个实例可以看出，线性规划模型具有以下一些共同特点。

(1) 从整体上，一个线性规划模型一般包括 3 类要素：决策变量、目标函数和约束条件。通常把具备这 3 类要素且能用线性关系式刻画和表达的问题称为线性规划问题。从数学的角度可描述为：线性规划问题就是求一个线性目标函数在一组线性约束条件下的极值问题。线性规划就是研究并解决这类问题的理论和方法。

(2) 线性规划模型的目标函数和约束条件都是关于决策变量的线性表达式。对目标函数和约束条件的刻画及表达是建立线性规划模型的重点和难点，尤其是约束条件，既要挖掘全面不遗漏，又要表达正确和完整。

(3) 模型有一个确定的、线性的目标函数，它可能是求最大值(max)，也可能是求最小值(min)，这是由问题本身要达成的目标所决定的。

(4) 目标函数系数 c_j、约束系数 a_{ij} 和右端常数 b_i 称为模型参数，通常都是已知常量。在实际问题中，这些常量往往都有明确的经济或其他意义，一般由统计或记录的方式获得。

(5) 约束条件可能是不等式，也可能是等式。有的可能是“≥”情形，有的可能是“≤”或“=”情形。

(6) 实际问题中，决策变量往往有非负约束要求。但不是所有线性规划问题都有这一要求，有时一组决策变量中一部分变量有非负约束要求，而另一部分变量可能允许取任意实数或其他要求。

1.1.3 线性规划的应用

在 1.1.1 小节中对资源合理利用问题和下料问题进行了问题分析和模型建立，本节将继续通过实例学习线性规划在其他一些典型问题中的应用。

[例 1-1-3] 生产的组织与计划问题。

某厂生产 A、B 两种产品，都需要经过Ⅰ、Ⅱ两道工序加工，每件产品在每道工序加工的机时、每道工序可供利用的机时及每件产品可获得的利润如表 1.1.3所示。问：如何安排生产计划，才能使获得的总利润最大？