JIAOXUEYUCESHI

高二 数学

教学与测试

B方案

教师用书

必修

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

苏州大学出版社

高二数学教学与测试

(B 方案 · 必修)

(教师用书)

苏州大学《中学数学月刊》编辑部　主编

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高二数学教学与测试.教师用书(B方案)/苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编.—苏州:苏州大学出版社,2003.5(2005.5重印)
必修
ISBN 7-81090-061-7

Ⅰ.高… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第026127号

敬告读者

为了便于读者识别盗版书,我社2005年印制的"中学教学与测试系列丛书",封面贴有"非常数码产品身份码标贴",正版图书刮开标贴,即可查证。为保护同学们的视力,本社采用淡黄色环保内芯纸。

如有读者发现有盗印或销售盗版书的线索,请及时向当地新闻出版和工商行政管理部门举报,或向本社反映!

本社联系电话:0512-67258802 67258810

高二数学教学与测试
教师用书(B方案)
苏州大学《中学数学月刊》编辑部 主编
责任编辑 管兆宁

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)
江苏省新华书店经销
宜兴文化印刷厂印装
(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本787×1092 1/16 印张21.25 字数646千
2003年5月第1版 2005年5月第6次修订印刷
ISBN 7-81090-061-7/G·27 定价:25.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《高二数学教学与测试》编委会

前　言

新高中数学教学大纲及新编高中数学教材已在全国绝大多数省市高中扩大试用，为了及时向广大高中学生和数学教师提供一套与新教材配套的高质量的教辅用书，我们聘请了天津市和江苏省的部分特级教师与高级教师，组成强有力的编写小组，仔细分析研究经多次修订的《中学数学教学大纲》和与之配套的中学《数学》教材，编写了与新教材配套的“高中数学教学与测试”系列用书. 它既可作为教师的教学参考用书，也可作为学生的自学和练习用书. 我们对2004年修订的《高二数学教学与测试》进行了再次修订，供2005年升入高二的学生和高二数学教师使用.

本书分为两册，一册为学生用书，一册为教师用书. 学生用书内容以高二数学课本为主线，紧密配合课堂教学进行同步训练和测试. 所选题材严格按照教学大纲要求，紧扣教材，全书分成5章，每章分成若干节，共80节，原则上每节与新教材2课时同步. 每节新课按[基础训练题]、[例题]、[练习题]、[思考题]及[说明]五个部分编排；习题课按[基础训练题]、[例题]、[练习题]三个部分编排；复习题按[选择题]、[填空题]、[解答题]三个部分编排；每章末提供一个与本章学习内容有关的[阅读材料]，部分章节提供[研究性课题].

为全面加强学生素质教育，我们针对高二学生特点，注意加强基础训练，增强同步性，逐步培养学生自学能力、创新能力与应用能力，力求做到①严格控制难度，侧重于基本概念、基本技能的训练，可作为课前的热身运动. ②[例题]：精选例题，具有典型性、层次性，注意控制难度并有一定的梯度，始终体现基础性，避免过分综合. ③[练习题]：练习题按选择题、填空题、解答题顺序排列编号，注意题目新颖的同时，在难度、梯度、广度和解答容量上把好关，一方面注意练习题与例题的联系，便于学生练习；另一方面注意练习题的层次性，适当编排了应用题，注意联系实际，既有新颖性又有科学性. ④[思考题]：思考题是本节有关内容的拓展或深化，以培养学生的探索能力和创新能力. ⑤[说明]：根据各节内容的不同特点简明扼要地说明该节的知识要点、重点与难点、思想方法及注意点. 教师用书包含学生用书中全部例题、习题的解答，每小节最后还附有一定数量的备用题及解答，供教师选用.

本书由全体编委会集体讨论确定修订细则，最后由七位特级(高级)教师执笔修订：朱心红(江苏省溧阳中学)，第六章；嵇国平(江苏省常州中学)，第七章；罗强(苏州市教研室)，第八章；周明希、陈兆华(江苏省苏州中学)，第九章(A)；蒋鼎宏(江苏省淮阴中学)，第十章(66～74节)；张志朝(江苏省武进市前黄中学)，第九章(B)，第十章(75～80节).

各章由以下四位专家负责把关：沈家书(江苏省名教师、特级教师)，第六章；金立建(江苏省名教师、特级教师)，第七、八章；仇炳生(特级教师)，第九章；杨浩清(江苏省名教师、特级教师)，第十章.

苏州大学数学科学学院八位教师负责审校：何学兰，第六章；鲍建生，第七章(12～22节)；沈琦珉，第七章(23～31节)；潘洪亮，第八章；杨建明，第九章(A)(44～57节)，第九章(B)(44～58节)；卢钦和，第九章(A)(58～65节)；汤正谊，第九章(B)(59～65节)；徐稼红，第十章.

多年来，全国各地的中学数学教师、学生以及社会各界对我们编写的中学数学方面的书籍给予了热情的关怀和支持，对于这次根据新高中数学教材和大纲编写的新《高二数学教学与测试》，许多专家和读者在使用后提出了宝贵的建设性意见和建议，在此一并表示衷心的感谢.

我们真诚地希望使用本书的老师、学生和家长能及时地将使用的情况和意见反馈给我们，以便我们今后作进一步的修改和完善.

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

2005年5月

第二版前言

《家畜传染病学》试用教材自1980年出版以来，经多次重印，发行五万余册，在四年来的试用中，深受广大读者欢迎。但由于该书是在1978年着手编写的，限于当时的条件，引用文献资料已较陈旧，而近年来国内外在家畜传染病诊断和防治技术方面的研究进展很快，文献资料十分丰富，为了适应提高教学质量的需要，亟待对本书进行一次全面修订。我们根据农牧渔业部（82）农(教)字第32号文的指示，于1982年11月召开了本书的修订工作会议，并由原编写组分工落实修订任务，经过一年时间的努力，完成了修订稿，于1983年12月召开会议审稿，再经讨论修改，于1984年 6 月由蔡宝祥、沈正达、盛佩良和刘秀梵同志完成定稿。

家畜传染病学是兽医专业的一门重要专业课，与很多学科有广泛的联系，与畜牧生产实践也紧密相关。我们在编写和修订过程中，注意到教材的系统性、科学性和先进性，努力反映国内外有关的最新科技成果，力求使这本教材能适应建设四个现代化的要求。本书是在1965年罗清生同志主编的《家畜传染病学》的基础上发展起来的。教材分总论和各论两大部分。总论部分论述家畜传染病发生和流行的基本规律以及防疫措施；各论部分共包括近百种畜禽传染病，基本上按畜种分类，以国内常见的家畜传染病为重点，也包括一部分在国外比较常见危害较大而国内尚未发现的传染病。由于我国地域辽阔，每种家畜在各地农牧业生产中所占比重差别很大，各种传染病在各地区的重要性也不完全一致，而且教学时间有限，不可能全部讲授教材中所列全部疾病。因此，在实际教学过程中，可以根据本地区具体情况，适当选择部分内容进行讲授。一般可选择本地区危害严重的常见传染病列为重点病，作全面系统的讲授，并介绍有关该病研究的最新进展。本地区较少发生的，危害性不大或仅有威胁性的传染病，则列为一般病，可根据病的特点，作有所侧重的讲授。本地区未发现的或罕见的传染病可概要介绍或不讲授。

实习指导是由沈正达、郑明球同志负责汇编的，共包括39个实习项目，内容主要为介绍重要传染病的诊断和防疫操作技术。由于家畜传染病的发生和流行常有明显的地区性和时间性，就某一地区而言，在授课的学年中不可能有机会见到所列的全部疫病，且学时所限，亦不可能做完全部实习。因此，在安排教学时可以根据当时当地的具体情况，酌情选择部分项目（12—15次）进行实习，而不必受实习指导内容的限制。其中部分实习项目，可结合教学实习或生产实习在现场进行。

由于我们的水平有限，经验不足，书中缺点错误一定还有不少，诚恳希望院校师生和广大读者批评指正。

编　者

目录

第六章 不等式

第七章 直线和圆的方程

第八章 圆锥曲线方程

第九章 直线、平面、简单几何体

第十章 排列、组合和概率

第六章　不　等　式

1. 不等式的性质(1)

一、基础训练题

1. 下列命题中正确的是　(C)

(A) 若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$　(B) 若 $a>b,c>d$,则 $a-c>b-d$

(C) 若 $ab>0,a>b$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　(D) 若 $a>b,c<d$,则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

2. 已知 $M=(x^2+1)^2,N=x^4+x^2+1$,其中 $x\neq 0$,则　(A)

(A) $M>N$　(B) $M=N$　(C) $M<N$　(D) M,N 的大小随 x 而变化

3. 若 $a<0,-1<b<0$,则 a,ab,ab^2 从小到大的排列为 <u>$a<ab^2<ab$</u>.

4. 当 $a>0>b,c<d<0$ 时,给出以下四个结论:①$ad<bc$;②$a+c^2>b+d^2$;③$a(b-c)>b(d-c)$.其中正确结论的序号是 <u>①,②</u>.

二、例　题

1. 已知 $a>b>c,a+b+c=0$,求证:(1) $ac<0$;　(2) $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$.

证明　(1) $\left.\begin{matrix}a>b\\a>c\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2a>b+c\Rightarrow 3a>a+b+c$,又 $a+b+c=0$,则 $3a>0,a>0$;

同理可证 $c<0$.故 $ac<0$.

$c<b$
$c<a$

(2) $\begin{cases}b=-a-c,\\a>b\text{ 及 }b>c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>-a-c,\\-a-c>c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a>-c,\\-a>2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{a}>-2,\\\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow -2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$.

2. 已知 $a>b>0,c<d<0,e<0$,求证:$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

证明　$\left.\begin{matrix}c<d<0\Rightarrow -c>-d>0\\\text{又 }a>b>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-c>b-d>0\Rightarrow(a-c)^2>(b-d)^2>0$

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}\\\text{又 }e<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

3. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$,比较 $\log_a(a^3+1)$ 与 $\log_a(a^2+1)$ 的大小.

解　$\because a^3+1-(a^2+1)=a^2(a-1)$.$\therefore$ 当 $a>1$ 时,$a^3+1>a^2+1$,$\therefore\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$,当 $0<a<1$ 时,$a^3+1<a^2+1$,$\therefore\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$,$\therefore$ 当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时,恒有 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$.

三、练习题

1. 设 $P=(x-3)(x-5)$，$Q=(x-4)^2$，则 P,Q 的大小关系是 (C)

(A) $P>Q$　(B) $P=Q$　(C) $P<Q$　(D) P,Q 的大小与 x 的值有关

2. “$a\neq 3$ 或 $b\neq -1$”是“$a^2+b^2-6a+2b>-10$”的 (C)

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件　(C) 充要条件　(D) 既不充分又不必要条件

3. 若 $a<b<0$，则下列不等式关系中，不能成立的是 (A)

(A) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　(B) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　(C) $|a|>|b|$　(D) $a^2>b^2$

解 $\because \frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{a-(a-b)}{a(a-b)}=\frac{b}{a(a-b)}<0$，$\therefore$ 应选择(A).

4. 若 $a^2+a<0$，则 $a,a^2,-a,-a^2$ 从大到小的顺序是 <u>$-a>a^2>-a^2>a$</u>.

5. 已知 $a<b<0,c>0$，在空格处填上恰当的不等号或等号：

(1) $\frac{a}{b}$ <u>$>$</u> 1；$\frac{1}{a}$ <u>$>$</u> $\frac{1}{b}$；b^2 <u>$<$</u> a^2；a^3 <u>$<$</u> b^3；$|a|$ <u>$>$</u> $-b$.

(2) $c-a$ <u>$>$</u> $c-b$；若 $ad>bd$，则 d <u>$<$</u> 0；$b-a$ <u>$=$</u> $|a|-|b|$；$\sqrt{|a|}$ <u>$>$</u> $\sqrt{|b|}$；$\frac{a-b}{c}$ <u>$<$</u> $\frac{c}{b-a}$.

6. 设 $a=x^2-2x+1,b=x^2-8x+16$. 且 $3<x<4$，则 $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{b}$ 的大小关系为 <u>$\sqrt{a}>\sqrt{b}$</u>.

解 $\because a=(x-1)^2,b=(x-4)^2$，由 $3<x<4$，$\therefore \sqrt{a}=x-1,\sqrt{b}=4-x$.

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}=(x-1)-(4-x)=2x-5>0$，$\therefore \sqrt{a}>\sqrt{b}$.

7. 已知 $a>b>0,c>d>0$，求证：$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

证明 $\because c>d>0$，$\therefore \frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$，又 $a>b>0$，$\therefore \frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$，$\therefore \sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

8. 已知 $a>b>0,c<d<0$，求证：$\frac{b}{a-c}<\frac{a}{b-d}$.

证明 $\because a>b>0,-c>-d>0$，$\therefore a-c>b-d>0$，$\therefore 0<\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d}$. $\therefore \frac{b}{a-c}<\frac{a}{b-d}$.

四、思考题

若 $x>0,0<a<1$，试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

解 $\because 0<a<1$，据对数函数定义域及 $x>0$ 知 $0<x<1$，$\therefore \log_a(1-x)>0,\log_a(1+x)<0$，

$\therefore |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)$.

$\because 0<x^2<1,0<a<1$，$\therefore \log_a(1-x^2)>0$，$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

说 明

1. $a \geqq b \Leftrightarrow a-b \geqq 0$，这一结论是推导不等式性质的依据，也是证明不等式的基本思路. 关于不等式性质除了课本上讲授的五个定理外，还应熟悉如下性质：①$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$. ②$a>b>0, \alpha>0 \Rightarrow a^{\alpha}>b^{\alpha}$；$a>b>0, \alpha<0 \Rightarrow a^{\alpha}<b^{\alpha}$. ③$a>0, b>0$，则 $a \geqq b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \geqq 1$. ④$a>b>0, 0<c<d \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

当不等式两边乘方、开方或同乘以一个数(或式子)时，要特别注意不等号是否改向.

2. 比较两个代数式的大小，作差法是最常用的方法，其一般步骤是作差→变形→判断大小→结论.

五、备用题

1. 若 x, y, z 互不相等，且 $x+y+z=0$，则

(A) 必有两数之和为负数 (B) 必有两数之和为正数

(C) 必有两数之积为负数 (D) 必有两数之积为正数

其中不正确的为 (D)

解 ∵ x, y, z 互不相等，不妨设 $x>y>z$. 由于 $x+y+z=0$，故 x 必为正数，z 必为负数，由 $0=x+y+z>y+z$，即知(A)正确. 又由 $0=x+y+z<x+y$，即知(B)正确. 又 $xz<0$，知(C)正确. 若设 $x=3, y=0, z=-3$. 满足条件，但(D)不成立，故应选(D).

2. 若 $x \in(0,+\infty)$，则 $\frac{x}{1+x^{2}}$ ＿$\leqslant$＿ $\frac{1}{2}$.

解 $\frac{x}{1+x^{2}}-\frac{1}{2}=\frac{-(x-1)^{2}}{2\left(1+x^{2}\right)} \leqslant 0$.

3. 比较 $2(\sqrt{3}-\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}, 2(\sqrt{2}-1)$ 的大小.

解 ∵ $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<\frac{2}{2 \sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，又∵ $2(\sqrt{2}-1)=\frac{2}{\sqrt{2}+1}>\frac{2}{2 \sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

∴ $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-1)$.

4. 若 $-1<a<b<0$，试比较 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, a^{2}, b^{2}$ 的大小关系.

解 首先由于 a^{2}, b^{2} 是正数，$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 是负数，所以只需比较 a^{2} 与 b^{2} 的大小，以及 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

∵ $-1<a<b<0$，∴ $-a>-b>0$，∴ $a^{2}>b^{2}>0$；$a<b<0$，∴ $a \cdot \frac{1}{ab}<b \cdot \frac{1}{ab}<0$，即 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$.

∴ $a^{2}>b^{2}>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

5. 已知 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}, -\pi<\beta<\frac{\pi}{2}$，求 $2\alpha-\frac{1}{3}\beta$ 的取值范围.

解 ∵ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，∴ $-\pi<2\alpha<\pi$ ①. ∵ $-\pi<\beta<\frac{\pi}{2}$，∴ $-\frac{\pi}{6}<-\frac{1}{3}\beta<\frac{\pi}{3}$ ②.

①+②，得 $-\frac{7}{6}\pi<2\alpha-\frac{1}{3}\beta<\frac{4}{3}\pi$，即 $2\alpha-\frac{1}{3}\beta$ 的取值范围是 $\left(-\frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$.

6. 实数 a, b, c, d 满足下列三个条件：

(1) $d>c$； (2) $a+b=c+d$； (3) $a+d<b+c$.

请将 a, b, c, d 按照从小到大的次序排列，并证明你的结论.

解 $\because a+d<b+c, \therefore d-b<c-a$ ①. 又$\because a+b=c+d, \therefore c-a=b-d$ ②.

$\therefore$ 由①,②得$\begin{cases} d-b<b-d, \\ a-c<c-a, \end{cases} \therefore \begin{cases} d<b, \\ a<c. \end{cases}$ 又$\because d>c, \therefore b>d>c>a$.

2. 不等式的性质(2)

一、基础训练题

1. 当 $a>b>c$ 时,则一定有 (B)

(A) $ab>ac$　(B) $(a-b)|c-a|>0$　(C) $a|c|>b|c|$　(D) $|ab|>|bc|$

2. 已知 $a+b+c=0$ 且 $a>b>c$,则下列不等式中恒成立的是 (D)

(A) $a^2>b^2>c^2$　(B) $a|b|>c|b|$　(C) $ac>bc$　(D) $ab>ac$

3. 若 $a>b$ 与 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 同时成立,则 a,b 应满足的条件为__$ab>0$__.

4. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x>1$ 且 $y>1\}$, $N=\{(x,y)\mid(x+y)>2$ 且 $(x-1)(y-1)>0\}$,则集合 M 与 N 的关系是__$M=N$__.

解 $\because \begin{cases} x>1, \\ y>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0, \\ y-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)>0, \\ (x-1)+(y-1)>0, \end{cases} \therefore M=N$.

二、例　题

1. 已知 $a>b>0, c<d<0, e<0$. 求证: $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

证明 $\left.\begin{array}{l}\begin{cases} a>b>0, \\ c<d<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>b>0, \\ -c>-d>0 \end{cases} \Rightarrow a-c>b-d>0 \Rightarrow \frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d} \\ e<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

说明 证明本题时要注意逻辑推理的严密性,书写表述的规范化,每一步变形都要注意所用性质的条件是否具备了.

2. 已知 a,b 为正数, $n\in \mathbf{N}^*$,求证: $\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

证明 $\left(\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{b^{n-1}}{a^n}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{a^{n-1}}{b^n}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{b^n}$

$=(a^{n-1}-b^{n-1})\cdot\left(\frac{1}{b^n}-\frac{1}{a^n}\right)=\frac{(a^n-b^n)(a^{n-1}-b^{n-1})}{a^nb^n}$.　(*)

(1) 若 $n=1$,则(*)式为零,原不等式取"=";

(2) 若 $n\geqslant 2$,则当 $a>b>0$ 时, $a^n>b^n$ 且 $a^{n-1}>b^{n-1}$,(*)式大于零;

当 $0<a<b$ 时, $a^n<b^n$ 且 $a^{n-1}<b^{n-1}$,(*)式仍大于零;当 $a=b$ 时,(*)式等于零.

综上知, $\frac{b^{n-1}}{a^n}+\frac{a^{n-1}}{b^n}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $a=b$ 或 $n=1$ 时不等式中等号成立.

3. 求证: $a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

证法 1(将差化成几个平方和)　$(a^2+b^2)-(ab+a+b-1)=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2]\geqslant 0$, $\therefore a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

证法 2(将差看作 a 的二次三项式,再配成平方和) $(a^2+b^2)-(ab+a+b-1)=a^2-(b+1)a+b^2-b+1=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{2}b+\frac{3}{4}=\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2\geqslant 0$, $\therefore\ a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

证法 3(将差看作 a 的二次三项式,利用根的判别式证) 对于 a 的二次三项式 $a^2-(b+1)a+b^2-b+1$, $\Delta=(b+1)^2-4(b^2-b+1)=-3(b-1)^2\leqslant 0$,又二次项系数为 1,故此二次三项式恒大于(或等于)零,即 $a^2-(b+1)a+b^2-b+1\geqslant 0$, $\therefore\ a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$.

三、练习题

1. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,那么下列命题正确的是 (C)

(A) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　(B) $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

(C) $\left.\begin{matrix}a^3>b^3\\ ab<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(D) $\left.\begin{matrix}a^2>b^2\\ ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

解 考虑 $c=0$ 及 $c<0$ 的情况,可以排除选项(A)与(B).而 $a=-2$ 与 $b=-1$ 时,符合选项(D)的条件但得不出其结论,从而应选择(C).其实我们也可以直接推导选项(C)是正确的.

2. 已知 $c<0$,则下列不等式中成立的是 (C)

(A) $c>2^c$　(B) $c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　(C) $2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$　(D) $2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$

3. 若 $a<b,c<d$,且 $(c-a)(c-b)>0,(d-a)(d-b)<0$,则 (D)

(A) $a<c<d<b$　(B) $c<a<b<d$　(C) $a<c<b<d$　(D) $c<a<d<b$

解 由已知条件 $(c-a)(c-b)>0$ 可知 $c<a$ 或 $c>b$;

由已知条件 $(d-a)(d-b)<0$ 又可知 $a<d<b$.又 $\because\ c<d$, $\therefore\ c<a<d<b$,应选择(D).

4. 若 $x_1>2,x_2>2$,则 x_1+x_2 与 x_1x_2 的大小关系为 $\underline{\ x_1+x_2<x_1x_2\ }$.

解 $x_1>2,x_2>2$,则 $x_1-2>0,x_2-2>0$, $\therefore\ (x_1-2)(x_2-2)>0$, $\therefore\ x_1x_2+4>2(x_1+x_2)$.

又 $\because\ x_1x_2>4$, $\therefore\ 2x_1x_2>x_1x_2+4>2(x_1+x_2)$, $\therefore\ x_1x_2>x_1+x_2$.

5. 用适当的符号连接下列各式:

(1) $\frac{2x}{1+x^2}\ \underline{\ <\ }\ 1(x\in(0,+\infty)$ 且 $x\neq 1)$;

(2) $\log_a(1+a)\ \underline{\ >\ }\ \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)(a>0$ 且 $a\neq 1)$;

(3) $(1-a)^{\frac{1}{3}}\ \underline{\ >\ }\ (1-a)^{\frac{1}{2}}(0<a<1)$.

6. 若 $x^2+x<0$,则 $x^2,x,-x^2,-x$ 从小到大排列的顺序是 $\underline{\ x<-x^2<x^2<-x\ }$.

解 $\because\ x^2+x<0$, $\therefore\ -1<x<0$,且 $x^2<-x,x<-x^2$, $\therefore\ x<-x^2<x^2<-x$.

7. 设 $2<x<5,4<y<10$.求:(1) $x-y$ 的取值范围;(2) $\frac{x}{y}$ 的取值范围.

解 (1) $\because\ 4<y<10$, $\therefore\ -10<-y<-4$,又 $2<x<5$, $\therefore\ 2-10<x-y<5-4$, $\therefore\ -8<x-y<1$.

(2) $\because\ 4<y<10$, $\therefore\ \frac{1}{10}<\frac{1}{y}<\frac{1}{4}$, $\because\ 2<x<5$, $\therefore\ \frac{1}{5}<\frac{x}{y}<\frac{5}{4}$.

说明 本题关键求出 $-y$ 与 $\frac{1}{y}$ 的范围,然后应用不等式性质来解决.

8. 已知函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,若 $x_1\neq x_2$,求证: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$.

证明 ∵ $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})-a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

$=\frac{1}{2}[(a^{\frac{x_1}{2}})^2+(a^{\frac{x_2}{2}})^2-2\cdot a^{\frac{x_1}{2}}\cdot a^{\frac{x_2}{2}}]=\frac{1}{2}[a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}]^2>0$(∵ $x_1\neq x_2$),

∴ $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$.

四、思考题

已知:$x<y,n\in\mathbf{N}^*$,求证:$x^{2n+1}<y^{2n+1}$.

证明 (1) 若 $x>0$,则 $0<x<y$,∴ $x^{2n+1}<y^{2n+1}$;

(2) 若 $x=0$,则 $y>0$,显然 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$;

(3) 若 $x<0$,则当 $y\geqslant0$ 时,显然 $x^{2n+1}<y^{2n+1}$;当 $y<0$ 时,∵ $x<y<0$,∴ $-x>-y>0$.

∴ $(-x)^{2n+1}>(-y)^{2n+1}$,∴ $-x^{2n+1}>-y^{2n+1}$,∴ $x^{2n+1}<y^{2n+1}$.

综上所述,$x^{2n+1}<y^{2n+1}$成立.

注 本题因 x,y 符号不定,所以不能直接用不等式性质,为此要分类讨论.

说明

1. 比较法是证明不等式的基本方法,比较法可以采用差值比较法(简称求差法)或比值比较法(简称求商法).

2. 使用比较法时,对式子进行变形是关键,通常情况下,通过因式分解,配方等手段,将复杂数学式的大小比较转化为简单数学式的大小比较.具有一定的灵活性,对具体问题应作具体分析.

3. 要加强特殊化思想的应用,特别对大小比较的选择、填空题,取特殊值进行排除不失为一个好办法.

五、备用题

1. 下列各式中,对任何实数 x 都成立的一个式子是 (C)

(A) $\lg(x^2+1)\geqslant\lg2x$ (B) $x^2+1>2x$ (C) $\frac{1}{x^2+1}\leqslant1$ (D) $x+\frac{1}{x}\geqslant2$

解 考虑 $x=-1$ 时的情况,可以排除选项(A)与(D).再考虑 $x=1$ 时的情况又可排除(B),从而应选择(C).

2. 若 $a\geqslant b,c\geqslant d$,则在:①$(a-d)^2<(b-c)^2$;②$(a-d)^3\geqslant(b-c)^3$;③$\sqrt{a-d}\geqslant\sqrt{b-c}$;④$(a-d)^{-1}>(b-c)^{-1}$中一定成立的是__②__.(写出序号即可)

解 ∵ $a\geqslant b,c\geqslant d$,∴ $a-d\geqslant b-c$.但是 $a-d$ 与 $b-c$ 可以是正的,也可以是负的.

∴ ①,③及④都不一定成立,而②一定成立.

3. 已知 $1\leqslant a-b\leqslant2,2\leqslant a+b\leqslant4$,求 $5a-b$ 的范围.

解 令 $5a-b=x(a-b)+y(a+b)=(x+y)a+(-x+y)b$.

∴ $\begin{cases}x+y=5,\\-x+y=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\leqslant3(a-b)\leqslant6, & ①\\4\leqslant2(a+b)\leqslant8. & ②\end{cases}$

①+②得 $7\leqslant5a-b\leqslant14$.

4. 已知:$a^3>b^3,ab>0$,求证:$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

证明 ∵ $a^3>b^3$,∴ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>0$.又∵ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$,

$\therefore\ a-b>0$，即 $a>b$. $\because\ ab>0$，$\therefore\ \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-b}{ab}>0$，即 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

5. 已知 $f(x)=\lg\dfrac{10^x+10^{-x}}{2}$，当 $x>0$ 时，试比较 $f(x+1)$ 与 $f(x)+f(1)$ 的大小.

解　$f(x+1)=\lg\dfrac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2}$，$f(x)+f(1)=\lg\dfrac{(10^x+10^{-x})(10-10^{-1})}{4}$.

$\because\ \dfrac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2}-\dfrac{(10^x+10^{-x})(10+10^{-1})}{4}=\dfrac{1}{4}[10^{x+1}+10^{-x-1}-10^{x-1}-10^{1-x}]$

$=\dfrac{1}{4}[10^x(10-10^{-1})+10^{-x}(10^{-1}-10)]=\dfrac{1}{4}(10^x-10^{-x})(10-10^{-1})>0(\because\ x>0)$，

$\therefore\ \dfrac{10^{x+1}+10^{-x-1}}{2}>\dfrac{(10^x+10^{-x})(10+10^{-1})}{4}$，$\therefore\ f(x+1)>f(x)+f(1)$.

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1=a>0$，$a_3=b_3>0$，$a_1\neq a_3$. 试比较 a_5 与 b_5 的大小.

解　设等差数列的公差为 d，等比数列的公比为 q.

$\because\ a_3=b_3$，$\therefore\ a+2d=aq^2$，$2d=aq^2-a$，$\therefore\ a_5-b_5=a+4d-aq^4=a+2(aq^2-a)-aq^4=-a(q^2-1)^2$.

$\because\ a_1\neq a_3$，$\therefore\ q^2\neq 1$，$\therefore\ -a(q^2-1)^2<0$，$\therefore\ a_5<b_5$.

3. 算术平均数与几何平均数

一、基础训练题

1. 已知 a,b 是正数，$\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$ 和 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 的大小顺序是　　(D)

(A) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$　　(B) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\sqrt{ab}$

(C) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$　　(D) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

2. 已知 $x,y\in(0,+\infty)$，$x+y=P$，$xy=S$，如果

① S 是定值，当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最大值 P.　② S 是定值，当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最小值 P.

③ P 是定值，当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最大值 S.　④ P 是定值，当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最小值 S.

其中正确命题的序号是　　(C)

(A) ①，②　　(B) ①，③　　(C) ②，③　　(D) ②，④

3. 设 $x<0$，则函数 $y=3+3x+\dfrac{1}{x}$ 的最大值是 $\underline{\ 3-2\sqrt{3}\ }$.

4. 若 x,y 是正数，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，则 xy 有最 $\underline{\ 小\ }$ 值(填大或小)为 $\underline{\ 16\ }$.

二、例　题

1. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1,x\neq0)$ 有下列判断：①函数的值域是 $[2,+\infty)$；②当 $x>0$ 时，$f(x)$ 有最小值 2；③当 $x<0$ 时，$f(x)\in(-\infty,-2]$；④$|f(x)|$ 的函数值一定不小于 2. 其中正确判断的序号为 $\underline{\ ③、④\ }$（将你认为正确的序号都填上）.

说明　应用算术平均数与几何平均数的关系这个重要不等式研究函数最值时，一定要注意“一正二定三相等”.

2. 已知正数 x,y 满足 $x+y=1$.

(1) 求 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值;(2) 求 $xy+\frac{1}{xy}$ 的最小值.

解 (1) $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2(x+y)}{x}+\frac{x+y}{y}=2+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}+1=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$,即 $x=2-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}-1$ 时,上述不等式中等号成立.∴ $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

说明 本例易出现如下错解:

$$\left.\begin{array}{l}1=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{xy}}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{xy}}=4\sqrt{2}$$,由此错误地认为 $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=4\sqrt{2}$.

还可用消元或换元法给出本例的其它解法.

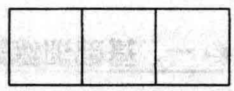
(2) 令 $xy=t$,则由 $1=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,知 $0<t\leqslant\frac{1}{4}$.

因 $xy+\frac{1}{xy}=t+\frac{1}{t}\geqslant 2$,但取"="时 $t=1\notin\left(0,\frac{1}{4}\right]$,故均值不等式"失灵".

此时,可以证明 $t+\frac{1}{t}$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上为减函数(证略),从而 $xy+\frac{1}{xy}$ 的最小值为 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$.

说明 运用均值不等式求最值等号不成立时,常考虑用函数的单调性求最值.

3. 某工厂拟建一座平面图为矩形且面积为 400 平方米的三级污水处理池,平面图如右图所示.池外圈建造单价为每米 200 元,中间两条隔墙建造单价每米 250 元,池底建造单价为每平方米 80 元(池壁的厚度忽略不计,且池无盖).



(1) 试设计污水池的长和宽,使总造价最低,并求出最低造价;

(2) 若受场地限制,长与宽都不能超过 25 米,则污水池的最低造价为多少?

解 (1) 设污水池的长为 x,则宽为 $\frac{400}{x}$,总造价

$$y=\left(2x+2\cdot\frac{400}{x}\right)\cdot 200+2\cdot 250\cdot\frac{400}{x}+80\times 400=400\left(x+\frac{900}{x}\right)+32\ 000$$

$\geqslant 400\cdot 2\sqrt{x\cdot\frac{900}{x}}+32\ 000=56\ 000$(元),当且仅当 $x=\frac{900}{x}$,即 $x=30$ 时取等号.

答:污水池的长为 30 米、宽为 $\frac{40}{3}$ 米时,最低总造价为 56 000 元.

(2) ∵ $x\leqslant 25$ 且 $\frac{400}{x}\leqslant 25$,∴ $16\leqslant x\leqslant 25$.

而总造价 $y=f(x)$ 在 $[16,25]$ 上为减函数,∴ $y_{\min}=f(25)=56\ 400$(元).

答:污水池的长为 25 米、宽为 16 米时,最低总造价为 56 400 元.

三、练习题

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a+b=3$,则 2^a+2^b 的最小值为 (B)

(A) 6　(B) $4\sqrt{2}$　(C) $2\sqrt{3}$　(D) $2\sqrt{6}$

解 $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2^{a+b}}=4\sqrt{2}$.

2. 已知 $a>b>0$,则下列不等式成立的是 (B)

(A) $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　(B) $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

(C) $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　(D) $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$

解 选用特殊值法求解.不妨取 $a=4,b=2$,可以发现应选择(B).

3. 若 $0<x<1$,则 $x(3-3x)$ 取最大值时,x 等于 (B)

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$

4. 若 $\lg x+\lg y=1$,则 $\frac{5}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 <u>2</u>.

解 $\because xy=10$,$\therefore \frac{5}{x}+\frac{2}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{5}{x}\cdot\frac{2}{y}}=2$.

5. 若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$,则 ab 的取值范围是 <u>$[9,+\infty)$</u>.

解 $\because a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,$\therefore ab\geqslant 2\sqrt{ab}+3$,$(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$,$(\sqrt{ab}+1)(\sqrt{ab}-3)\geqslant 0$,

$\therefore \sqrt{ab}\geqslant 3$,$ab\geqslant 9$.

6. 设 $x>0$,则函数 $y=\frac{(x+2)(x+8)}{x}$ 的最小值为 <u>18</u>.

解 $\because y=\frac{(x+2)(x+8)}{x}=\frac{x^2+10x+16}{x}=x+\frac{16}{x}+10\geqslant 2\sqrt{16}+10=18$,

等号当且仅当 $x=\frac{16}{x}$ 时,即 $x=4$ 时成立,$\therefore$ 所求的函数的最小值为 18.

7. 已知正数 x,y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$,求 $2x+y$ 的最小值.

解 $\because 2x+y=(2x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3+\frac{2x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{y}{x}$,即 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,$y=\sqrt{2}+1$ 时,上不等式中等号成立,$\therefore (2x+y)_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

8. 建造一个容积为 $8\mathrm{m}^3$,深为 2m 的长方体无盖水池,如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元,求水池的最低总造价.

解 设长方体的底面边长分别为 am 和 bm,则水池容积为 $2ab=8$,即 $ab=4$ 为定值.水池的总造价 $y=4(a+b)\cdot 80+120ab=320(a+b)+480\geqslant 320\cdot 2\sqrt{ab}+480=1\ 280+480=1\ 760$(元).即当 $a=b=2$m 时,最低总造价为 1 760 元.

四、思考题

已知 $a,b\in(0,+\infty)$ 且 $a^2+\frac{1}{4}b^2=1$,求 $y=a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值.

解法 1 $\because a,b\in(0,+\infty)$,$\therefore y=a\sqrt{1+b^2}=\sqrt{a^2(1+b^2)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}b^2\right)(1+b^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{(4-b^2)(1+b^2)}$ $\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{4-b^2+1+b^2}{2}=\frac{5}{4}$,$\therefore y_{\min}=\frac{5}{4}$.

解法 2 $\because a^2+\frac{1}{4}b^2=1$,$\therefore 4a^2+b^2=4$,又 $a,b\in(0,+\infty)$,$\therefore y=a\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2(1+b^2)}\leqslant$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{4a^2+b^2+1}{2}=\frac{5}{4}$,$\therefore y_{\min}=\frac{5}{4}$.