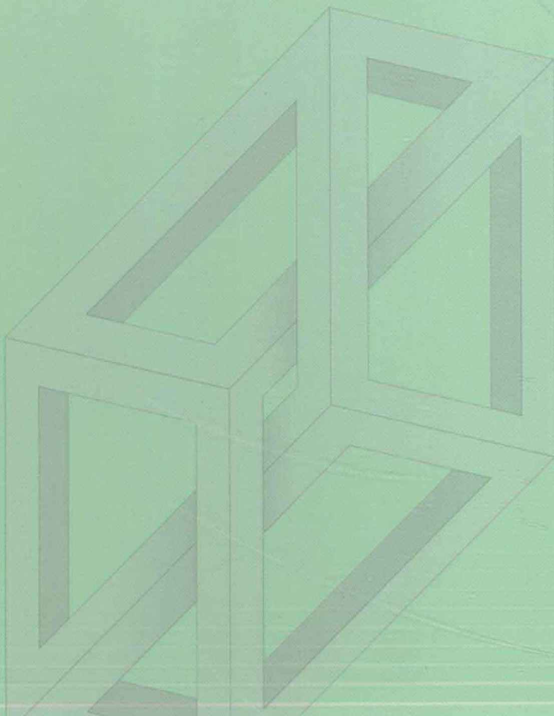
拓扑代数与广义度量空间

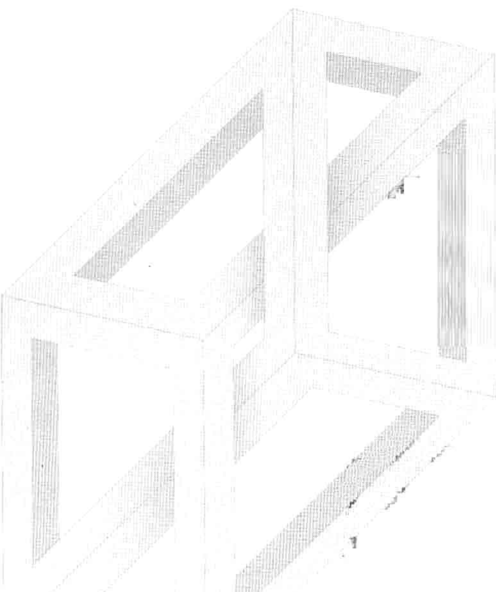
林福财 著



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

拓扑代数与广义度量空间

林福财 著



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

拓扑代数与广义度量空间/林福财著. —厦门:厦门大学出版社,2012.10
ISBN 978-7-5615-4401-3

Ⅰ.①拓… Ⅱ.①林… Ⅲ.①拓扑代数②度量空间 Ⅳ.①O177.5②O189.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 232074 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ xmupress.com
沙县方圆印刷有限公司印刷
2012 年 10 月第 1 版 2012 年 10 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:11.5
插页:2 字数:230 千字
定价:28.00 元

本书的出版得到国家自然科学基金（项目批准号：10971185，10971186，11201414)、福建省自然科学基金（项目批准号：2012J05013)、点集拓扑学（闽教高[2007]45号）、解析几何（漳师院[2010]206号）的支持和漳州师范学院学术著作出版基金资助。

内容简介

拓扑代数是拓扑和代数相互交错的研究方向，用统一的思想处理纷繁多变的问题会因其内部动力与外在需求产生新的突破口. 本书以利用代数结构及我们熟悉的广义度量空间理论的方法，寻求仿拓扑群理论和 rectifiable 空间的广义度量性质及其紧化性质，使过去只重视集合论方法的广义度量理论在代数运算中取得应用，是作者关于拓扑代数的一部专著. 内容包括仿拓扑群和 rectifiable 空间的基数不变量、仿拓扑群和 rectifiable 空间的广义度量性质和仿拓扑群和 rectifiable 空间的紧化余等.

本书论述严谨，只要具有拓扑代数和广义度量空间的基础知识就能阅读本书，并进入研究的前沿.

读者对象为大专院校数学系师生、研究生和数学工作者.

前 言

拓扑和代数是数学中的两个基本研究领域. 拓扑主要研究连续与收敛性问题, 为探讨极限及同胚等概念提供一个合理的框架, 从某种意义上说致力于无限结构, 其研究方法是多种多样的. 代数主要研究形形色色的运算, 为算法和计算提供了坚实的基础, 从某种意义上说其方法本质上却是有限的. 这些本质上的差别, 使得代数与拓扑的发展越来越独立. 伴随数学统一化的趋势, 现今在代数拓扑、函数分析、动力系统、微分几何、表示理论等学科中, 代数与拓扑又有着密切的联系. 数学中许多重要的研究方向都有着代数的表示和拓扑的结构, 如函数分析、线性拓扑、拓扑群、拓扑域、变换群和拓扑格等等. 正因为代数与拓扑本质上是由集合所确定的, 这使得它们自然而然地联系在一起, 并焕发新的活力, 如变换群就是一个典型的例子.

所谓拓扑代数结构, 指的是以拓扑群及其推广为代表的一类赋予了拓扑结构和代数结构的数学对象, 如拓扑群、仿拓扑群、半拓扑群、拓扑环、拓扑域、拓扑向量空间等. 设 G 是拓扑空间, 又是一个群, 而且群的乘积运算与求逆运算按此拓扑都是连续的, 则称 G 是拓扑群. 拓扑群也称连续群, 简言之, 是具有拓扑空间结构的群. 群赋予合理的拓扑能使得拓扑不变量发生显著的变化. 如, 1934 年, Pontryagin 证明了每一拓扑群是完全正则的; 1936 年, G. Birkhoff 和 S. Kakutani 分别独立地证明了每一第一可数的拓扑群是可度量化的; 1942 年, N. Bourbaki 证明了每一局部紧的拓扑群是仿紧的. 拓扑学家们发现具有代数结构的拓扑空间自身具有良好的拓扑结构, 更加引起人们对拓扑代数的兴趣, 从而掀起了研究拓扑代数的热潮, 取得了一系列引人注目的结果.

广义度量空间是这样的一些空间类, 有益于刻画可度量性, 继承了度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类. 自从上世纪 50 年代初给出了度量空间的内在刻画以来, 对 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理的各种推广形成了形形色色的广义度量空间. 广义度量空间理论的研究是我国拓扑学探讨的传统强项, 我国学者在此领域做出了许多突出贡献. 目前, 国内外的研究热点又逐渐转向广义度量空间理论与其他数学结构间的交叉与融合, 如函数空间拓扑等. 作为这种趋势的代表方向之一是研究具有拓扑代数结构的

广义度量空间, 这方面的研究已经引起国际一般拓扑学家们的重视并已取得一些成果. 2006 年 12 月, 俄罗斯著名拓扑学家 A.V. Arhangel'skiĭ 来华进行为期半个月讲学, 报告了莫斯科数学学派在拓扑代数方面的研究工作, 倡导我国一般拓扑学工作者在此领域开展工作. 美国 Ohio 大学刘川教授多次回国做系列报告, 鼓励国内学者开展拓扑代数的研究. 2011 年 3 月, 美国著名拓扑学家 W.W. Comfort 到中国进行为期 20 天的学术访问, 进一步推进了国内拓扑学者对拓扑代数的研究步伐. 尤其是, 2008 年 A.V. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 出版了专著⟨⟨*Topological Groups and Related Structures*⟩⟩, 为有志于拓扑代数者提供了最详实、最前沿的研究手册, 其中列举了大量的公开问题, 既显示了拓扑代数的强大生命力, 又为学习者指明了前进的方向. 如今, 四川大学、南京大学、南京师范大学、首都师范大学、漳州师范学院等高校已经在拓扑代数的研究上取得了初步的进展.

仿拓扑群是在一个群上赋予拓扑使得乘积运算按此拓扑是联合连续. 第一可数的仿拓扑群不一定是可度量化的, 如 Sorgenfrey 直线. 不少拓扑学者对仿拓扑群产生了很大的兴趣, 也取得了意想不到的结果. 如, 1981 年, P.J. Nyikos 证明了弱第一可数的仿拓扑群是第一可数的; 1996年, A. Bouziad 证明了每一 Cech 完全的半拓扑群是拓扑群; 2010 年, 刘川和林寿证明了每一具有左不变对称度量的仿拓扑群是拓扑群. 但是对于仿拓扑群的研究还远未结束, 很多问题仍尚未解决. 特别是, 仿拓扑群的许多基数不变量和广义度量性质至今仍然是个谜, 如可数双序列的仿拓扑群是否是第一可数? 第一可数的仿拓扑群是否是次可度量化? 具有一致基的正则仿拓扑群是否是可度量化? 正则的仿拓扑群是否是完全正则的至今仍是公开问题.

Rectifiable 空间是拓扑群的推广, 近几年已经成为拓扑代数研究的热点方向之一. 但是 Sorgenfrey line 不是 rectifiable 空间. Rectifiable 空间具有代数运算拓扑代数系统, 且该代数系统关于乘法运算不满足结合律. 另外, 每一拓扑环是 rectifiable 空间. 1996 年, A.S. Gul'ko 证明了每一个第一可数的 rectifiable 空间是可度量化的和每一个 T_0 的 rectifiable 空间是正则, 并讨论了 rectifiable 空间的一些基数变量. 其实, 一些拓扑拓扑学家也对 rectifiable 空间做了一些重要工作, 如 V.V. Uspenskij, P.J. Collins, P.M. Gartside 等等。特别是 2010 年, A.V. Arhangel'skiĭ 和 M.M. Choban 关于对 rectifiable 空间 Hausdorff 紧化的讨论, 获得了类似于拓扑群的二歧性定理. 但是对 rectifiable 空间的研究远远没有结束, 有很多的东西还是拓扑学家所不知道的, 如是否每一正则的 rectifiable 空间是完全

正则至今仍然是一个公开问题.

综上所述, 拓扑代数的研究由来已久, 背景丰富, 在拓扑空间中赋予代数结构来讨论广义度量性质, 既反映了一般拓扑学的发展趋势, 又是寻求数学中相关学科的交叉与结合的要求. 如能在现有的基础上, 对这些高难度、影响大的问题有进一步的突破, 不仅能够为广义度量空间理论提供一个新的发展方向, 也将对我国数学研究水平的提高和应用能力的增强起积极作用.

本书共分为 7 章且大部分内容都可见于近 20 年来关于仿拓扑群和 rectifiable 空间的论文中. 作者注重取材的新颖和特色, 尽可能勾画出我国学者近年来在讨论仿拓扑群和 rectifiable 空间的广义度量性质所取得的突出成就. 读者想顺利阅读本书, 必须掌握广义度量空间和拓扑群理论的相关基本知识. 其中, 广义度量空间理论可参见林寿教授的专著 ⟨⟨广义度量空间与映射⟩⟩ 和 ⟨⟨点可数覆盖与序列覆盖映射⟩⟩; 拓扑群理论可参见 A.V. Arhangel'skiĭ 和 M. Tkachenko 的专著 ⟨⟨*Topological Groups and Related Structures*⟩⟩.

本书的写作得到很多人的帮助. 我首先感谢的是李克典教授, 感谢他对本书作了热情洋溢的推荐, 使得本书能够及时出版. 我要感谢李进金院长和林寿教授, 感谢他们多年来的关心和帮助; 感谢刘川教授、沈荣鑫副教授提供的资料. 同时, 非常感谢厦门大学出版社对我们的大力支持. 另外, 我必须感谢我的爱人王欢, 在本书的写作过程中料理家里的大小事情和照顾刚出生不久的女儿, 使我有时间和精力完成本书的写作.

最后, 限于作者的水平有限, 本书难免有不少疏漏, 还望读者批评指正.

本书的出版得到国家自然科学基金(项目批准号: 10971185, 10971186, 11201414)、福建省自然科学基金(项目批准号: 2012J05013)、点集拓扑学(闽教高[2007]45号)、解析几何(漳师院[2010]206号)的支持和漳州师范学院学术著作出版基金资助.

林福财

2012 年 9 月 30 日

于漳州师范学院

目 录

第零章　预备知识

0.1　记号和术语

约定：本书中的所有空间都是 T_0 的. ■ 表示一个定理证明的结束.

本书常用的一些记号和术语.

1.1.1 一些记号

以 $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}, \omega, \mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{I}$ 和 $\mathbb{R}^+$ 分别表示实直线、正整数集、自然数集、有理数集、无理数集、单位闭区间和非负实数集. ω 也表示最小的无限序数. ω_1 表示最小的不可数序数.

对空间 X, $\tau(X)$ 表示 X 的拓扑, $\tau^c(X)$ 表示 X 中闭集的全体. 对 X 的子集 A 及 X 的子空间 Y 的子集 Z,

$\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$ 表示 A 在 X 中的闭包;

A° 或 $\mathrm{int}(A)$ 表示 A 在 X 中的内部;

∂A 表示 A 在 X 中的边界;

A^d 表示 A 在 X 中的聚点的集合;

$\mathrm{cl}_Y(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的闭包;

$\mathrm{int}_Y(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的内部.

集合 S 的基数记为 $|S|$. 空间 X 的势定义为

$$\omega(X) = \omega + \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ 是空间 } X \text{ 的基}\}.$$

空间 X 的稠密度定义为

$$d(X) = \omega + \min\{|D| : D \text{ 是空间 } X \text{ 的稠密子集}\}.$$

空间 X 的特征定义为

$$\chi(X) = \sup\{\chi(X, x) : x \in X\},$$

其中 X 在点 x 的特征定义为

$$\chi(X, x) = \omega + \sup\{|\mathscr{B}_x| : \mathscr{B}_x \text{ 是空间 } X \text{ 在点 } x \text{ 的邻域基}\}.$$

空间 X 的伪特征定义为

$$\psi(X)=\sup\{\psi(X,x):x\in X\},$$

其中 X 在点 x 的伪特征定义为

$$\psi(X,x)=\omega+\min\{|\mathscr{G}|:\mathscr{G}\text{ 是空间 }X\text{的开集族且 }\cap\mathscr{G}=\{x\}\}.$$

空间 X 的胞腔度定义为

$$c(X)=\omega+\sup\{|\mathscr{A}|:\mathscr{A}\text{ 是空间 }X\text{ 的不相交的非空开集族}\}.$$

空间 X 的紧覆盖数定义为

$$k(X)=\omega+\min\{|\mathscr{K}|:\mathscr{K}\text{ 是空间 }X\text{ 的紧覆盖}\}.$$

设 X 是拓扑空间. X 的非空开子集的集合 $\mathscr{U}$ 称为点 x 的 π 基, 若对点 x 的每一邻域 O, 则存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $U\subset O$. 点 x 的 π 特征 定义为

$$\pi\chi(x,X)=\min\{|\mathscr{U}|:\mathscr{U}\text{ 是点 }x\text{ 在 }X\text{ 的 }\pi\text{ 基}\}.$$

X 的 π 特征定义为

$$\pi\chi(X)=\sup\{\pi\chi(x,X):x\in X\}.$$

1.1.2 空间上的映射

设 X,Y 是空间, $f:X\to Y$ 是连续映射.

f 称为开映射, 若对 X 中每一开集 U 有 $f(U)$ 是 Y 中的开集.

f 称为闭映射, 若对 X 中每一闭集 F 有 $f(F)$ 是 Y 中的闭集.

f 称为伪开的, 若对每一 $y\in Y$ 和每一包含 $f^{-1}(y)$ 的开集 U 有 $y\in int(f(U))$.

f 称为商映射, 若对 Y 中每一子集 U 是 Y 中的开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集.

1.1.3 空间的运算

设 Φ 是一拓扑性质.

(1) Φ 称为可加的, 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族, 则拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 具有性质 Φ.

(2) Φ 称为可积的 (有限可积的, 可数可积的), 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族 (且 Λ 是有限集, Λ 是可数集), 则积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 也具有性质 Φ.

(3) Φ 称为被映射类 $\mathscr{L}$ 保持 (逆保持), 若映射 $f: X \to Y$, 其中 $f \in \mathscr{L}$ 且空间 X (空间 Y) 具有性质 Φ, 则空间 Y (空间 X) 也具有性质 Φ.

0.2 广义度量空间类

1.2.1 第一可数空间的推广

对空间 X, X 中非空有限集视为一确定的平凡收敛序列. X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为非平凡的, 若各 x_n 是互不相同的. $\{x_n\}$ 称为是终于子集 $A \subset X$ 的, 如果存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x_n : n > m\} \subset A$.

空间 X 称为关于 $\mathscr{P}$ 具有弱拓扑, 如果对于 $A \subset X$, A 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 $P \in \mathscr{P}$, $P \cap A$ 是 P 的闭子集. 若 X 称为关于 $\mathscr{P}$ 具有弱拓扑, 我们也称 X 被 $\mathscr{P}$ 确定.

定义 0.2.1 [46] 空间X 称为是 k 空间, 若 X 关于 X 中的全体紧子集组成的集族具有弱拓扑.

定义 0.2.2 [45] 空间 X 的子集 P 称为是点 x 的序列邻域, 若 X 中每一收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 都终于 P. X 的子集 $U \subset X$ 称为是 X 的序列开集, 若 U 是其中每一个点的序列邻域. 序列开集的补集称为是序列闭集. X 称为是序列空间, 若 X 中每一个序列开集是开的.

若 A 是空间 X 的子集, 则记 $[A]^{seq}$ 为 A 的序列闭包, 即: A 中所有收敛序列的极限点的集合. 显然, $A \subset [A]^{seq}$. 在 $\alpha \in \omega_1 + 1$ 上用归纳法, 可定义 $[A]_\alpha$ 如下: $[A]_0 = A, [A]_{\alpha+1} = [[A]_\alpha]^{seq}$ 和对极限序 α 有 $[A]_\alpha = \bigcup\{[A]_\beta : \beta < \alpha\}$. 易证得 $[A]_{\omega_1+1} = [A]_{\omega_1}$, 则 X 是序列空间当且仅当对每一 $A \subset X$ 有 $\overline{A} = [A]_{\omega_1}$. 对序列空间 X, X 的序列序 $so(X)$ 定义为

$$so(X) = \min\{\alpha \in \omega_1 + 1 : \text{对每一 } A \subset X \text{ 有 } \overline{A} = [A]_\alpha\}.$$

定义 0.2.3 [45] 空间X 称为是 Fréchet-Urysohn 空间, 如果对每一 $A \subset X$ 以及 $x \in \overline{A}$, 存在 A 中序列收敛于 x.

定义 0.2.4 [114] X 称为强 Fréchet-Urysohn 空间, 若 $\{A_n\}$ 是 X 的递减的集列且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$, 则存在 $x_n \in A_n$, 使 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

定义 0.2.5 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的一个覆盖. 集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的网 [3], 如果对任意 $x \in U \in \tau$, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P \subset U$.

定义 0.2.6 设 $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$ 是空间 X 的覆盖且满足对每一 $x \in X$ 有 (a) 若 $U, V \in \mathscr{P}_x$, 那么存在 $W \in \mathscr{P}_x$ 使得 $W \subset U \cap V$; (b) $\mathscr{P}_x$ 是 x 的网.

(1) 集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn 网[75], 如果对每一 $P \in \mathscr{P}_x$ 是 x 的序列邻域. X 称为 sn 第一可数的(简记为 snf), 若对每一 $x \in X$ 有 $\mathscr{P}_x$ 是可数的.

(2) 集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn 网[75], 如果 $\mathscr{P}_x$ 是序列开集. X 称为 so 第一可数的(简记为 sof), 若对每一 $x \in X$ 有 $\mathscr{P}_x$ 是可数的.

(3) 集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基[4], 如果对每一 $G \subset X$ 和 $x \in G$ 存在 $P \in \mathscr{P}_x$ 使得 $P \subset G$, 那么 G 是 X 中的开集. X 称为弱第一可数的, 若对每一 $x \in X$ 有 $\mathscr{P}_x$ 是可数的.

定义 0.2.7 设 $\mathscr{P} = \bigcup\{\mathscr{P}_x(n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是空间 X 中的一个集族, 满足对任意 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_x(n)$ 关于有限交封闭且 $x \in \bigcap \mathscr{P}_x(n)$. 集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 $\aleph_0$ 弱基[4], 如果对每一 $G \subset X$, G 是 X 中的开集当且仅当对任意 $x \in G$ 及 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $P \in \mathscr{P}_x(n)$ 使得 $P \subset G$ 成立. X 称为弱拟第一可数的, 若对每一 $\mathscr{P}_x(n)$ 是可数的.

定义 0.2.8 [21] 设 ζ 和 η 是 X 的非空子集族.

(1) 集族 ζ 称为空间 X 的预滤, 若对 ζ 中的任意元素 P_1 和 P_2 存在 $P \in \zeta$ 使得 $P \subset P_1 \cap P_2$;

(2) X 的预滤 ζ 称为收敛于点 $x \in X$, 若对点 x 的每一开邻域包含 ζ 中的一个元素;

(3) 点 $x \in X$ 称为是 ζ 的聚点, 若 x 属于预滤 ζ 的每一个元素的闭包;

(4) X 的预滤 ζ 和 η 称为同步的, 若对任意 $P \in \zeta$ 和 $Q \in \eta$ 有 $P \cap Q \neq \emptyset$;

(5) 空间 X 称为是双序列, 若对 X 的每一个聚于某点 $x \in X$ 的预滤 ζ, 那么存在 X 中可数的且收敛于点 x 的预滤 ξ 使得 ζ 和 ξ 是同步的.

显然, 我们有下列关系 (逆关系都不成立):

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{强 Fréchet-Urysohn} \arrow[r] & \text{Fréchet-Urysohn} \arrow[d] & \\
\text{第一可数空间} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{弱第一可数空间} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{序列空间} \arrow[r] & k\ \text{空间} \\
 & \text{双序列空间} \arrow[ur] & \text{弱拟第一可数空间} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

1.2.2 网的加强形式

定义 0.2.9 设$\mathscr{P}$ 是空间 X 的一个覆盖.

(1) $\mathscr{P}$ 称为是 X 的一个 cs 网[52], 如果对任意收敛序列 L 以及任意开集 U 满足 $L \subset U$, 存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $P \subset U$ 并且 L 终于P;

(2) $\mathscr{P}$ 称为是 X 的一个 cs^* 网[77], 如果对任意收敛序列 L 以及任意开集 U 满足 $L \subset U$, 存在 L 的子列 L' 以及 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $L' \subset P \subset U$;

(3) $\mathscr{P}$ 称为是 X 的一个 k 网[96], 如果对 X 中的任意紧集 K 和开集 U 满足 $K \subset U$, $K \subset \cup\mathscr{P}' \subset U$ 对某个有限子族 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ 成立;

(4) X 称为 csf 第一可数空间[76], 如果 X 存在子集族 $\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$ 使得每一 $\mathscr{P}_x$ 是点 x 在 X 中的可数 cs 网.

1.2.3 各种广义度量空间

定义 0.2.10 [95] X 称为是一个 $\aleph$ 空间, 若 X 是正则的并且具有 σ 局部有限 k 网.

定义 0.2.11 [50] 完全正则空间 X 称为 p 空间, 若存在 βX 中的开集族的序列 $\{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足:

(1) 每一 $\mathscr{U}_n$ 覆盖 x;

(2) 对每一 $x \in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset X$.

定义 0.2.12 空间 X 具有点可数型的 [43], 若对每一点 $x \in X$, 存在 X 的紧子集 K 使得 $x \in K$ 且 K 在 X 中具有可数邻域基.

定义 0.2.13 空间 X 具有可数型的 [43], 若对 X 的每一紧子集 F, 存在 X 的紧子集 K 使得 $F \subset K$ 且 K 在 X 中具有可数邻域基.

定义 0.2.14 设 X 是拓扑空间, 则

(1) X 称为是具有点 G_δ 性质[50], 如果 X 中每一单点集都是 G_δ 集;

(2) X 称为是具有 G_δ 对角线[50], 如果对角线 $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ 是 $X \times X$ 的一个 G_δ 子集;

(3) X 称为是具有正则 G_δ 对角线, 如果对角线 $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ 是 $X \times X$ 中 Δ 的可数个开邻域闭包的交.

显然, 空间具有正则 G_δ 对角线有 G_δ 对角线. 此外, 空间 X 具有 G_δ 对角线当且仅当存在一个开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)$[36]. 由此可见, 如果空间 X 具有 G_δ 对角线, 则 X 具有 点 G_δ 性质.

定义 0.2.15 设 X 是拓扑空间, 则

(1) 空间 X 具有拟 G_δ 对角线[57], 若存在 X 的开子集族序列 $\{\mathcal{G}_n\}_n$ 使得, 对每一点 $x\in X$, $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{G}_n): n\in\mathbb{N}, \mathrm{st}(x,\mathcal{G}_n)\neq\emptyset\}$ 是点 x 的 p 网.

(2) 空间 X 称为拟可展的[25], 若存在 X 的开子集族序列 $\{\mathcal{G}_n\}_n$ 使得, 对每一点 $x\in X$, $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{G}_n): n\in\mathbb{N}, \mathrm{st}(x,\mathcal{G}_n)\neq\emptyset\}$ 是点 x 的邻域基.

(3) 空间 X 称为强可展的[43], 若存在 X 的开子集族序列 $\{\mathcal{G}_n\}_n$ 满足: 对每一点 $x\in X$ 和包含点 x 的开邻域 U, 则存在包含点 x 开邻域 V 和 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in\mathrm{st}(V,\mathcal{G}_n)\subset U$.

(4) 空间 X 具有可数序的基(BCO) [50], 若存在 X 的基序列 $\{\mathcal{B}_n\}$ 使得对任意 $x\in b_n\in\mathcal{B}_n$ 且 (b_n) 是递减的, 那么 $\{b_n: n\in\mathbb{N}\}$ 是点 x 的局部基.

定义 0.2.16 空间 X 的子集 Y 称为 G_δ 稠, 若 X 的每一 G_δ 子集与 Y 相交.

定义 0.2.17 设 κ 是无限基数.

(1) 空间 X 称为 S_κ, 若 X 是 κ 个收敛序列 (包含极限点) 把所有极限点等同一点的商空间;

(2) 空间 X 称为 S_2 空间 (Arens' 空间), 若 $X=\{\infty\}\cup\{x_n: n\in\mathbb{N}\}\cup\{x_n(m): m,n\in\mathbb{N}\}$ 且拓扑定义如下: 每一点 $x_n(m)$ 是孤立点; 点 x_n 的基本邻域形式为 $\{x_n\}\cup\{x_n(m): m>k,$ 其中 $k\in\mathbb{N}\}$; ∞ 的基本邻域形式为 $\{\infty\}\cup(\bigcup\{V_n: n>k,$ 其中 $k\in\mathbb{N}\})$, 其中 V_n 是点 x_n 的邻域.

定义 0.2.18 设 X 是拓扑空间. 对 $i=1,4$, X 称为 α_i 空间, 若对任意 $n\in\mathbb{N}$, 序列 S_n 收敛点 $x\in X$, 则存在收敛于点 x 的序列 S 使得

(α_1) 每一 $S_n\setminus S$ 是有限的;

(α_4) 存在无限个 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $S_n\cap S\neq\emptyset$.

显然, $\alpha_1\Rightarrow\alpha_4$.

定义 0.2.19 设 (X,τ) 是拓扑空间. 函数 $g:\omega\times X\to\tau$ 满足对任意 $x\in X, n\in\omega$ 有 $x\in g(n,x)$.

(a) 空间 X 称为 β 空间 [50], 若存在函数 $g:\omega\times X\to\tau$ 满足: 若对每一 $n\in\omega$ 有 $x\in g(n,x_n)$, 那么序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点;

(b) 空间 X 称为 γ 空间 [50], 若存在函数 $g:\omega\times X\to\tau$ 满足: (i) $\{g(n,x):n\in\omega\}$ 是点 $x\in X$ 的局部基; (ii) 对每一 $n\in\omega$ 和 $x\in X$, 若存在 $m\in\omega$ 使得 $y\in g(m,x)$, 则 $g(m,y)\subset g(n,x)$.

β 空间是相当广泛的[50]: 在 Hausdorff 空间中, 所有的 $w\Delta$ 空间, 半层空间, Σ 空间都是 β 空间.

定义 0.2.20 设 X 是拓扑空间且 $d:X\times X\to\mathbb{R}^+$ 是函数. 对每一 $x,y,z\in X$,

(1) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

(a) 若 d 满足 (1) 和 (3), 那么 d 称为拟度量 [50];

(b) 若 d 满足 (1) 和 (2), 那么 d 称为对称度量 [50];

(c) 拓扑空间 X 称为拟度量化的 [50], 若 X 上存在拟度量 d 使得 $\{B(x,\varepsilon):\varepsilon>0\}$ 形成每一点 $x\in X$ 的局部基, 其中 $B(x,\varepsilon)=\{y\in X:d(x,y)<\varepsilon\}$.

类似地可定义对称度量化空间.

0.3 拓扑代数空间类

设 G 是拓扑空间, 又是一个群. 若 G 的乘积运算 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 按此拓扑是分离连续的, 则又称 G 是半拓扑群; 若 G 的乘积运算 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 按此拓扑是联合连续的, 则又称 G 是仿拓扑群; 若 G 的乘积运算 $(x,y)\mapsto x\cdot y$ 按此拓扑是分离连续的且 G 到 G 上的映射 $x\mapsto x^{-1}$ 连续, 则又称 G 是拟拓扑群; 若仿拓扑群 G 从 G 到 G 上的映射 $x\mapsto x^{-1}$ 连续, 则称 G 为拓扑群.

显然, 拓扑群是仿拓扑群和拟拓扑群, 而仿拓扑群和拟拓扑群都是半拓扑群. 但反之都不对, 见如下例子.

设 X 是实直线 $\mathbb{R}$ 且令 $\mathscr{B}=\{[a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$. 设 $\mathscr{B}$ 为基生成 X 上的拓扑为 $\mathscr{F}$, 则称 $(X,\mathscr{F})$ 为 Sorgenfrey 直线.

例 0.3.1 设 X 是实直线 $\mathbb{R}$.

(1) 令 $\mathscr{F}=\{U:\mathbb{R}-U$ 是有限集$\}$, 则 $(X,\mathscr{F})$ 是拟拓扑群, 但不是仿拓扑群, 从而也不是拓扑群;