

高等数学讲义

(第三册)

華東政法學院

数学教研組編

1961.4

目 录

第十章	矢量代数, 矢量分析, 场论初步	487
§ 10.1	矢量与数量	487
§ 10.2	矢量加法, 减法及数量与矢量的乘法	488
§ 10.3	矢量在轴上的投影	492
§ 10.4	矢量在直角坐标轴上的投影, 矢量坐标	495
§ 10.5	矢量的模及矢量的方向余弦	498
§ 10.6	二矢量的数量积及二矢量间的夹角	501
§ 10.7	二矢量的矢量积及其坐标表达式	503
§ 10.8	三个矢量的混积	507
§ 10.9	矢量分析	508
§ 10.10	矢量函数	508
§ 10.11	变矢量微分法	510
§ 10.12	矢量分析在几何上的应用	515
§ 10.13	矢量导数的力学意义	523
§ 10.14	场的概念	525
§ 10.15	数量场	525
§ 10.16	数量场的梯度	530
§ 10.17	矢量场	533
§ 10.18	流量矢量场的散度	536
§ 10.19	环流矢量场的旋度	540
§ 10.20	无源场, 有势场与调和场	546
§ 10.21	矢量算符(汉米尔顿算符)	551
	习 题	553
第十一章	特殊函数	557
§ 11.1	Γ 函数	557

§ 11.2	β 函数	561
§ 11.3	勒让德函数	565
§ 11.4	贝塞尔函数	569
	习 题	579
第十二章	拉普拉斯变换	581
§ 12.1	拉氏变换及反变换	581
§ 12.2	拉氏变换的性质	583
§ 12.3	导数和积分的拉氏变换	584
§ 12.4	海氏法则	589
§ 12.5	脉冲函数	593
§ 12.6	周期函数的拉氏变换	598
§ 12.7	拉氏变换在介微分方程上的应用	600
	习 题	605
第十三章	数学物理方程	607
§ 13.1	引言	607
§ 13.2	弦振动方程(波动方程)	607
§ 13.3	定介条件及定介问题(边值问题)	611
§ 13.4	热传导方程	612
§ 13.5	引力势	615
§ 13.6	分离变量法	617
§ 13.7	波动方程的达朗贝尔解法	631
§ 13.8	拉普拉斯方程的狄里赫莱问题及诺意曼问题	637
§ 13.9	格林公式	638
§ 13.10	调和函数的基本性质	643
§ 13.11	圆的狄里赫莱问题的解	647
§ 13.12	二阶线性偏微分方程的分类	651
	习 题	657
第十四章	复变函数论	659

§ 14.1	复数	659
§ 14.2	复变函数及导数	664
§ 14.3	初等函数	673
§ 14.4	复变积分	677
§ 14.5	台劳, 劳倫級数, 留数理論	685
	习 題	701
第十五章	矩陣, 綫性变换及綫性方程組	705
§ 15.1	矩陣的概念	705
§ 15.2	矩陣的运算	706
§ 15.3	方陣与綫性变换	711
§ 15.4	綫性方程組	717
§ 15.5	矩陣的秩	720
§ 15.6	綫性方程組的求解法	721
§ 15.7	齐次綫性方程組	723
	习 題	726
第十六章	計算数学	731
§ 16.1	插值法	731
§ 16.2	数值微商公式	748
§ 16.3	数值积分法	755
§ 16.4	常微分方程数值解法	765
§ 16.5	方程的求根	778
§ 16.6	綫性方程組	784
	习 題	804
第十七章	概 率 論	808
§ 17.1	基本概念	808
§ 17.2	随机变量及其分布	817
§ 17.3	統計資料的整理, 頻率分布	819
§ 17.4	随机变量的特征数	828

§ 17.5	集中性的特征数,数学期望及其性质	830
§ 17.6	离散性的特征数,方差及其性质	838
§ 17.7	关于分布的各阶矩的概念,偏度及峯度	845
§ 17.8	常态分布	847
§ 17.9	二項分布	852
§ 17.10	布松分布	858
附表1	函数 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ 数值表	863
附表2	函数 $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ 数值表	864
附表3	函数 $\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ 数值表	867
附表4	函数 $\sum_{m=0}^m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ 数值表	869
第十八章	数理統計	871
§ 18.1	子样平均数的分布,标准誤差	871
§ 18.2	信度与差異显著性	876
§ 18.3	大子样平均数比較試驗(u — 試驗)	879
§ 18.4	小子样平均数比較試驗(t — 試驗)	882
§ 18.5	方差比較試驗(F 試驗)	887
§ 18.6	随机变量分布律的鑑定(常态分布)	889
§ 18.7	方差分析	891
§ 18.8	相关分析	900
§ 18.9	取样試驗与取样方法	908
§ 18.10	工业产品的质量控制在	913
附表1	t 分布的定性限值表	926
附表2	F 分布的定性限值表	
附表3	相关系数定性限值表	927

第十章 矢量代数, 矢量分析, 场论初步

§ 10.1 矢量与数量

在自然科学中所遇到的量可分数量与矢量二个类型: 仅有大小的量叫数量。例如, 密度, 时间, 面积, 体积等叫数量; 具有大小和方向的量叫矢量或向量。例如力, 速度, 加速度等都叫矢量。我们这里所讨论的矢量是抽去物理意义的几何矢量。

我们可以把任何矢量用具有一定方向和有一定长度的有向线段来表示, 这有向线段的方向表示所论矢量的方向, 它的长度表示所论矢量的数值。例如: 以 A 为起点, B 为终点的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 就是一个矢量, 它的起点和终点代表矢量的起点和终点, 由起点到终点的方向代表矢量的方向, 我们把这个矢量记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$

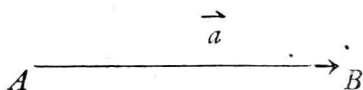


图 10.1

下面几个名词是矢量代数中常见的。

i) 自由矢量: 起点可以任意移动的矢量叫自由矢量。我们这里讨论的矢量都指自由矢量。

ii) 矢量的模: 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$ 的长度叫矢量的模, 记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$ 。它表示矢量的大小。

iii) 矢量相等: 两个矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 如果它们的模相等, 并且方向也相同, 我们说它们相等, 记作 $\vec{a} = \vec{b}$ (图10.2)。矢量的相等

必須滿足三个条件①模相等，②方位相同（即同在一直綫或分別在二条平行直綫上）③指向相同。

iv) 負矢量：两个矢量如果模相等，方位相同而指向相反，我們就說其中一个是另一个的負矢量。如图10.3. $\vec{AB}$ 的負矢量是 $\vec{CD}$ 显然有 $\vec{AB} = -\vec{CD}$

v) 单位矢量：模等于1的矢量叫单位矢量。我們常用 a° 表示与 $\vec{a}$ 同向的单位矢量。由上所述，可知任何矢量只与它的模和方向有关，因此，我們可以把任意一个矢量 $\vec{a}$ 表示成：

$\vec{a} = |a|a^\circ$ 从而 $a^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 其中 $|a|$ 表示 $\vec{a}$ 的大小， a° 表示 $\vec{a}$ 的方向。

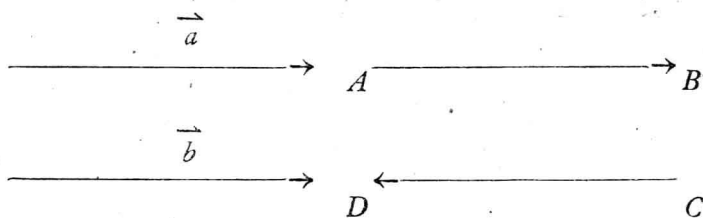


图 10.2

图 10.3

vi) 另矢量：模等于另的矢量叫另矢量。这种矢量方向不定。

§ 10.2 矢量加法，減法及数量与矢量的乘法

矢量的加法：根据力学上我們所知道的有向的量如力，速度，加速度的合成法则，我們来定义二矢量的和如下：

(一) 平行矢量的加法：設矢量 $\vec{a}$ 平行于矢量 $\vec{b}$ 記作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 或(二矢量在一直綫上)則当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 指向相同时，則定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之和 $\vec{a} + \vec{b}$ 的方向与原来二矢量的方向相同，而它的模等于二矢量模之和(图10.4)。当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的指向相反时，它的方向与模較大的矢量

的方向相同, 而它的模等于二矢量之差(图10.5)。

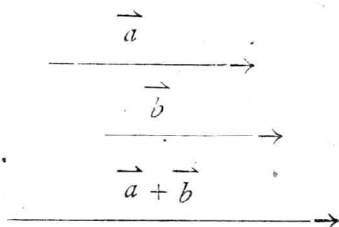


图 10.4

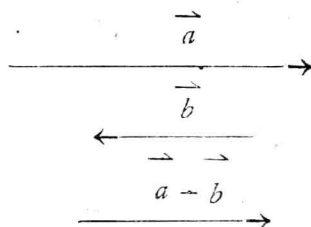


图 10.5

(二) 不平行矢量的加法: 不平行矢量的加法与力学中合成法是一致的, 一般有以下三种方法:

(1) 平行四边形法: 矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之和是以这二矢量做二边的平行四边形的对角线 $\vec{c}$ (图10.6) 记作 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 。

(2) 三角形法: 矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 如果把 $\vec{a}$ 终点与 $\vec{b}$ 的起点重合 (图10.7) 那么由 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的矢量 $\vec{c}$ 就叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之和 记作 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 。

(3) 多边形法: 设有矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 可以根据三角形法 则求出它们之和即使 $\vec{a}$ 的终点与 $\vec{b}$ 的起点重合, $\vec{b}$ 的终点与 $\vec{c}$ 的起点重合, $\vec{c}$ 的终点与 $\vec{d}$ 的起点重合 (图10.8), 则由 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{d}$ 的终点的矢量设为 $\vec{e}$ 就是它们的和,

记作: $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ 。

同理可以类推 n 个矢量的求和方法。

根据以上加法的定义, 可以推出两个运算律如下:

(1) 交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (图10.9)

(2) 结合律: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

由图10.10得:

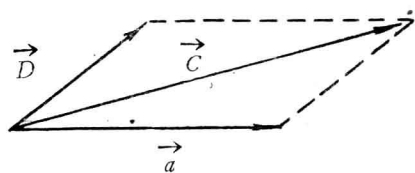


图 10.6

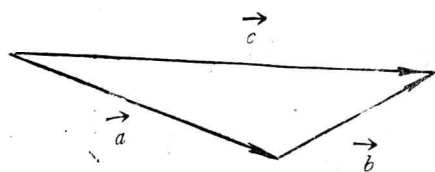


图 10.7

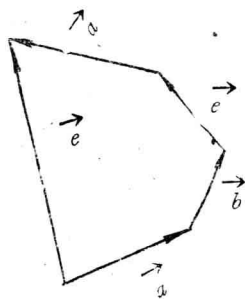


图 10.8

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

故 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

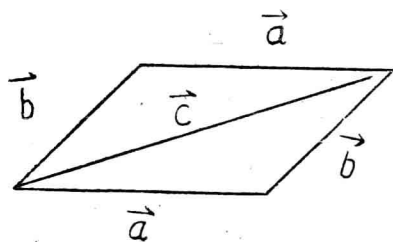


图 10.9

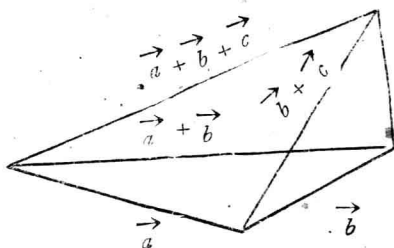


图 10.10

矢量的减法: 设有矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点放在一起把 $\vec{b}$ 的终点和 $\vec{a}$ 的终点联结起来所得的矢量就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差, 记作 $\vec{a} - \vec{b}$ (图10.11)。因为减法可以看作是加法的逆运算, 故求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之差, 就是找一个矢量 $\vec{c}$ 使得 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ 如图10.11可以看出, 这个 $\vec{c}$ 就是 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点而成的矢量即 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

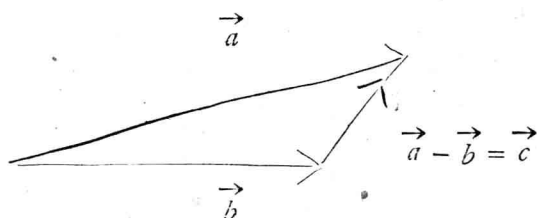


图10 11

数量与矢量的乘法: 以实数 m 乘矢量 $\vec{a}$ 仍旧表示一个矢量记作 $m\vec{a}$ 。这个矢量的模等于 $|m\vec{a}|$, 当 $m > 0$ 时, 它的方向与 $\vec{a}$ 相同。当 $m < 0$ 时它的方向与 $\vec{a}$ 相反, 当 $m = 0$ 时它成了另矢量, 这时方向不定。如图10.12示

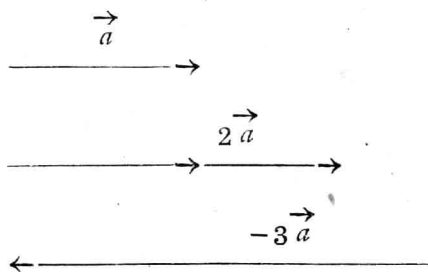


图 10.12

§ 10.3 矢量在轴上的投影

点 A 在 u 轴上的投影: 过 A 点作一平面垂直于 u 轴且与 u 轴交于 a 点, 则 a 点叫做点 A 在 u 轴上的投影(图10.13)。

矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影: 设矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为 a 点和 b 点, 则 u 轴上的有向线段 $\overline{ab}$ 之值叫矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影记作 $P_{riu}\overrightarrow{AB} = ab$ (图10.14)。由此可知,

矢量在轴上的投影是一个数量。

轴与轴间的夹角: 设空间二个轴 u_1, u_2 , 由空间任一点 O 引有向直线 $\overrightarrow{OP}$ 及 $\overrightarrow{OQ}$ 各平行于 u_1, u_2 (图10.15) 其间夹角定义为 u_1, u_2 二轴间的夹角记作 (u_1, u_2) 。

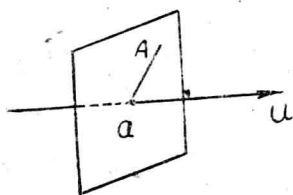


图 10.13

投影定理

定理一: 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在任何轴 u 上的投影等于该矢量的模及轴与矢量间的夹角 φ 的余弦之乘积

即:

$$P_{riu}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi,$$

证 如(图10.16) 过矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 引轴 u' 平行于 u 轴且有相同的方向, 则轴 u 和矢量 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角 φ 等于轴 u' 和矢量 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角且显然有

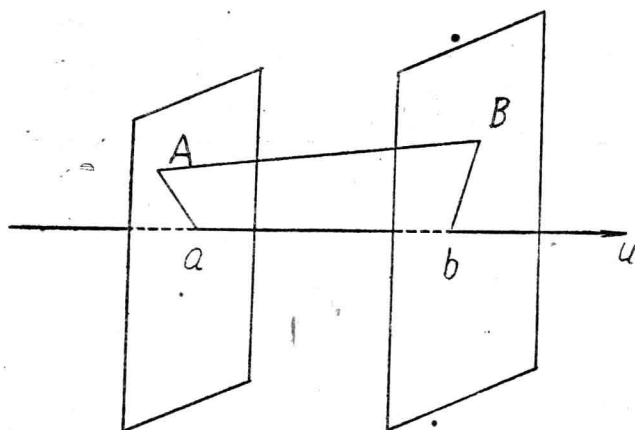


图 10.14

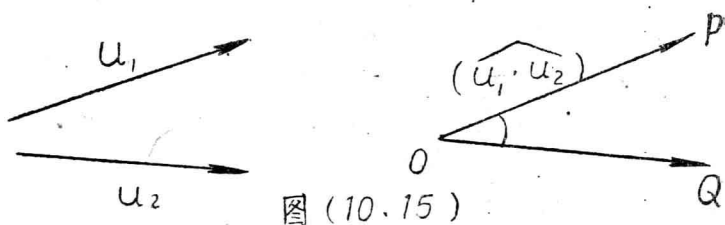


图 (10.15)

$$p_{riu} \vec{AB} = p_{riu'} \vec{AB}$$

但

$$p_{riu'} \vec{AB} = Ab' = |AB| \cos \varphi$$

$$\therefore p_{riu} \vec{AB} = p_{riu'} \vec{AB} = |AB| \cos \varphi, \text{ 証完}$$

由 $\cos \varphi$ 之值得知：一矢量与其投影轴成锐角时，矢量的投影为正值；成钝角时，为负值；成直角时则为另。

推論 相等的矢量在同一轴上的投影相等。

定理二 諸矢量的和在任何轴上的投影等于各个矢量在同一轴

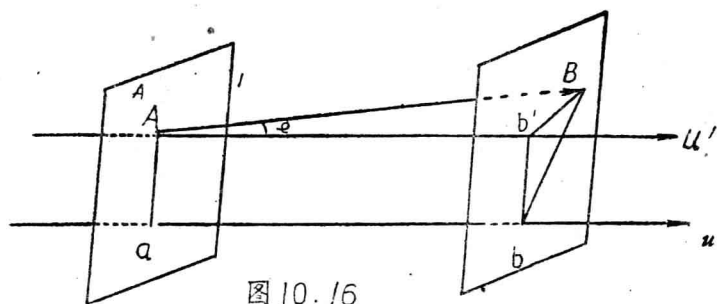


图 10.16

上的投影之和即:

$$p_{r,j}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n) = d_{r,j}\vec{a}_1 + p_{r,j}\vec{a}_2 + \cdots + p_{r,j}\vec{a}_n$$

証 取三个矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 为例, 如图 10.17

設以 op 为投影軸並作折綫 $ABCD$ 使

$$\vec{AB} = \vec{a}_1, \vec{BC} = \vec{a}_2, \vec{CD} = \vec{a}_3$$

$\vec{AB}$ 的起点就是 $\vec{a}_1$ 的起点, 終点就是 $\vec{a}_3$ 的終点。

設 A, B, C, D , 在 op 軸上的投影分别为 a, b, c, d .

$$\text{即 } p_{r,j}\vec{AB} = ab$$

$$p_{r,j}\vec{AC} = bc$$

$$p_{r,j}\vec{CD} = cd$$

$$p_{r,j}\vec{AD} = ad$$

由于 $ab + bc + cd = ad$

$$\text{故 } p_{r,j}\vec{AB} + p_{r,j}\vec{BC} + p_{r,j}\vec{CD} = ab + bc + cd = ad = p_{r,j}\vec{AD}$$

$$\text{即 } p_{r,j}\vec{a}_1 + p_{r,j}\vec{a}_2 + p_{r,j}\vec{a}_3 = p_{r,j}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)$$

同理可以推得

$$p_{r,j}\vec{a}_1 + p_{r,j}\vec{a}_2 + \cdots p_{r,j}\vec{a}_n = p_{r,j}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots \vec{a}_n)$$

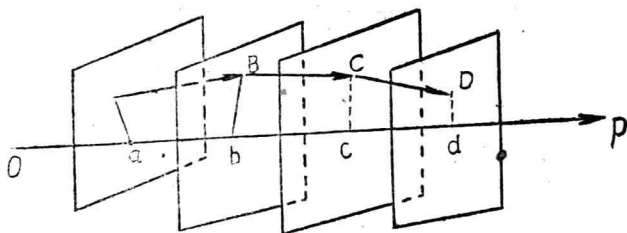


图 10.17

§ 10.4 矢量在直角坐标轴上的投影, 矢量坐标。

矢量在直角坐标轴上的投影

我們应用矢量的加法, 把空間任意一个矢量分介为坐标轴上三个矢量之和, 假設 $\vec{a}$ 是空間任意一个矢量, 我們把它的起点移到原点並命它的終点为 M , 即 $\vec{OM} = \vec{a}$ (图 10.18), 作終点 M 的坐标为;

$$OA = X, AP = Y, PM = Z$$

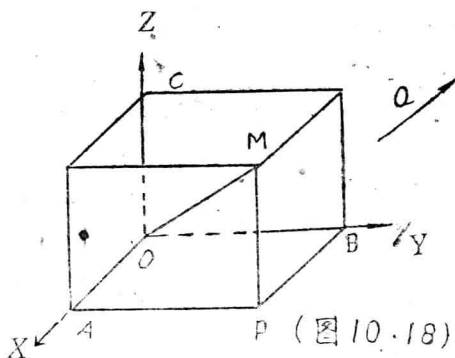
今考虑折綫 $OAPM$ 和它的封閉綫 OM , 由矢量加法的多角形法則得

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PM}$$

$$\text{因 } \vec{AP} = \vec{OB} \quad \vec{PM} = \vec{OC}$$

$$\text{故 } \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \quad (1)$$

矢量 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 叫做矢量 $\vec{OM}$ 在坐标轴上的分矢量。
在坐标轴 OX, OY, OZ , 上以 O 为起点分别取三个单位矢



量，其方向与轴的方向一致，并分别以 i, j, k 表示之，称它为基本单位矢量。

点 H 的坐标是 $OA = X, OB = Y, OC = Z$ ，由投影定理可知 OA, OB, OC 是矢量 $\vec{OM}$ 在坐标轴上的投影，又 $\vec{OM}$ 在坐标轴上的分矢量为：

$$\vec{OA} = Xi, \vec{OB} = Yj, \vec{OC} = Zk.$$

所以等式(1)可以改写为

$$\vec{a} = \vec{OM} = Xi + Yj + Zk \quad (2)$$

(2)式这个表达形式叫做矢量 $\vec{OM}$ 的坐标表达式或投影表达式。式中 X, Y, Z ，是矢量 $\vec{OM}$ 在坐标轴上的投影，特别引入注意的是，当矢量的起点为原点 O 时， X, Y, Z ，即是矢量终点 M 的坐标。

矢量坐标

如果矢量 $\vec{a}$ 在 X, Y, Z 轴上的投影依次为 X, Y, Z 则它在 X, Y, Z 轴上的分矢量就依次为 Xi, Yj, Zk 。因此；有

$$\vec{a} = Xi + Yj + Zk$$

向量 $\vec{a}$ 在坐标轴上的投影 X, Y, Z 叫向量 $\vec{a}$ 的坐标记作 $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$ 。

这里必须注意二点: ① 向量在坐标轴上的投影是三个数值 X, Y, Z , 当这向量的起点为原点时, 则 X, Y, Z 就是它的终点的坐标, ② 向量坐标轴上的三个分向量仍是三个向量

$$\text{例如 } \vec{a} = \{2, 3, 4\} = 2i + 3j + 4k$$

其中 $2, 3, 4$ 是向量 $\vec{a}$ 的坐标, 也是它在坐标轴上的投影; 而 $2i, 3j, 4k$ 则是 $\vec{a}$ 的三个分向量。

利用向量的坐标, 可得向量加, 减法及数量与向量的乘法运算如下:

设

$$\vec{a} = \{X, Y, Z\}, \quad \vec{b} = \{X, Y, Z\}$$

则

$$\vec{a} = X_1i + Y_1j + Z_1k, \quad \vec{b} = X_2i + Y_2j + Z_2k。$$

因此有

$$\vec{a} + \vec{b} = (X_1 + X_2)i + (Y_1 + Y_2)j + (Z_1 + Z_2)k$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (X_1 - X_2)i + (Y_1 - Y_2)j + (Z_1 - Z_2)k$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda X_1i + \lambda Y_1j + \lambda Z_1k, \quad \lambda \text{ 为数量。}$$

例1 设二定点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 求向量 $\vec{M_1M_2}$ 的坐标 (图10.19)

(解) 作向量 $\vec{OM_1}, \vec{OM_2}, \vec{M_1M_2}$

則 $\vec{M_1M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1}$

但 $\vec{OM_2} = x_2i + y_2j + z_2k$

$\vec{OM} = x_1i + y_1j + z_1k$

故 $\vec{OM_2} - \vec{OM_1} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$,

即 $\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ 。

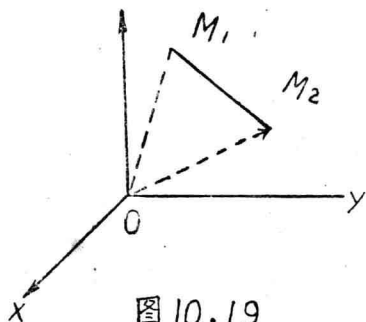


图 10.19

§ 10.5 矢量的模及矢量的方向余弦

矢量的模 在 § 10.1 中，我們曾經定义过矢量的模就是矢量的长度，现在来讨论矢量的与模矢量在坐标轴上投影的关系。设

矢量 $\vec{OM}$ 的起点为原点 O ，终点为 M ，则它在坐标轴上的投影为

$OA = X, OB = Y, OC = Z$ (图 10.18)。

于是 $(OM)^2 = (OP)^2 + (PM)^2 = (OP)^2 + (OC)^2$

但 $(OP)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$

故 $(OM)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$

故 $|\vec{OM}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$