高等数学講义

（第三冊）

華東紡織工学院

数学教研組編

1961.4

目　　录

第十章　矢量代数，矢量分析，場論初步

§10.1　矢量与数量

在自然科学中所遇到的量可分数量与矢量二个类型：仅有大小的量叫数量。例如，密度，时間，面积，体积等叫数量；具有大小和方向的量叫矢量或向量。例如力，速度，加速度等都叫矢量。我們这里所討論的矢量是抽去物理意义的几何矢量。

我們可以把任何矢量用具有一定方向和有一定長度的有向綫段来表示，这有向綫段的方向表示所論矢量的方向，它的長度表示所論矢量的数值。例如：以A为起点，B为終点的有向綫段$\overline{AB}$就是一个矢量，它的起点和終点代表矢量的起点和終点，由起点到終点的方向代表矢量的方向，我們把这个矢量記作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$

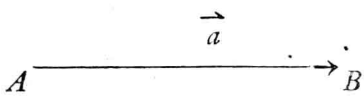


图　10.1

下面几个名詞是矢量代数中常見的。

i）自由矢量：起点可以任意移动的矢量叫自由矢量我們这里討論的矢量都指自由矢量

ii）矢量的模：矢量$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$的長度叫矢量的模記作$|AB|$或$|a|$。它表示矢量的大小。

iii）矢量相等：兩个矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，如果它們的模相等，並且方向也相同，我們說它們相等記作$\vec{a}=\vec{b}$(图10.2)。矢量的相等

必須满足三个条件①模相等，②方位相同（即同在一直綫或分別在二条平行直綫上）③指向相同。

iv）負矢量：兩个矢量如果模相等，方位相同而指向相反，我們就說其中一个是另一个的負矢量。如图10.3. $\overrightarrow{AB}$的負矢量是$\overrightarrow{CD}$显然有 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$

v）单位矢量：模等于1的矢量叫单位矢量。我們常用$a°$表示与$\vec{a}$同向的单位矢量。由上所述，可知任何矢量只与它的模和方向有关，因此，我們可以把任意一个矢量$\vec{a}$表示成：

$\vec{a}=|a|a°$ 从而 $a°=\dfrac{a}{|a|}$ 其中$|a|$表示$\vec{a}$的大小，$a°$表示$\vec{a}$的方向。

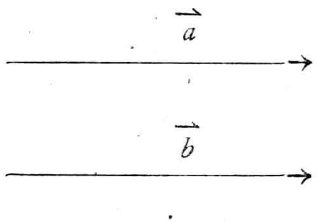


图 10.2

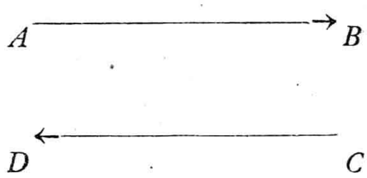


图 10.3

vi）另矢量：模等于另的矢量叫另矢量。这种矢量方向不定。

§10.2　矢量加法，減法及数量与矢量的乘法

矢量的加法：根据力学上我們所知道的有向的量如力，速度，加速度的合成法則，我們来定义二矢量的和如下：

（一）平行矢量的加法：設矢量$\vec{a}$平行于矢量$\vec{b}$記作$\vec{a}\parallel\vec{b}$或（二矢量在一直綫上）則当$\vec{a}$与$\vec{b}$指向相同时，則定义$\vec{a}$与$\vec{b}$之和$\vec{a}+\vec{b}$的方向与原来二矢量的方向相同，而它的模等于二矢量模之和（图10.4）。当$\vec{a}$与$\vec{b}$的指向相反时，它的方向与模較大的矢量

的方向相同，而它的模等于二矢量之差(图10.5)。

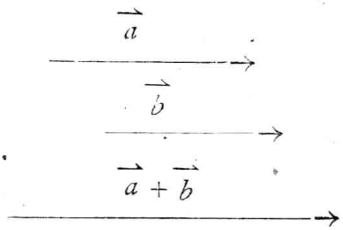


图 10.4

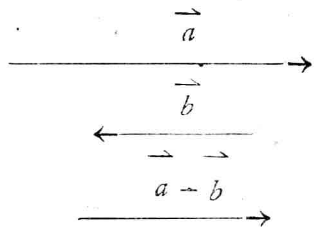


图 10.5

(二)不平行矢量的加法：不平行矢量的加法与力学中合成法是一致的，一般有下面三种方法：

(1) 平行四边形法：矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之和是以这二矢量做二边的平形四边形的对角綫 $\vec{c}$ (图10.6)記作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。

(2) 三角形法：矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，如果把 $\vec{a}$ 終点与 $\vec{b}$ 的起点重合(图10.7)那么由 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的終点的矢量 $\vec{c}$ 就叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之和記作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。

(3) 多边形法：設有矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 可以根据三角形法則求出它們之和卽使 $\vec{a}$ 的終点与 $\vec{b}$ 的起点重合，$\vec{b}$ 的終点与 $\vec{c}$ 的起点重合，$\vec{c}$ 的終点与 $\vec{d}$ 的起点重合(图10.8)，則由 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{d}$ 的終点的矢量設为 $\vec{e}$ 就是它們的和，

記作：　$\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$。

同理可以类推 n 个矢量的求和方法。

根据以上加法的定义，可以推出兩个运算律如下：

(1) 交換律：　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (图10.9)

(2) 結合律：　$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

由图10.10得：

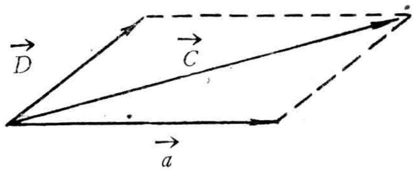
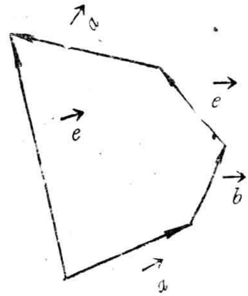


图10.6



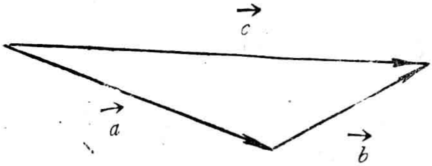


图10·8

图10.7

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

故 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

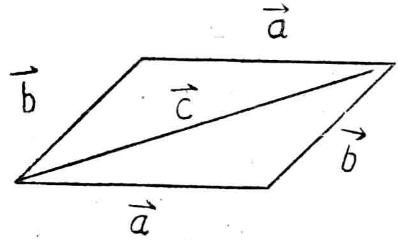


图10.9

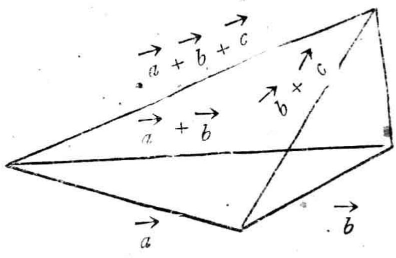


图10.10

矢量的減法：設有矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$，把$\vec{a}$和$\vec{b}$的起点放在一起把$\vec{b}$的終点和$\vec{a}$的終点联結起来所得的矢量就是$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，記作$\vec{a}-\vec{b}$(图10.11)。因为減法可以看作是加法的逆运算，故求$\vec{a}$与$\vec{b}$之差，就是找一个矢量$\vec{c}$使得$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$如图10.11可以看出，这个$\vec{c}$就是$\vec{b}$的終点到$\vec{a}$的終点而成的矢量即$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

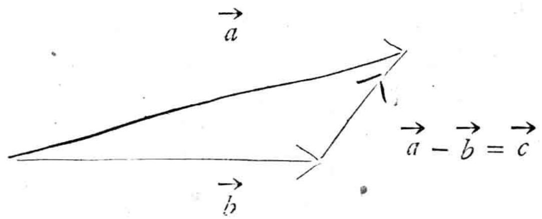


图10 11

数量与矢量的乘法：以实数m乘矢量$\vec{a}$仍旧表示一个矢量記作$\overline{ma}$。这个矢量的模等于$|ma|$，当$m>o$时，它的方向与$\vec{a}$相同。当$m<o$时它的方向与$\vec{a}$相反，当$m=o$时它成了另矢量，这时方向不定。如图10.12示

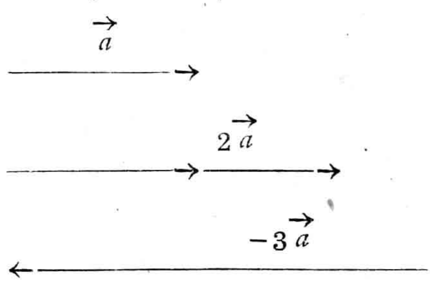


图 10.12

§10.3　矢量在軸上的投影

点A在u軸上的投影：过A点作一平面垂直于u軸且与u軸交于a点，則a点叫做点A在u軸上的投影(图10.13)。

矢量$\overline{AB}$在u軸上的投影　設矢量$\overline{AB}$的起点A和終点B在u軸上的投影分別为a点和b点，則u軸上的有向綫段$\overline{ab}$之值叫矢量$\overline{AB}$在u軸上的投影記作$P_{rju}\overline{AB}=ab$(图10.14)。由此可知，

矢量在軸上的投影是一个数量。

軸与軸間的夹角　設空間二个軸u_1，u_2，由空間任一点O引二有向直綫$\overrightarrow{OP}$及$\overrightarrow{OQ}$各平行于u_1，u_2(图10.15)其間夹角定义为u_1，u_2二軸間的夹角記作(u_1, u_2)。

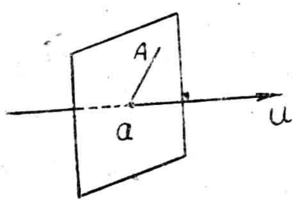


图10.13

投影定理

定理一：矢量$\overrightarrow{AB}$在任何軸u上的投影等于該矢量的模及軸与矢量間的夹角φ的余弦之乘积

即：

$$p_{rju}\overrightarrow{AB}=|AB|\cos\varphi,$$

証　如(图10.16)过矢量$\overrightarrow{AB}$的起点A引軸u'平行于u軸且有相同的方向，則軸u和矢量$\overrightarrow{AB}$間的夹角φ等于軸u'和矢量$\overrightarrow{AB}$間的夹角且显然有

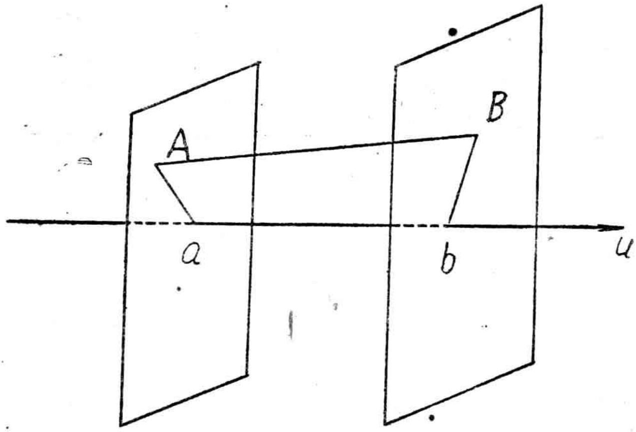
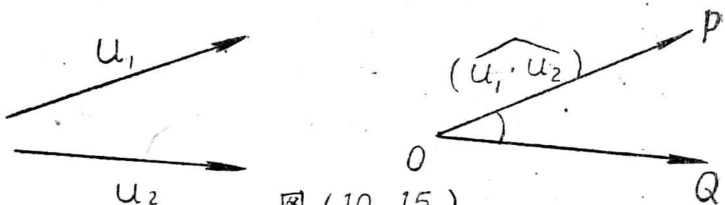


图 10.14



图（10.15）

$$p_{rj_u}\overrightarrow{AB} = p_{rj_{u'}}\overrightarrow{AB}$$

但
$$p_{rj_{u'}}\overrightarrow{AB} = Ab' = |AB|\cos\varphi$$

$$\therefore \quad p_{rj_u}\overrightarrow{AB} = p_{rj_{u'}}\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\varphi\text{，証完}$$

由 $\cos\varphi$ 之值得知：一矢量与其投影軸成銳角时，矢量的投影为正值；成鈍角时，为負值；成直角时則为另。

推論　相等的矢量在同一軸上的投影相等。

定理二　諸矢量的和在任何軸上的投影等于各个矢量在同一軸

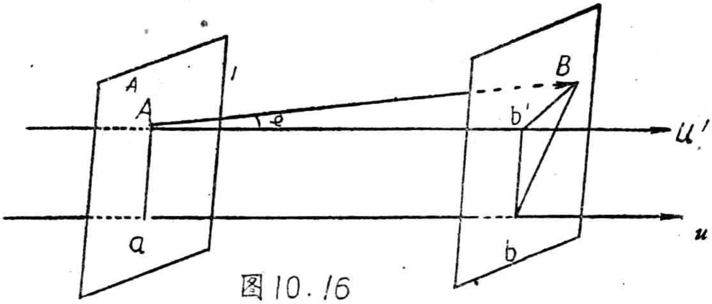


图10.16

上的投影之和即:

$$p_{rj}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots\cdots\vec{a}_n)=d_{,j}\vec{a}_1+p_{rj}\vec{a}_2+\cdots\cdots p_{rj}\vec{a}_n$$

証 取三个矢量$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$为例，如图10.17

設以op为投影軸並作折綫$ABCD$使

$$\vec{AB}=\vec{a}_1,\ \vec{BC}=\vec{a}_2,\ \vec{CD}=a_3$$

$\vec{AB}$的起点就是$\vec{a}_1$的起点，終点就是$\vec{a}_3$的終点。

設A，B，C，D，在op軸上的投影分別为a，b，c，d

即
$$p_{rj}\vec{AB}=ab$$
$$p_{rj}\vec{AC}=bc$$
$$p_{rj}\vec{CD}=cd$$
$$p_{rj}\vec{AD}=ad$$

由于$ab+bc+cd=ad$

故 $p_{rj}\vec{AB}+p_{rj}\vec{BC}+p_{rj}\vec{CD}=ab+bc+cd=ad=p_{rj}\vec{AD}$

即 $p_{rj}\vec{a}_1+p_{rj}\vec{a}_2+p_{rj}\vec{a}_3=p_{rj}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3)$

同理可以推得

$$p_{rj}\vec{a}_1+p_{rj}\vec{v}_2+\cdots\cdots p_{rj}\vec{a}_n=p_{rj}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots\cdots\vec{a}_n)$$

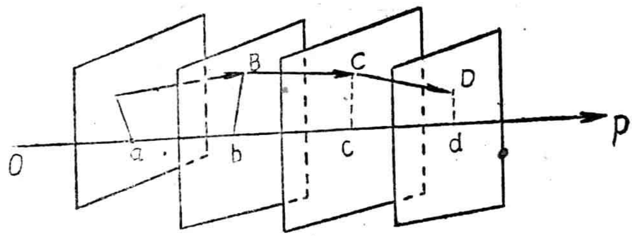


图 10.17

§10.4　矢量在直角坐标軸上的投影，矢量坐标。

矢量在直角坐标軸上的投影

我們应用矢量的加法，把空間任意一个矢量分介为坐标軸上三个矢量之和，假設 $\vec{a}$ 是空間任意一个矢量，我們把它的起点移到原点並命它的終点为M，即$\vec{OM}=\vec{a}$(图10.18)，作終点M的坐标为；

$$OA=X,\ AP=Y,\ PM=Z$$

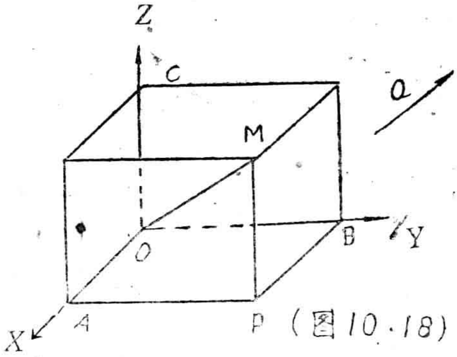
今考慮折綫 $OAPM$ 和它的封閉綫 OM，由矢量加法的多角形法則得

$$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AP}+\vec{PM}$$

因　$\vec{AP}=\vec{OB}\quad \vec{PM}=\vec{OC}$

故　$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\quad (1)$

矢量 $\vec{OA}$，$\vec{OB}$，$\vec{OC}$叫做矢量$\vec{OM}$在坐标軸上的分矢量。在坐标軸OX，OY，OZ，上以O为起点分别取三个单位矢



(图10.18)

量，其方向与軸的方向一致，并分别以 i，j，k 表示之，称它为基本单位矢量。

点H的坐标是$OA=X$，$OB=Y$，$OC=Z$，由投影定理可知OA，OB，OC定是矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标軸上的投影，又$\overrightarrow{OM}$在坐标軸上的分矢量为：

$$\overrightarrow{OA}=Xi，\overrightarrow{OB}=Yj，\overrightarrow{OC}=Zk。$$

所以等式(1)可以改写为

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OM}=Xi\times Yj+Zk \qquad (2)$$

(2)式这个表达形式叫做矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式或投影表达式。式中X，Y，Z，是矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标軸上的投影，特别引入注意的是，当矢量的起点为原点O时，X，Y，Z，即是矢量終点M的坐标。

矢量坐标

如果矢量$\overrightarrow{a}$在X，Y，Z軸上的投影依次为X，Y，Z则它在X，Y，Z，軸上的分矢量就依次为Xi，Yj，Zk。因此；有

$$\overrightarrow{a}=Xi+Yj+Zk$$

矢量$\vec{a}$在坐标軸上的投影X，Y，Z叫矢量$\vec{a}$的坐标記作$\vec{a}=\{X,Y,Z\}$。

这里必須注意二点：①矢量在坐标軸上的投影是三个数値X，Y，Z，当这矢量的起点为原点时，則X，Y，Z就是它的終点的坐标，②矢量坐标軸上的三个分矢量仍是三个矢量

例如　$\vec{a}=\{2,3,4\}=2i+3j+4k$

其中2，3，4是矢量$\vec{a}$的坐标，也是它在坐标軸上的投影；而$2i$，$3j$，$4k$則是$\vec{a}$的三个分矢量。

利用矢量的坐标，可得矢量加，減法及数量与矢量的乘法运算如下：

設

$$\vec{a}=\{X,Y,Z\},\quad \vec{b}=\{X,Y,Z\}$$

則

$$\vec{a}=X_1i+Y_1j+Z_1k,\qquad \vec{b}=X_2i+Y_2j+Z_2k。$$

因此有

$$\vec{a}+\vec{b}=(X_1+X_2)i+(Y_1+Y_2)j+(Z_1+Z_2)k$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(X_1-X_2)i+(Y_1-Y_2)j+(Z_1-Z_2)k$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda X_1i+\lambda Y_1j+\lambda Z_1k,\ \lambda\text{ 为数量。}$$

例1　設二定点为$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$求矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标（图10.19）

（解）　作矢量$\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$

则　$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$

但　$\overrightarrow{OM_2}=x_2i+y_2j+z_2k$

$\overrightarrow{OM}=x_1i+y_1j+z_1k$

故　$\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(Z_2-Z_1)k$,

即　$\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{x_2-x_1, y_2-y_1, Z_2-Z_1\right\}$。

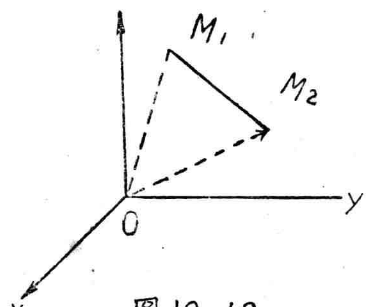


图10.19

§10.5　矢量的模及矢量的方向余弦

矢量的模　在§10.1中，我們曾經定义过矢量的模就是矢量的長度，現在来討論矢量的与模矢量在坐标軸上投影的关系。設矢量$\overrightarrow{OM}$的起点为原点O，終点为M，則它在坐标軸上的投影为

$OA=X$，$OB=Y$，$OC=Z$　(图10.18)。

于是　$(OM)^2=(OP)^2+(PM)^2=(OP)^2+(OC)^2$

但　$(OP)^2=(OA)^2+(OB)^2$

故　$(OM)^2=X^2+Y^2+Z^2$

故　$|OM|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$