ADVANCED MATHEMATICS

GUIDE

高等数学学习指导

□策划编辑：傅高明
□责任编辑：李阿盟
□封面设计：张 谨

ISBN 978-7-5612-2898-2

9 787561 228982 >

定价:59.80元

(上册:31.00元,下册:28.80元)

高等数学学习指导

（第2版）

（下册）

主　编　孙法国
副主编　韦奉岐　胡新利　王晓东
编　者　王彩霞　王姗姗　孙　娜　刘俊利　李巧艳
杨阿莉　赵宁波　张娟娟　贾悦利

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是作者根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写而成的. 全书分上、下册，共25讲，每讲有9个板块：重点内容提要，重点知识结构图，释疑解惑，考点及典型例题分析，课后习题选解，学习效果测试题，学习效果测试题答案与提示，考研模拟训练题，考研模拟训练题答案与提示.

本书通过“重点知识结构图”，理顺了各知识点之间的关系；通过“释疑解惑”，对重点概念及容易混淆的问题进行了诠释及辨析；通过对典型例题的分析和解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧.

本书是高等学校理工科及经济管理类专业本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/孙法国主编. —2版. —西安：西北工业大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-5612-2898-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第168722号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 **邮编**：710072
电 话：(029)88493844 88491757
网 址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西兴平报社印刷厂
开 本：787 mm×1 092 mm 1/16
印 张：39.25
字 数：1 208千字
版 次：2011年9月第2版 2011年9月第2次印刷
定 价：59.80元(共二册：上册：31.00元，下册：28.80元)

目　　录

第 16 讲 多元函数微分学

16.1 重点内容提要

16.1.1 多元函数的基本概念

1. 二元函数

设 D 是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的一个非空子集，称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，记为 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$. 其中平面点集 D 称为函数 f 的定义域，z 称为因变量，集合 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 f 的值域，空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 f 的图像.

2. 多元函数

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个非空子集，称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数，记为 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 其中点集 D 称为函数 f 的定义域，z 称为因变量，集合 $\{z\mid z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

16.1.2 二元函数的极限

1. 二重极限的定义

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当点 $P(x,y)$ 满足 $0<|PP_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x,y)$ 当 (x,y) 趋向 (x_0,y_0) 时以 A 为极限，记做 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

二元函数的极限要求点 $P(x,y)$ 以任何方式、任何方向、任何路径趋向 $P_0(x_0,y_0)$ 时，都有 $f(x,y)\to A$. 如果沿两条不同的路径，$f(x,y)$ 趋于不同的值，则可断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在，这是证明二重极限不存在的有效方法.

2. 累次极限

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}F(y)$ 称为先 x 后 y 的二次极限；$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}G(x)$ 称为先 y 后 x 的二次极限.

16.1.3 二元函数的连续性

1. 二元函数连续的定义

(1) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的连续点.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，分别给自变量 x,y 在 x_0,y_0 处

以增量 $\Delta x,\Delta y$,得到全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$. 如果极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$,则称 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

注 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

2. 初等函数的连续性

一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

3. 有界闭区域上连续函数的性质

(1) 有界性:若 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $z=f(x,y)$ 在 D 上有界,即 $\exists M>0,\forall(x,y)\in D$ 有 $|f(x,y)|\leqslant M$.

(2) 最值定理:若 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $z=f(x,y)$ 在 D 上有最大值和最小值,即存在 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\forall(x,y)\in D$,有

$$f(x,y)\leqslant f(x_1,y_1),f(x_2,y_2)\leqslant f(x,y)$$

(3) 介值定理:若 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$,则对任意的常数 C,当 $f(x_1,y_1)<C<f(x_2,y_2)$ 时,存在 $P_0(x_0,y_0)\in D$,使得 $f(x_0,y_0)=C$.

16.1.4 偏导数

1. 偏导数的定义

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义,定义偏导数为

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

2. 偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线关于 x 轴的斜率;$f'_y(x_0,y_0)$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线关于 y 轴的斜率.

3. 偏导函数

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点对 x 和对 y 偏导数都存在,则称函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内可导,这个新的函数关系称为 $z=f(x,y)$ 的偏导函数,记为 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},f'_x(x,y)$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},f'_y(x,y)$.

4. 高阶偏导数

(1) 定义:设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$,如果在 D 内 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 仍可导,则称它们的偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数,分别是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)$$

其中 $f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)$ 称为 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导数. 以此类推,可以定义三阶及三阶以上的偏导数.

(2) 性质:如果 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续,则在区域 D 内恒有 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

5. 偏导数计算

(1) 求 $f'_x(x,y)$ 时,只要把 $z=f(x,y)$ 中的 y 固定(看做常数),仅对 x 求导;求 $f'_y(x,y)$ 时,固定 x,仅

对 y 求导.

(2) $f'_x(x_0,y_0)$ 是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数,$f'_y(x_0,y_0)$ 是一元函数 $z=f(x_0,y)$ 在 y_0 处的导数,所以偏导数实质上仍是一元函数的求导问题.

(3) 当函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内可导时,有偏导函数 $f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$. $f'_x(x_0,y_0)$ 是 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的函数值;$f'_y(x_0,y_0)$ 是 $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的函数值.

16.1.5 全微分的概念

1. 定义与计算

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义,如果全增量可以表示成 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$,其中 A,B 只与 (x_0,y_0) 有关,而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分,称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分,记为 $\mathrm{d}z$. 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分,则

$$\mathrm{d}z=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$

2. 可微的必要条件

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分,则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处必可导,且全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

3. 可微的充分条件

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在且连续,则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处必可微.

4. 方向导数与梯度

(1) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,自点 (x_0,y_0) 引射线 l,设 x 轴正向到射线 l 的转角为 α,y 轴正向到射线 l 的转角为 β. 该邻域中另一点 $P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 在 l 上,当 P_1 沿 l 趋向于 P_0 时,极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$ 存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数,记做 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$,即 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,则 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分,则称向量 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度,记做 $\mathbf{grad}f(x,y)$,即

$$\mathbf{grad}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$$

梯度的方向是函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处方向导数取得最大值的方向,梯度的模 $|\mathbf{grad}f(x,y)|$ 即为方向导数的最大值.

5. 二元函数连续性、可导性、可微性,以及方向导数之间的关系

$$\text{偏导数存在且连续}\to\text{可微}\to\begin{cases}\text{可导,即 } \mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\ \text{连续}\to\text{极限存在,即} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)\\ \text{方向导数存在,即}\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\end{cases}$$

16.1.6 多元复合函数的导数

1. 法则一

设 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点(x,y)处可导，而函数 $z=f(u,v)$ 在相应点(u,v)处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y)处可导，且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

此法则是一元复合函数求导法则的推广.对多元复合函数因变量z与自变量x或y之间可有多条链相连接，每一条链都遵循求导的链式法则，然后将各条链叠加即可，所以也称为链式叠加法则，此法则可以推广到有限个中间变量或有限个自变量的情形.

2. 法则二

设 $u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$ 在点 t 处可导，而函数 $z=f(u,v)$ 在相应点(u,v)处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导，且全导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

3. 微分形式不变性

设函数 $z=f(u,v)$ 具有连续的偏导数，则无论 u,v 是中间变量还是自变量，微分的形式都不变，即

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

16.1.7 隐函数求导

1. 一元隐函数存在定理

设函数 $F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的一元函数 $y=f(x)$，满足 $y_0=f(x_0)$，并且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

2. 二元隐函数存在定理

设函数 $F(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

3. 方程组情形

(1) 设函数 $F(x,y,z)$，$G(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内有对各个变量的连续的偏导数，又 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$G(x_0,y_0,z_0)=0$，且雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 不等于0，则方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续导数的函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，满足条件 $y_0=y(x_0)$，$z_0=z(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}$$

(2) 设函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 点的某邻域内有对各个变量的连续的偏导数，

又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$ 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于0，则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，满足条件 $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}$$

16.2 重点知识结构图

$$\text{多元函数微分学}\begin{cases}\text{基本概念(区域、定义、极限、连续)}\\ \text{偏导数(定义、计算、高阶偏导数)}\\ \text{全微分(定义、计算、必要条件、充分条件)}\\ \text{多元复合函数的导数(链式法则、全导数)}\\ \text{隐函数求导法(一个方程、方程组)}\end{cases}$$

16.3 释疑解惑

问题 16.1 当动点 $P(x,y)$ 沿任意直线无限趋于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在，且都等于 A，能否说明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

解答 不能确定. 例如极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y}$，对于任意常数 k，显然有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+kx}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x+k}=0$$

即点 $P(x,y)$ 沿任意直线无限趋于点 $(0,0)$ 时，极限都为 0，但是

$$\lim_{\substack{y=-x^2+x^3\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-x^2+x^3)}{x^2+(-x^2+x^3)}=-1$$

故函数在点 $(0,0)$ 的极限不存在.

问题 16.2 如果引入极坐标 $\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$，且对任意的 θ，都有 $\lim\limits_{r\to 0} f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)=A$，其中 A 是一个与 θ 无关的常数，是否有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$?

解答 不一定. 例如：

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x^2+y^2=0\\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

当点(x,y)沿曲线$y^3=kx$趋于点$(0,0)$时，有$\lim\limits_{\substack{y^3=kx\\x\to 0}}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$. 但若用$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^6}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^6\sin^6\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin^3\theta}{\cos^2\theta+r^4\sin^6\theta}=0$$

问题 16.3 判定二重极限不存在，有哪些常用的方法？

解答 依二重极限的定义，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$存在的充分必要条件是$P(x,y)$以任何方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$有相同的极限，因此，判定二重极限不存在，常用的方法有如下两种：

(1) 选取一种$P\to P_0$的方式，记为$P\in C$，其中C为函数定义域内以P_0为聚点的一个点集，按此特殊方式，$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)$不存在.

(2) 找出两种$P\in C_1$与$P\in C_2$的方式，使

$$\lim_{P\to P_0}f(x,y)=A_1(P\in C_1),\qquad \lim_{P\to P_0}f(x,y)=A_2(P\in C_2)$$

且$A_1\neq A_2$，则二重极限不存在.

问题 16.4 二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$与累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$是否一样？

解答 不一样.

(1) 二重极限存在，但是累次极限不存在. 例如$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}(xy\neq 0)$，由于$\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|+|y|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$，故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. 但是$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}=0$，而$\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}$不存在，于是$\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})$不存在，从而$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})$不存在，同理$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})$不存在.

(2) 二重极限不存在，但是累次极限存在. 例如$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2\neq 0)$的二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在，但是$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$.

(3) 若$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续，则$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

问题 16.5 求一些比较简单的函数的二重极限有哪些方法？

解答 由于在平面上动点$P(x,y)$趋于定点$P_0(x_0,y_0)$的方式多样性，导致了二重极限相对一元函数极限要复杂. 一般求二重极限常用的方法如下：

(1) 利用函数的连续性，如果$P_0(x_0,y_0)$是函数$f(x,y)$的连续点，则$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

(2) 利用极限的性质(如四则运算性质，夹逼准则).

(3) 若观察出$f(x,y)$的极限是A，利用极限的$\varepsilon-\delta$定义去证明$\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$.

(4) 消去零因子的方法.

(5) 将二元问题转化为一元问题.

问题 16.6 若一元函数$f(x_0,y)$在y_0处连续，能否断定二元函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$连续.

解答 不一定. 例如：

(1) $f(x,y)=|x|+|y|$在$P_0(0,0)$处，有$f(0,y)=|y|$，知$f(x,y)$在$P_0(0,0)$连续.

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$P_0(0,0)$处，有$f(0,y)$，$f(x,0)$都连续，但是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

问题 16.7 计算偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 时，是否可以将 $y=y_0$ 先代入，再对 x 求导数？

解答 直接由偏导数的定义可得出，实际上对 x 求偏导数时，就是将 y 看做常数，再对 x 求导数.

问题 16.8 二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 是否一定相等？

解答 不一定. 只有两个二阶混合偏导数连续时，才有 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$，例如：

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(1) 在点(0,0) 处有 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$f'_x(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f'_y(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3},\qquad f''_{yx}(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$$

可见，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$，但当 $x^2+y^2=0$ 时，有

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=-1,\quad f''_{yx}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=1$$

所以 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

问题 16.9 在一元函数中，若 $f(x)$ 满足条件：(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(2) $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，则 $f'(x)\equiv 0$ 的充要条件是在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv k$. 多元函数是否也有类似的结果？

解答 若 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内偏导数存在，则

(1) 在 D 内 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$（或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$）的充要条件是 $f(x,y)=\varphi(y)$（或 $f(x,y)=\varphi(x)$）.

(2) 在 D 内 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$ 的充要条件是 $f(x,y)=$ 常数（$(x,y)\in D$）.

问题 16.10 若 $f(x,y)$ 在区域 D 内任一点处可微，且在沿两个不共线的方向导数皆为零，则 $f(x,y)=$ 常数，对吗？

解答 对. 设两个不共线的方向余弦分别为 $(\cos\alpha_1,\cos\beta_1)$ 和 $(\cos\alpha_2,\cos\beta_2)$，由不共线知 $\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}\neq 0$，故方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_1=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_2+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_2=0\end{cases}$ 只有零解，由此知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，故 $f(x,y)=$ 常数.

问题 16.11 若 $f(x,y)$ 在区域 D 内任一点处有 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，则 $f(x,y)=$ 常数（$(x,y)\in D$）. 对吗？

解答 不一定. 例如 $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 满足题设条件，但 $f(x,y)\neq$ 常数.

问题 16.12 在一元函数中，若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，必有 $f(x)$ 在 x_0 处连续，那么多元函数是否也有相同的结果，即偏导数存在，是否一定连续？

解答 不一定.

(1) $z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在(0,0) 的偏导数存在，且 $f(x,y)$ 在(0,0) 连续.

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0) 的偏导数为

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，事实上，$\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1+k^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$，当 k 取不同值时其极限不同，所以函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 不连续.

(3) 连续不一定偏导数存在. 例如 $f(x,y) = |x| + |y|$ 在点(0,0) 连续，但 $f'_x(0,0)$ 及 $f'_y(0,0)$ 都不存在.

问题 16.13 对于多元函数而言，全微分存在，函数必连续，反之是否成立？

解答 不一定. 例如：

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

由于

$$0 < \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|xy|}$$

因此 $f(x,y)$ 在点(0,0) 连续，且 $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$，但是

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - [f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在，由微分的定义知，函数 $f(x,y)$ 在(0,0) 不可微.

问题 16.14 多元函数的可微性与偏导数之间的关系如何？

解答 对于一元函数而言，可微性与可导性是等价的，但对多元函数而言：

(1) 可微 $\Rightarrow$ 偏导数存在.

(2) 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微.

(3) 偏导数存在，不一定可微(可见问题 16.12).

问题 16.15 设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，当 $x = t, y = t$ 时，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 有两种解法：

(1) 显然有 $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$，由复合函数的求导公式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = f'_x(0,0)\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + f'_y(0,0)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0\times 1 + 0\times 1 = 0$$

(2) 把 $x = t, y = t$ 代入原函数 $z = f(x,y) = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$，从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

上述两种解法结果不一样，为什么？

解答 原因在于用了复合函数求导公式，而用此公式的前提是要求全微分存在，事实上函数 $z = f(x,y)$ 在点(0,0) 的全微分不存在.

问题 16.16 一阶微分形式不变性在多元函数微分学中起什么作用？

解答 多元函数的一阶微分形式不变性，给我们提供了一个求偏导数的简便方法，即不需要区分函数由多少个中间变量复合而成，变量之间的关系是如何错综复杂，都不必去辨认区分，仅分清楚自变量是什么，直到出现自变量的微分，那么自变量微分的系数连同符号在内，就是要求的对这个变量的偏导数.

16.4 考点及典型例题分析

1. 课程考试重点

(1) 多元函数的概念、二元函数极限与二元函数的连续性；

(2) 偏导数的概念、几何意义与计算；

(3) 全微分的概念与计算；

(4) 多元复合函数偏导数的概念与计算；

(5) 隐函数的偏导数；

(6) 高阶偏导数的概念与计算.

2. 考研重点

(1) 多元函数的连续性； (2) 偏导数的概念与计算；

(3) 高阶偏导数的概念与计算； (4) 全微分的概念与计算.

例 16.1 判断 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 是否存在.

分析 选择直线 $y=kx$，使得极限与 k 值有关，从而说明极限不存在. 这是判断二重极限是否存在的一个常用方法.

解 当 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1.$

当 (x,y) 沿直线 $y=2x$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4}{4x^4+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{4x^2+1}=0.$

因为沿不同路径趋于 0 时，函数极限不等，所以原式极限不存在.

评注 二元函数的极限与一元函数的极限不同，对于一元函数，动点 $x\to x_0$ 只能沿直线方向，而二元函数，动点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 可以是任意方式. 在证明二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 时，我们常用的方法是适当放大 $|f(x,y)-A|$，然后用夹逼准则. 在计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 时，可以参照一元函数极限的解题思路，如无穷小代换、重要极限、复合函数的极限等变量替换的方法，也可以采取借助四则运算、连续函数的极限、对函数作恒等变形消去零因子等方法. 在证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在时，我们有 2 种办法，一是沿不同路径极限不相等；二是沿某一特殊路径极限不存在.

例 16.2 判断极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在.

分析 此题中路径不能全选择直线，可以选择曲线.

解 当 (x,y) 沿曲线 $y=x^2-x$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2-x)}{x^2}=-1.$

当 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0.$

因为沿不同路径趋于 0 时，函数极限不等，所以原式极限不存在.

评注 函数的分母是代数和的形式，在选择趋近路径时，就可以考虑将分母化为 x 的幂函数，且分子是 x 与 y 的乘积，故可以选择 $x+y=x^2$，即 $y=x^2-x$ 这条路径；另外一条路径可以考虑低于或高于 2 次幂，如选择 $x+y=2x$，即 $y=x$ 这条路径.

例 16.3 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$

(1) 讨论函数 $z=f(x,y)$ 的连续性；(2) 求 $f(x,y)$ 的一阶偏导数.

分析 这是多元分段函数. 当 $x^4+y^2\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 是初等函数，在其定义域内各点均连续，而且可以按照求偏导数的法则求其偏导数. 当 $x^4+y^2=0$ 时，即在点 $(0,0)$ 处，应该按照多元函数在一点连续、可导的定义进行讨论.

解 (1) 当 $x^4+y^2\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)$ 处处连续，当 $x^4+y^2=0$ 时，若动点沿直线 $y=kx$ (k 为任意常数) 趋向于点 $(0,0)$，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=0$$

若动点沿曲线 $y=x^2$ 趋向于点 $(0,0)$，则有

$$\lim_{\substack{y=x^2\\x\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq 0$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

(2) 当 $x^4+y^2\neq 0$ 时，

$$f'_x(x,y)=\frac{2xy(x^4+y^2)-4x^5y}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{x^2(x^4+y^2)-2x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}=\frac{x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}$$

当 $x^4+y^2=0$ 时，

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

所以一阶偏导数为 $f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy(y^2-x^4)}{(x^4+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

评注 对于多元分段函数，在分段点的连续性和可导性必须用定义进行讨论.

例 16.4 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(1) 讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性；

(2) 求函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数；

(3) 讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性；

(4) 讨论偏导数在点 $(0,0)$ 处的连续性.

分析 首先，二元函数在一点处偏导数存在，在该点处函数可能不连续. 二元函数偏导数存在不是连续的充分条件，而连续也不是偏导数存在的必要条件. 例如，$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处是连续的，但是偏导数 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都不存在，更不可微. 其次，函数在一点处偏导数存在，但在该点处不一定可微. 二元函数的两个偏导数存在是全微分存在的必要条件而不是充分条件，两个偏导数在某一点的邻域内存在而且在该点连续，才是二元函数在该点全微分存在的充分条件. 最后，函数在 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时极限不存在，从而函数在 (x_0,y_0) 点不连续，全微分一定不存在；反之，若函数在 (x_0,y_0) 点连续，则在该点极限一定存在.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)]$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}=0$$

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$.

(3) 因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}=0$

所以由全微分定义可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}z=f'_x(0,0)\mathrm{d}x+f'_y(0,0)\mathrm{d}y=0$.

(4) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

故
$$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$，当动点沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\sin\dfrac{1}{x}=0$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 不存在，所以 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续. 同理可证 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处也不连续.

评注 在此例中，函数在一点处的偏导数存在而不连续，但是函数在该点处的全微分存在，说明偏导数存在且连续是函数可微分的充分非必要条件.

例 16.5 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　). (1997 年考研试题)

(A) 连续，偏导数存在　　(B) 连续，偏导数不存在

(C) 不连续，偏导数存在　　(D) 不连续，偏导数不存在

解 若动点沿直线 $y=kx$（k 为任意常数）趋向于点 $(0,0)$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

该值与 k 的取值有关，极限不存在，所以不连续.

又
$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

故偏导数存在，所以选(C).

例 16.6 设 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$.

分析 求二元函数的偏导数的方法很简单，即在求 $f'_x(x,y)$ 时，将 y 当做常数，利用一元函数的求导公式和导数的运算法则求得即可；求 $f'_y(x,y)$ 的方法类似，可将 x 看做常数.

解
$$f'_x(x,y)=2x-y\arctan\frac{x}{y}-xy\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}=2x-y\arctan\frac{x}{y}-\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

同理
$$f'_y(x,y)=2y-x\arctan\frac{x}{y}-xy\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=2y-x\arctan\frac{x}{y}+\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

例 16.7 设 $f(x,y)=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f'_x(x,1)$.

分析 在求 $f'_x(x,y)$ 时，可将 y 当做常数，所以可以先把 $y=1$ 代入 $f(x,y)$ 中，得到关于 x 的一元函数 $f(x,1)$，再对一元函数求导.