中学复习资料

数学

SHUXUE

下

安徽省教育局教材编审室编

安徽人民出版社

目　　录

第四部分　三　　角

第五部分　解析几何

第四部分　三　　角

第一章　锐角三角函数

复 习 要 点

一　锐角三角函数的定义

在直角三角形 ABC 中（图1—1），$\angle C=90°$，那么，

$\sin A=\dfrac{BC}{AB}$，　　　$\cos A=\dfrac{AC}{AB}$，

$\operatorname{tg} A=\dfrac{BC}{AC}$，　　　$\operatorname{ctg} A=\dfrac{AC}{BC}$，

$\sec A=\dfrac{AB}{AC}$，　　　$\csc A=\dfrac{AB}{BC}$。

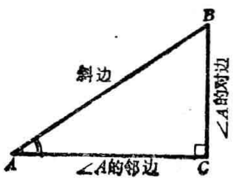


图 1—1

它们分别叫做锐角A的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，总称锐角三角函数。

二　锐角特殊角的三角函数值

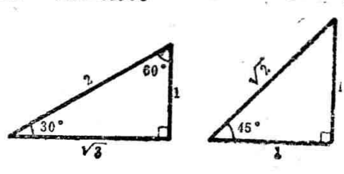


图 1—2

根据锐角三角函数的定义及特殊直角三角形的有关性质

、(图1—2)，可得30°、45°、60°的三角函数值如下表。

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

三　直角三角形的解法及其应用

三角形的三条边和三个角叫做它的元素。根据已知元素，求未知元素，叫做解三角形。

直角三角形通常用C表示直角，用a、b、c分别表示三个角A、B、C的对边。(图1—3)

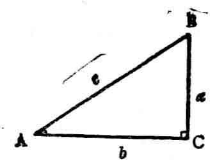


图 1—3

直角三角形ABC，除已知直角外，如果还知道两个元素(其中至少有一条边)，那么总可以求出其他元素。主要有以下四种类型：

1. 已知　A、c，

　那么　$B=90°-A$，　$a=c\sin A$，　$b=c\cos A$。

2. 已知　A、a，

　那么　$B=90°-A$，　$c=\frac{a}{\sin A}$，　$b=a\,\mathrm{ctg}\,A$。

3.已知　c、a，

那么　$b=\sqrt{c^2-a^2}$，　$\sin A=\dfrac{a}{c}$，　$B=90°-A$。

4.已知　a、b，

那么　$c=\sqrt{a^2+b^2}$，　$\operatorname{tg} A=\dfrac{a}{b}$，　$B=90°-A$。

例　　题

例1　已知α是锐角，比较$\sin\alpha$与$\operatorname{tg}\alpha$的大小。

解　如图 1—4，

$\because$　$\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$，　$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}$，

而　$c>b$，$\therefore \dfrac{a}{c}<\dfrac{a}{b}$，即$\sin\alpha<\operatorname{tg}\alpha$。

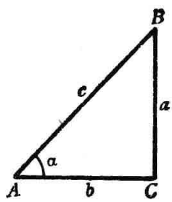


图1—4

例2　为了测量山高CD，先在地面A处用测倾器测得山顶的仰角是$22°30'$，再将测倾器沿直线AD后退到B处，测得山顶的仰角是$15°30'$，量得AB为40米，仪器高为1.3米(图1—5)。求山高CD。

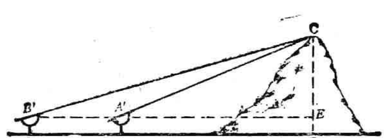


图 1—5

解　在直角三角形$B'CE$中，$B'E=CE\cdot\operatorname{ctg}15°30'$。

在直角三角形$A'CE$中

$$A'E = CE \cdot \operatorname{ctg} 22°30'。$$

$\because \quad B'E - A'E = A'B' = AB = 40,$

$\therefore \quad CE \cdot \operatorname{ctg} 15°30' - CE \cdot \operatorname{ctg} 22°30' = 40,$

$$CE = \frac{40}{\operatorname{ctg} 15°30' - \operatorname{ctg} 22°30'}。$$

$\therefore \quad CD = \dfrac{40}{\operatorname{ctg} 15°30' - \operatorname{ctg} 22°30'} + 1.3 \approx 34.9$(米)。

答 山高约 34.9 米。

例3 要测纪念碑 AB 的高，在它的正南和正东的地面上的 C 点和 D 点，分别测得顶 A 的仰角是 α 和 β，又测得 $CD = a$（图1—6）。求证：纪念碑高 h 是 $\dfrac{a}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}$。

证 在直角三角形 ABC 中，

$$BC = h \operatorname{ctg} \alpha。$$

在直角三角形 ABD 中，

$$BD = h \operatorname{ctg} \beta。$$

$\because \quad CD^2 = BC^2 + BD^2,$

$\therefore \quad a^2 = h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + h^2 \operatorname{ctg}^2 \beta,$

$\therefore \quad h = \dfrac{a}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}。$

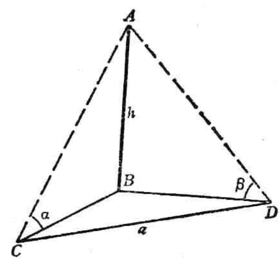


图 1—6

例4 求立方体的对角线与它的各个面的夹角。

解 如图1—7，

设立方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的棱长为 a。连结 AC'，AC。

设 $\angle C'AC = \alpha$，$\because \quad C'C \perp CA$，

$\therefore \quad \alpha$ 就是所求的角。

$\because \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2$

$\qquad = 2a^2,$

$\therefore \quad AC = \sqrt{2}\, a。$

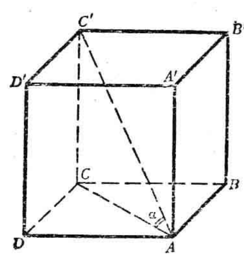


图 1—7

$$\therefore \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{CC'}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071。$$

$$\therefore \quad \alpha = 35°16'。$$

答 立方体的对角线与它的各个面的夹角是35°16′。

习 题 A

1.在直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$：

(1) $a = 5$，$c = 13$，求$\angle A$ 的正弦和余弦；

(2) $a = 2\text{cm}$，$b = 4\text{cm}$，求$\angle B$ 的正切和余切。

2.求下列各式的值：

(1) $\sin 60°\cos 30° - \cos 60°\sin 30°$；

(2) $3\mathrm{tg}\,30° + \sin 45° - \mathrm{ctg}\,30° - \frac{1}{2}\mathrm{tg}45°$；

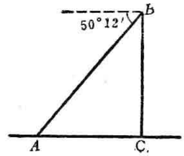
(3) $\dfrac{\mathrm{tg}60° - \mathrm{ctg}60°}{1 + \mathrm{tg}60°\mathrm{ctg}60°}$。

3.在直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$。

(1) $c = 3000$，$\angle A = 36°$，求$\angle B$、a、b；

(2) $a = 51$，$c = 70$，求$\angle A$、$\angle B$、b。

4.一架飞机在距地面 1900 米处,用瞄准器测得地面目标 A 的俯角是 50°12′。求这时飞机与地面目标的水平距离和射击距离。



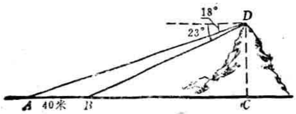
（第 4 题）

5.一个菱形的周长为 50 厘米，一个角是 30°，求它的两条对角线的长及面积。

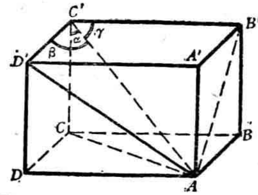
习 题 B

1.从山顶D测得地面上同一方向的两点 A 和 B 的 俯 角 分

别是18°和23°，已知$AB=40$米，求山高CD。



（第1题）



（第2题）

2. 长方体$ABCD—A'B'C'D'$的对角线$C'A$与棱$C'C$、$C'D'$、$C'B'$所夹的角分别是α、β、γ。(如图)求证：

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。

3. A是直角三角形中的一个锐角，

求证：$\sin A+\cos A>1$。

第二章　任意角的三角函数

复习要点

一　角的概念的推广

角可以看作是由平面内一条射线绕着它的端点旋转所形成的图形。射线的起始位置叫做角的始边，终止位置叫做角的终边。射线的端点叫做角的顶点。按逆时针方向旋转所成的角是正角，按顺时针方向旋转所成的角是负角。

所有与角α的始边和终边相同的角(包括α)，可以表示成

$$k\cdot 360^\circ+\alpha,\ (k\text{是整数，}\alpha\text{以度为单位})$$

或者表示成

$2k\pi+\alpha$。(k是整数，α以弧度为单位)

二　任意角的三角函数的定义

设α是任意一个角，以这个角的顶点为原点，角的始边为横坐标轴的正方向，建立平面直角坐标系，如图2—1。在角α的终边上任取一点，设这点的坐标是$P(x,y)$，原点到这点的距离是r（$r=\sqrt{x^2+y^2}$）。

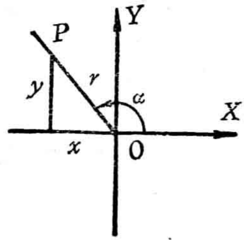


图 2—1

这样，x、y、r组成了六个比，分别记作：

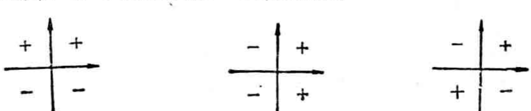
$\sin\alpha=\frac{y}{r}$、　$\cos\alpha=\frac{x}{r}$、

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}$、　$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$、　$\sec\alpha=\frac{r}{x}$、　$\csc\alpha=\frac{r}{y}$。

它们分别叫做角α的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割。角α的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割都是α的函数。这些函数叫做三角函数。

三　三角函数值的符号

根据各象限里点的坐标的符号和三角函数的定义，可知三角函数值的符号可以用图2—2来表示。



sinα和cscα　　cosα和secα　　tgα和ctgα

图 2—2

四　终边在坐标轴上的特殊角的三角函数值

当点$P(x,\ y)$在x轴上时，它的纵坐标$y=0$，横坐标

$x=\pm r$；当点 P 在 y 轴上时，它的横坐标 $x=0$，纵坐标 $y=\pm r$。因此可得：

α	$0°(0)$	$90°(\frac{\pi}{2})$	$180°(\pi)$	$270°(\frac{3\pi}{2})$	$360°(2\pi)$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	不存在	0	不存在	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在	0	不存在	0	不存在

五　用单位圆中线段表示三角函数

以坐标原点为圆心，以单位长为半径的圆，叫做单位圆。三角函数的概念可以和单位圆联系起来考察。设单位圆和 x 轴正方向交于 A 点，和 y 轴正方向交于 B 点，和角 α 终边交于 P 点。从 P 点作 x 轴的垂线 MP，过 A 和 B 分别作单位圆的切线，延长 OP（或反向延长 OP），使它和所作的两条切线分别交于 T 点和 S 点（图 2—3）。

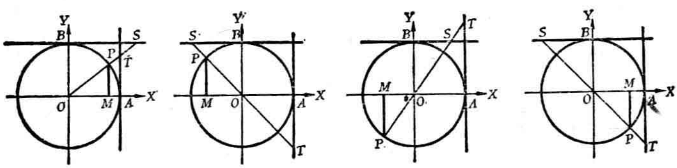


图 2—3

线段 MP、AT 规定向上为正，向下为负；线段 OM、BS 规定向右为正，向左为负。于是有：

$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$，$\operatorname{tg}\alpha=AT$，$\operatorname{ctg}\alpha=BS$。

我们把有向线段 MP、OM、AT、BS 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线和余切线。

六 同角的三角函数间的关系

根据三角函数定义及三角函数线的有关性质，可以证明任意一个角 α 的三角函数之间，都有如下的关系：

倒数关系：$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$，$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$。

商的关系：$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，　$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$，

$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\csc^2\alpha$。

七 余角的三角函数

如果 $A+B=90°$，那么 $B=90°-A$，根据锐角三角函数的定义，可以得到：

$$\sin A=\cos B=\cos(90°-A),$$
$$\cos A=\sin B=\sin(90°-A),$$
$$\operatorname{tg}A=\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}(90°-A),$$
$$\operatorname{ctg}A=\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}(90°-A)。$$

八 负角三角函数与正角的三角函数间的关系

利用单位圆(图2—4)，容易得到：

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，

$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$，

$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$。

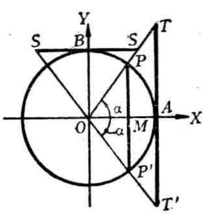


图 2—4

九 $180°\mp\alpha$、$360°-\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系

利用单位圆(图2—5)及同角三角函数间的关系，可以得到：

$\sin(180°\mp\alpha)=\pm\sin\alpha$，$\cos(180°\mp\alpha)=-\cos\alpha$，

$\operatorname{tg}(180°\mp\alpha)=\mp\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}(180°\mp\alpha)=\mp\operatorname{ctg}\alpha$，

$$\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha。$$

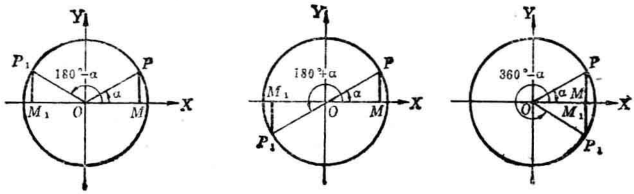


图 2—5

上面的一些公式，可概括成下面的一句话：

$180^\circ\pm\alpha$、$360^\circ-\alpha$ 的三角函数值，等于锐角 α 的同名函数的值放上原来的角所在象限内原来函数的符号。

十　终边相同的角的三角函数

根据任意角的三角函数定义可知：始边、终边完全相同的角的同名三角函数值相同。就是说，对于任意角 α 和任意整数 k，都有：

$$\sin(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha,\qquad \cos(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{ctg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha。$$

十一　化任意角三角函数为锐角三角函数

前面“七”、“八”、“九”、“十”各节中的公式，都叫做诱导公式。有了它们，可以化任意角三角函数为锐角三角函数，一般步骤是：

1. 化负角的三角函数为正角的三角函数；

2. 化大于 360° 的角的三角函数为 0° 到 360° 的角的三角函数；

3. 化 90° 到 360° 的角的三角函数为锐角的三角函数。

注 当诱导公式中的α是任意角时，可以证明诱导公式仍能成立（证明从略）。为了便于记忆，可把α仍然看作锐角，从而确定化得的α的三角函数的值前面应是什么符号。

例 题

例1 利用三角函数线来说明：

(1) 对于任意角α，$|\sin\alpha|\leqslant 1$；

(2) 在函数$\operatorname{tg}\alpha$中，$\alpha\neq k\cdot 180^\circ+90^\circ$（$k$是整数）。

解 (1) 在单位圆（图2—3）中，不论α为何值时，总有

$$|MP|\leqslant|OP|,\quad 即 |\sin\alpha|\leqslant 1。$$

(2) 当角α的终边OP与y轴重合时，OP与从A点所引的单位圆的切线就没有交点，AT也就不存在。所以要使$\operatorname{tg}\alpha$存在，必须有$\alpha\neq k\cdot 180^\circ+90^\circ$（$k$是整数）。

例2 已知$\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$，求$\alpha$的正弦和余弦。

解 因为这里没有说明α在哪一象限，已知正切的值是负的，所以α可能在第二象限或第四象限。

当α在第二象限时，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{-\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$=-\frac{4}{5};$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\quad\operatorname{tg}\alpha=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{5}。$$

当α在第四象限时，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{4}{5};$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{5}。$$

例3 化简：$\sin^2(42^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(25^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(65^\circ-\alpha)$
$+\sin^2(48^\circ-\alpha)$。

分析 在化简三角函数式时，凡能用诱导公式的，一般先用诱导公式化简。本题可利用余角三角函数公式化简，要注意到 $42^\circ+\alpha$ 与 $48^\circ-\alpha$ 的和是 90°，$25^\circ+\alpha$ 与 $65^\circ-\alpha$ 的和也是 90°。

解 原式 $=\sin^2(42^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(25^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(25^\circ+\alpha)$
$+\cos^2(42^\circ+\alpha)=1-1=0$。

例4 化简 $\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$。$\left(\alpha\neq\dfrac{n\pi}{2}\right)$

解 当 α 在第一象限时，

$$\text{原式}=\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1+2=3；$$

当 α 在第二象限时，

$$\text{原式}=\frac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}=-1-2=-3；$$

当 α 在第三象限时，

$$\text{原式}=\frac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=-1+2=1；$$

当 α 在第四象限时，

$$\text{原式}=\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}=1-2=-1。$$

例5 求 $\sin(-960^\circ)$ 的值。

解
$$\begin{aligned}\sin(-960^\circ)&=-\sin960^\circ=-\sin(2\cdot360^\circ+240^\circ)\\&=-\sin240^\circ=-\sin(180^\circ+60^\circ)\\&=-(-\sin60^\circ)=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}。\end{aligned}$$

例6 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=m$，$(-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$，$m\neq\pm1)$，求 $\sec\alpha-\csc\alpha$ 的值。

解 $\sec\alpha-\csc\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$$=\frac{\pm2\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\pm2\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}$$

$$=\frac{\pm2\sqrt{1+1-1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$$

$$=\frac{\pm2\sqrt{2-(1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)}}{m^2-1}$$

$$=\frac{\pm2\sqrt{2-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}}{m^2-1}$$

$$=\pm\frac{2\sqrt{2-m^2}}{m^2-1}。$$

例7 求证 $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\csc\alpha}{1+\sec\alpha}=\mathrm{ctg}^3\alpha$。

分析 （1）一般证法是由繁到简。本题等号左边较繁，右边较简，宜从左边证起。（2）如果等式两边含有 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$、$\csc\alpha$等，一般证法是先保留 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，将其他三角函数化为 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，然后再化简，向求证的目标逐步前进。

证明 $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\csc\alpha}{1+\sec\alpha}=\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\dfrac{1}{\sin\alpha}}{1+\dfrac{1}{\cos\alpha}}$

$$=\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{(1-\sin^2\alpha)\cos\alpha}{(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\mathrm{ctg}^3\alpha。$$

例8 求证 $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}$。

分析 (1) 等号右边较繁，从右边证起。(2) 等号两边只有两个角的正切和余切，可以试探只用正切和余切来证，而不必化为正弦和余弦。(3) 等号左边式子是目标，右边式子里的 $\mathrm{tg}\beta$ 及 $\mathrm{ctg}\alpha$ 在目标里没有，因此试探先把它们化去。

证明 $$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}{\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\beta}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}}=\frac{(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta)\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}$$
$$=\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta。$$

例9 已知 $270^\circ<\alpha<360^\circ$，求证：
$$\sqrt{\frac{\csc^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{1}{(\sec^2\alpha-1)(1-\cos^2\alpha)}}$$
$$=1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}}。$$

分析 (1) 等号两边都较繁，一般是分别从两边证起，设法化简成同一个式子。(2) 要注意使三角函数式开平方的结果是正值，本题已知 α 是第四象限角，这一点不可忽视。

证明 $$\sqrt{\frac{\csc^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{1}{(\sec^2\alpha-1)(1-\cos^2\alpha)}}$$
$$=\sqrt{\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sin\,\alpha}\right)^2}$$
$$=\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\,\alpha}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sin\,\alpha}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sin\,\alpha}=0,$$
$$1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}}=1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$
$$=1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha}=1+\mathrm{tg}\,\alpha(-\mathrm{ctg}\,\alpha)=1-1=0,$$
$\therefore$ 原等式成立。

例10 求证 $\dfrac{\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$

分析一 （1）等式两边繁简相同，可从任意一边（譬如左边）证起。（2）证明时注意向目标（即右边）前进 。右边分母是 $\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$，可试探将左边的分子及分母同乘以 $\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$；右边分子是 $\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha$，再试探将左边的分子及分母同乘以 $\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha$。

证明一

$$\frac{\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}$$

$$=\frac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha)(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)}{(\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)(\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}$$

$$=\frac{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)(\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}$$

$$=\frac{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}。$$

分析二 本题象上面的分析，有时不易想得到，可另作如下的分析：

如果 左边 = 右边，

那么 $(\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)=(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$，

$$\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$1=1。$$

根据以上分析，可得如下的证明。要注意证明的书写格式。

证明二 $\because\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha$，

$\therefore\ \csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha$，

$(\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)(\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$

$=(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$，

$\therefore\ \dfrac{\csc\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$。

例11 已知 $\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha=m$，$\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha=n$，

求证 $\cos\alpha=\dfrac{m-n}{m+n}$。