全国普通高等学校土木工程专业
"卓越工程师教育培养计划"精品教材

弹性力学

Elasticity Mechanics

杨晓明　主编

江苏科学技术出版社

全国普通高等学校土木工程专业“卓越工程师教育培养计划”精品教材

弹性力学

主　　编：杨晓明

副 主 编：张振国　王　丹

编写委员会：（按姓氏音序排列）

白建文　包建业　曹玉生　刁　钰　高爱军
高　娃　郭佳民　郭莹莹　韩　青　郝庆莉
郝贞洪　贺培源　何晓雁　侯永利　李　永
梁恒生　刘炳娟　刘子杰　路　平　时金娜
王　丹　王卓男　吴安利　徐　蓉　杨晓明
张　磊　张淑艳　张振国

江苏科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/杨晓明主编．—南京：江苏科学技术出版社，2013.3

全国普通高等学校土木工程专业“卓越工程师教育培养计划”精品教材

ISBN 978-7-5537-0891-1

Ⅰ.①弹… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①弹性力学—高等学校—教材 Ⅳ.①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 031903 号

全国普通高等学校土木工程专业“卓越工程师教育培养计划”精品教材

弹性力学

主　　编　杨晓明
责任编辑　刘屹立
特约编辑　封秀敏
责任校对　郝慧华
责任监制　刘　钧

出版发行　凤凰出版传媒股份有限公司
　　　　　　江苏科学技术出版社
出版社地址　南京市湖南路 1 号 A 楼，邮编：210009
出版社网址　http://www.pspress.cn
经　　销　凤凰出版传媒股份有限公司
印　　刷　天津泰宇印务有限公司

开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　13
字　　数　308 000
版　　次　2013 年 3 月第 1 版
印　　次　2013 年 3 月第 1 次印刷

标准书号　ISBN 978-7-5537-0891-1
定　　价　26.00 元

内容提要

本书主要介绍了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法。全书内容共7章，包括绪论、平面问题的基本理论、平面问题的直角坐标解答、平面问题的极坐标解答、用差分法和变分法解平面问题、用有限单元法解平面问题及空间问题的基本理论。

本书可作为高等学校土木工程类专业教材，也可作为其他工科专业的少学时教材，还可供工程技术人员参考使用。

前　言

弹性力学的基本理论和处理问题的方法已广泛应用于建筑结构、水工结构、机械设计、宇航航空等许多领域。因此，弹性力学课程长期以来一直是许多工科专业的必修课或选修课。本书可作为高等学校土木工程类专业教材，也可作为其他工科专业的少学时教材，还可供工程技术人员参考使用。主要介绍了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法。

本书在内容安排上既保证了基本理论的系统完整性，又注意了理论联系实际，特别是土木工程“卓越工程师教育培养计划”的实际应用。全书内容共 7 章，包括绪论、平面问题的基本理论、平面问题的直角坐标解答、平面问题的极坐标解答、用差分法和变分法解平面问题、用有限单元法解平面问题及空间问题的基本理论。作为许多工科专业的必修课或选修课，可以不讲授变分法及空间问题，其余章节只需 30 至 35 学时。为使学生加深对弹性力学基本概念、基本理论的理解和弹性力学基本方法的掌握，各章给出了“内容提要”，编入了较多的例题，“习题与思考”附有“习题答案”，以方便学生和教师使用。

本书由杨晓明担任主编，张振国和王丹担任副主编。绪论由内蒙古工业大学杨晓明与内蒙古工业大学张振国编写，第 1 章、第 3 章、第 5 章和第 6 章由张振国和王丹编写，第 2 章和第 4 章由杨晓明编写，全书由杨晓明修改定稿。

本书根据编者近年来的教学经验和总结，参考现行有关教材编写而成。在此对这些教材的编者表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正。

编者
2013 年 2 月

目　　录

0 绪　论

内容提要

掌握：弹性力学的研究方法。

熟悉：弹性力学中的基本未知量、基本假设。

了解：弹性力学的研究对象和研究内容。

0.1 弹性力学的内容

弹性体力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分支，主要研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

对工科各专业来说，弹性力学的任务和材料力学、结构力学的任务一样，都是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度和刚度，并寻求或改进它们的计算方法，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是杆件系统，例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构，如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步地、较精确地分析，也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，但研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假设，这就大大简化了数学推演，但是，得出的解答往往只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假设，因而得出的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲，就引用了平面截面的假设，得出的结果是：横截面上的正应力(弯曲应力)按直线分布。在弹性力学里研究同一问题，就不必引用平面截面的假设。相反地，还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假设是否正确。并且由此判明：如果梁的深度不远小于梁的跨度，而是同等大小的，那么横截面上的正应力不按直线分布，而是按曲线变化，并且，材料力学里给出的最大正应力将具有很大的误差。

又例如，在材料力学里计算有孔的拉伸构件，通常假设拉应力在净截面上均匀分布。弹性力学里的计算结果表明：净截面上的拉应力不是均匀分布，而是在孔的附近发生高度

的应力集中,孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出几倍。

虽然在弹性力学里通常不研究杆件系统,但有不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用,使这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后,大大扩展了它的应用范围,使得某些比较复杂的、本来无法求解的问题,得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性,但应用在工程上,通常却足够精确。在 20 世纪 50 年代中叶发展起来的有限单元法中,把连续弹性体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解,更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外,对同一结构的各个构件,甚至对同一构件的不同部分,分别用弹性力学、结构力学或材料力学进行计算,常常可以节省很多工作量,仍然能得到令人满意的结果。

总之,材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的,更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工,而应当更多地发挥它们综合应用的优越性,才能使它们更好地为我国的经济建设服务。

0.2 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。这些概念,虽然在材料力学和结构力学里都已经讲过,但在这里仍有必要详细说明。

0.2.1 外力

作用于物体上的外力可以分为体积力和表面力,两者分别简称为体力和面力。

所谓体力,是分布在物体体积内的力,如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况,一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向,在这一点取物体的一小部分,包含 P 点,体积为 ΔV,如图 0-1(a) 所示。设作用于 ΔV 的体力为 ΔF,则体力的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$。如果把所取的那一小部分物体不断减小,即 ΔV 不断减小,则 ΔF 和 $\Delta F/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在,令 ΔV 无限减小而趋于 P 点,假设体力为连续分布,则 $\Delta F/\Delta V$ 将趋于一定的极限 $\bar{f}$,即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = \bar{f} \tag{0-1}$$

这个极限矢量 $\bar{f}$ 就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量,所以 f 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 $\bar{f}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 $\bar{f}_x$、$\bar{f}_y$、$\bar{f}_z$ 称为该物体在 P 点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负,它们的量纲是 $\mathrm{L}^{-2}\mathrm{MT}^{-2}$ 。

所谓面力,是分布在物体表面上的力,例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况一般也是不相同的。为了表明该物体在表面上某一点 P 所受面力的大小与方向,在这一点取该物体表面的一小部分,包含 P 点,面积为 ΔS,如图 0-1(b)所示。设作用于 ΔS 的面力为 ΔF,则面力的平均集度为 $\Delta F/\Delta S$ 。与 ΔV 相似,令 ΔS 无限减小而趋于 P 点,假设面力为连续分布,则 $\Delta F/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\bar{f}$,即

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \bar{f} \tag{0-2}$$

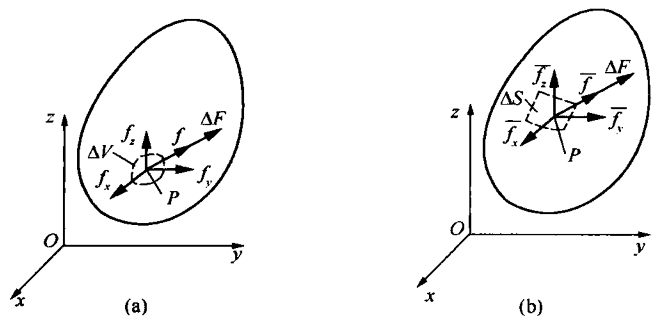

图 0-1　体力和面力

(a)体力;(b)面力

这个极限矢量 $\overline{f}$ 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是标量,所以 $\overline{f}$ 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 $\overline{f}$ 在坐标轴 x 、y 、z 上的投影 $\overline{f}_x$ 、$\overline{f}_y$、$\overline{f}_z$ 称为该物体在 P 点的面力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的量纲是 $\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$。

0.2.2　应力

物体受外力以后,其内部将产生内力,即物体本身不同部分之间相互作用的力;为了研究物体在其某一点 P 处的内力,假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为Ⅰ和Ⅱ两部分,将Ⅱ部分移走,如图 0-2 所示,移走的部分Ⅱ将在截面 mn 上对留下的部分Ⅰ作用一定的内力,取这一截面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔF, 则内力的平均集度,即平均应力为 $\dfrac{\Delta F}{\Delta A}$ 。现在,令 ΔA 无限减小而趋于 P 点,假设内力连续分布,则 $\dfrac{\Delta F}{\Delta A}$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{p}$, 即

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \boldsymbol{p} \tag{0-3}$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{p}$ 就是物体在截面 mn 上的 P 点的应力。因为 ΔA 是标量,所以应力 $\boldsymbol{p}$ 的方向就是 ΔF 的极限方向。

对于应力,除了在推导某些公式的过程中以外,通常都不用它沿坐标轴方向的分量,因为这些分量与物体的变形或材料强度都没有直接的关系。与物体的变形或材料强度直接相关的,是应力在其作用截面的法线方向及切线方向的分量,也就是正应力 σ 及切应力 τ, 如图 0-2 所示。应力及其分量的量纲是 $\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$。

显然可见,物体内的同一点 P, 在不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态,即各个截面上应力的大小和方向,在这一点从物体内取出一个微小的正平行六面体,它的棱边分别平行于三个坐标轴,长度为 $\overline{PA} = \Delta x$, $\overline{PB} = \Delta y$, $\overline{PC} = \Delta z$, 如图0-3所示。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力,分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向,加上一个下标字母。例如,正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上,同时也是沿着 x 轴的方向作用的。切应力用 τ 表示,并加上两个下标字母,前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴,后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如,切应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

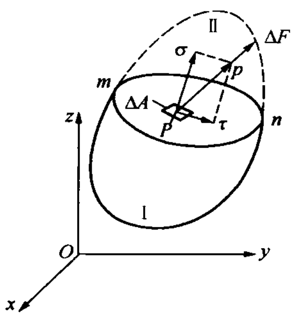

图 0-2 应力的定义

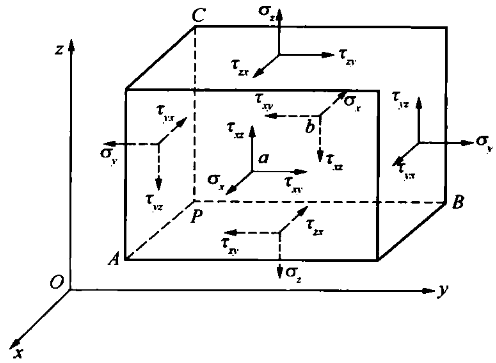

图 0-3 应力单元体

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力全都是正的。注意，虽然有上述正负号规定，但正应力和材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），而切应力和材料力学中的规定不完全相同。

6 个切应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2}=0 \tag{0-4}$$

同样可以列出其余两个相似的方程，简化以后，得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}\quad \tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{0-5}$$

这就证明了切应力互等定理：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，切应力记号的两个下标字母可以对调。

注意在上述证明中，我们没有考虑应力由于位置不同而有的变化，也就是把六面体中的应力当作均匀应力，而且也没有考虑体力的作用。可见，即使以后考虑到应力的变化和体力的作用，仍然可以推导出切应力的互等性。

附带指出，如果采用材料力学中的正负号规定，则切应力的互等性将表示为 $\tau_{yz}=-\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=-\tau_{xz}$，$\tau_{xy}=-\tau_{yx}$，显然不如采用上述规定简单。但也应当指出，在利用莫尔圆（应力圆）时，必须遵守材料力学中的规定。

可以证明，在物体的任意一点，如果已知 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和切应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

0.2.3 应变

应变，就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x、y、z 的正方向取三个微小的线段 PA、PB、PC（图 0-3）。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为线应变，亦称正应变；各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为切应变。线应变用字母 ε 表示，ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的线应变，其余类推。线应变以伸长为正，缩短为负，与正应力的正负号规定相适应。切应变用字母 γ 表示，γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段（即 PB 与 PC）之间的直角的改变，其余类推。切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。线应变和切应变都是量纲为一的量。

可以证明，在物体的任意一点，如果已知 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy} 这六个应变，就可以求得经过该点的任一线段的线应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变称为该点的形变分量，可以完全确定该点的形变状态。

0.2.4 位移

位移，就是位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 x、y、z 三轴上的投影 u、v、w 来表示，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。

这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的量纲是 L。

一般而言，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量都是随着该点的位置而改变的，因而都是位置坐标的函数。

0.3 弹性力学中的基本假设

在弹性力学的问题里，通常是已知物体的形状和大小（即已知物体的边界）、物体的弹性常数、物体所受的体力、物体边界上的约束情况或面力，求解应力分量、形变分量和位移分量等。

如何由这些已知量求出未知量，弹性力学的研究方法是：在弹性体区域内部，考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，分别建立三套方程。即根据微分体的平衡条件，建立平衡微分方程；根据微分线段上形变与位移之间的几何关系，建立几何方程；根据应力与形变之间的物理关系，建立物理方程。此外，在弹性体的边界上，还要建立边界条件。在给定面力的边界上，根据边界上的微分体的平衡条件，建立应力边界条件；在给定约束的边界上，根据边界上的约束条件，建立位移边界条件。求解弹性力学问题，即在边界条件下根据平衡微分方程、几何方程、物理方程求解应力分量、形变分量和位移分量。

在导出方程时，如果精确考虑所有各方面的因素，则导出的方程将非常复杂，实际上不可能求解。因此，通常按照所研究的物体的性质，以及求解问题的范围，作出若干基本假设，略去一些影响很小的次要因素，使得方程的求解成为可能。本教材中对物体的材料性质采用了 5 个基本假设，即弹性力学的基本假设。

0.3.1 连续性假设

假设物体是连续的，即假设整个物体的体积都被组成这个物体的介质填满，不留下任

何空隙。这样，物体内的一些物理量，例如应力、形变、位移等等，才可能是连续变化的，因而才可能用坐标的连续函数来表示，并可用微积分的方法来分析各物理量的变化情况。同时，只有物体是连续的，才可以在弹性体内任意位置取出微小的单元体。实际上，一切物体都是微粒组成的，严格来说，都不符合上述假设。但是，只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小很多，就可以不考虑物体内分子的构造，可将物体看成是连续性的，不会引起显著的误差。

0.3.2 完全弹性假设

假设物体是完全弹性的。弹性，指的是“物体在引起形变的外力被除去以后能恢复原形”这一性质。完全弹性，指的是物体能完全恢复原形而没有任何剩余形变。这样的物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关。

在一般弹性力学中，假设物体是完全弹性的，还包含假设物体服从胡克定律——应变与引起该应变的应力成正比；反映这种比例关系的常数（即弹性常数），并不随应力或应变的大小和符号而变。这样假设的优点是可使求解方程线性化。当然，完全弹性的材料是不存在的。不过由试验可知，对于工程上的大多数材料，当应力不超过某一限值时，这个假设与实际情况基本相符。由材料力学可知：塑性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，也是近似的完全弹性体；脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，也是近似的完全弹性体。

0.3.3 均匀性假设

假设物体是均匀的，即整个物体是由同一材料组成的。因此，物体内部各处的物理性质是相同的，即整个物体所有部分具有相同的弹性，物体的弹性不随位置坐标而变，这样可以取出物体的任意微小部分来进行分析，然后把分析的结果应用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上材料组成的，例如混凝土，那么，也只要每一种材料的颗粒远远小于物体的尺寸，而且在物体内均匀分布，这个物体就可以当作是均匀的。对于明显的非均匀体的问题，例如隧洞衬砌、基础梁板等问题，可以把它作为接触问题来处理。

应当指出的是，均匀性和连续性是两个不同的概念。例如，把两块不同材料的金属板焊接在一起，便成为一块连续而不均匀的板。

0.3.4 各向同性假设

假设物体是各向同性的，即物体的弹性在所有方向都相同。这样，物体的弹性常数才不随方向而变。由钢材做成的构件，虽然它含有各向异性的晶体，但由于晶体很微小，而且是随机排列的，所以按其材料的平均性质，钢材构件的弹性（包含无数个微小晶体随机排列时的统观弹性），可以认为是各向同性的。显然，由木材和竹材做成的构件都不能当作各向同性体，属于正交各向异性材料。

应当指出的是，均匀性与各向同性是有区别的，前者是指物体内各点的力学性质相同，而后者是指物体内某一点沿各个不同方向的力学性质相同。

凡是符合以上四个假设的物体，就称为理想弹性体。

此外，还对物体的变形状态作如下的小变形假设。

0.3.5 小变形假设

假设位移和形变是微小的。即假设物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，而且应变和转角都远小于1。这样，在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以方便地用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著的误差；并且，在考察物体的形变与位移的关系时，转角和应变的二次幂和更高次幂或乘积相对于其本身都可以略去不计。例如，对于微小的转角 α，有 $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \cdots \approx 1$，$\sin\alpha = \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \cdots \approx \alpha$，$\tan\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \cdots \approx \alpha$；对于微小的正应变 ε_x，有 $\frac{1}{1+\varepsilon_x} = 1 - \varepsilon_x + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_x^3 + \cdots \approx 1 - \varepsilon_x$，这样，弹性力学里的几何方程和平衡微分方程都简化为线性方程。

另外，弹性力学中一般假设物体内部无初应力。即认为物体处于自然状态，在载荷或温度变化等作用之前，物体内部没有应力。若物体中有初应力存在，则弹性力学所求得的应力，再加上初应力才是物体中的实际应力。

上述基本假设中，小变形假设属于几何假设，而其他假设则属于物理假设。在上述基本假设下，弹性力学问题都化为线性问题，从而可以应用叠加原理。以上述基本假设为基础而进行分析的问题，称为理想弹性体的线性问题。本教程中所讨论的问题，都是理想弹性体的线性问题。

习题与思考

0-1 试举例说明，什么是均匀的各向异性体？什么是非均匀的各向同性体？什么是非均匀的各向异性体？

0-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

0-3 五个基本假设在建立弹性力学基本方程时有什么用途？

0-4 应力和面力的符号规定有什么区别？试分别画出正面和负面上的正的应力和正的面力的方向。

0-5 试比较弹性力学和材料力学中关于切应力的符号规定。

0-6 试举例说明正的应力对应于正的形变。

0-7 试画出图0-4中的矩形薄板的正的体力、面力和应力的方向。

0-8 试画出图0-5中的三角形薄板的正的面力和体力的方向。

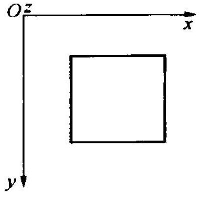

图 0-4 【习题与思考】0-7 图

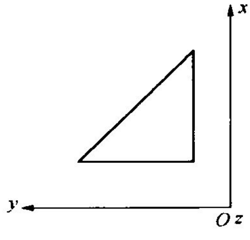

图 0-5 【习题与思考】0-8 图

1　平面问题的基本理论

内容提要

掌握：边界条件、圣维南原理及其应用、应力法、位移法。

熟悉：平面问题的平衡微分方程、几何方程、物理方程、相容方程。

了解：平面应力问题、平面应变问题。

1.1　平面应力问题与平面应变问题

任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系。因此，严格说来，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是，如果所考察的弹性体具有某种特殊的形状，并且承受的是某些特殊的外力和约束，就可以把空间问题简化为近似的平面问题。这样处理，使一部分未知量不存在或者不独立，求解问题的基本未知量将大为减少，而所得的结果却仍然可以满足工程上对精确度的要求。平面问题一般分为两类，一类是平面应力问题，另一类是平面应变问题。

1.1.1　平面应力问题

第一类平面问题是平面应力问题。设有很薄的等厚度薄板，长和宽的尺寸远大于厚度，如图 1-1 所示，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力或约束。同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化。例如图中所示的深梁，以及平板坝的平板支墩，就属于此类问题。

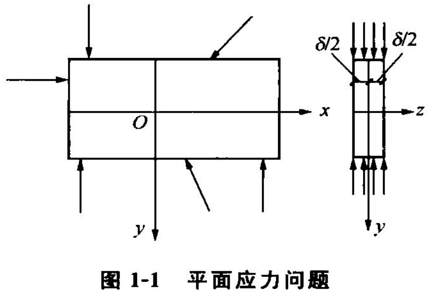

图 1-1　平面应力问题

设薄板的厚度为 δ。薄板的中面为 xy 面，以垂直于中面的任一直线为 z 轴。因为板面上不受力，所以在 $z=\pm\dfrac{\delta}{2}$ 面上有

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0,\ (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0,\ (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0$$

由于板很薄，外力又不沿厚度变化，应力沿着板的厚度又是连续分布的，因此，可以认为在整个薄板的所有各点都有

$$\sigma_z=0,\ \tau_{zx}=0,\ \tau_{zy}=0$$

注意到切应力的互等性，又可得出 $\tau_{xz}=0$，$\tau_{yz}=0$ 。这样，只剩下平行于 xy 面的三个平面应力分量，即 σ_x、σ_y、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，这种问题称为平面应力问题。同时，也因为板很薄，作用于板上的外力和约束都不沿厚度变化，这三个应力分量以及相应的形变分量，都可以认为是不沿厚度变化的。这就是说，它们只是 x 和 y 的函数，不随 z 而变化。

依据胡克定律，可以得出应变分量：$\gamma_{zx}=0$ 和 $\gamma_{yz}=0$，而 ε_x、ε_y、γ_{xy} 不为零，另外还有 $\varepsilon_z=-\dfrac{\mu}{(1-\mu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\neq 0$（显然 ε_z 不是独立的未知量）。所以平面应力问题只在平面内有应力分量，但沿三个坐标轴方向均有应变。

1.1.2 平面应变问题

第二类平面问题是平面应变问题。设有很长的柱形体，即沿长度方向的尺寸远大于宽和高方向的尺寸，并且它的横截面形状和尺寸不沿长度变化，如图 1-2 所示。在柱面上受平行于横截面且不沿长度变化的面力或约束，同时，体力也平行于横截面且不沿长度变化。

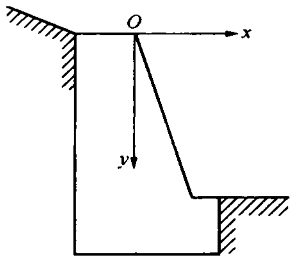

图 1-2 平面应变问题

假想该柱形体为无限长，以任一横截面为 xy 面，任一纵线为 z 轴，如图 1-2 所示。由于内在因素和外来作用都不沿长度变化，所以一切应力分量、形变分量和位移分量都不沿 z 方向变化，而只是 x 和 y 的函数。此外，在这种情况下，由于对称（任一横截面都可以看作是对称面），所有各点都只会沿 x 和 y 方向移动，即只有 u 和 v，而不会有 z 方向的位移，也就是 $w=0$ 。因为所有各点的位移矢量都平行于 xy 面，所以这种问题称为平面位移问题。

由对称条件可知，$\tau_{zx}=0$，$\tau_{zy}=0$ 。根据切应力的互等性，可以断定 $\tau_{xz}=0$，$\tau_{yz}=0$。由胡克定律可知，相应的切应变 $\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$ 。又由于 z 方向的位移 w 处处均为零，有 $\varepsilon_z=0$ 。因此，只剩下平行于 xy 面的三个形变分量，即 ε_x、ε_y、γ_{xy}，这种问题在习惯上称为平面应变问题。由于 z 方向的伸缩被阻止，所以 σ_z 一般并不等于零，由物理方程可得 $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$（$\sigma_z$ 不是独立未知量）。

工程中的实际问题，例如挡土墙和很长的管道、隧洞问题等等，是很接近于平面应变

问题的。虽然这些结构不是无限长的，而且在两端面上的条件也与中间截面的条件不同，并不符合无限长柱形体的条件，但是实践证明，对于离开两端较远处，按平面应变问题进行分析计算，得出的结果是工程上可用的。

综上所述，无论是平面应力问题，还是平面应变问题，它们所具有的独立未知量是相同的，都是 3 个应力分量（σ_x、σ_y、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$）、3 个应变分量（ϵ_x、ϵ_y、$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$）、2 个位移分量（u、v），并且都是 x 和 y 的函数，与 z 无关。

【例 1-1】 图 1-3 所示的几种受力体是否为平面问题？若是，请判断是平面应力问题，还是平面应变问题？

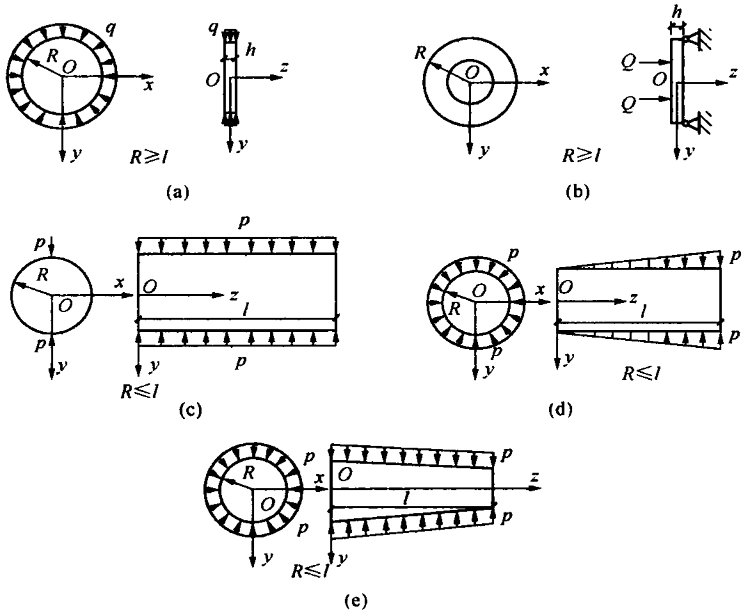

图 1-3 【例 1-1】图

【解】图(a)所示为平面应力问题。图(b)所示荷载垂直作用于面板，故为薄板弯曲问题。图(c)所示荷载作用于板边，荷载及横截面沿 z 轴无变化，且 $R \leqslant l$，故为平面应变问题。图(d)所示物体虽 $R \leqslant l$，但荷载沿 z 轴有变化，因此，各截面上应力各不相同，只能当作空间问题处理。图(e)所示荷载沿 z 轴无变化，且 $R \leqslant l$，但横截面沿 z 轴有变化，故只能按空间问题计算。

1.2 平衡微分方程

1.2.1 平衡微分方程的建立

前已指出，在弹性力学里分析问题，要考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，分别建立三套方程。我们首先考虑平面问题的静力学方程。在弹性体内任一点取出一个微元体，根据平衡条件来导出应力分量与体力分量之间的关系式，也就是平面问题的平衡微分