带有临界指数的二阶椭圆型方程

韩丕功　刘朝霞　著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了带有临界指数的二阶椭圆型方程的基本理论和基本方法. 这类方程主要来源于物理学、几何学以及泛函分析理论的研究中. 研究内容主要包括极小能量正解、变号解、无穷多解以及渐近行为等；所用方法主要是大范围变分法中的山路定理和环绕定理. 本书的特点是循序渐进，强调基础理论的同时，注意具体应用. 书中内容深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题.

本书可作为偏微分方程、动力系统、泛函分析及相关理工科方向研究生的教材和教学参考书，亦可作为本专业的教师和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

带有临界指数的二阶椭圆型方程/韩丕功，刘朝霞著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-034770-1

I. ①带… II. ①韩… ②刘… III. ①二阶-椭圆型方程 IV. ①O175.25

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 123238 号

责任编辑：李 欣 赵彦超／责任校对：张怡君
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 6 月第一次印刷 印张：9 1/2
字数：179 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

研究微分方程边值问题的弱解可以化成研究相应泛函的临界点; 线性方程边值问题所对应的泛函是有下界的, 它的弱解对应泛函的临界点, 可以求泛函的极小值而得出, 这就是古典变分法; 例如: 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界区域, $f \in L^2(\Omega)$. Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中的弱解对应泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fu dx$$

的临界点, 且利用 ε-Young 不等式可知: 泛函 I 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有下界的.

然而物理、几何以及分析中提出的变分问题, 一般不仅要研究泛函的极值点, 而且还要研究其临界点, 即其变分为零的点. 对非线性微分方程边值问题, 它所对应的泛函可能既没有上界也没有下界. 例如: 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界区域. 在 $H_0^1(\Omega)$ 中考虑下述椭圆问题

$$-\Delta u = u^2.$$

其对应的变分泛函是

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{3}\int_\Omega u^3 dx.$$

任意取函数 $u \in H_0^1(\Omega)$, 满足 $u \neq 0$, $u \geqslant 0$ 在 Ω 中. 因为对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 都有 $tu \in H_0^1(\Omega)$. 从而当 $t \longrightarrow \pm\infty$ 时, 成立

$$J(u) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{t^3}{3}\int_\Omega u^3 dx \longrightarrow \pm\infty.$$

即: 泛函 J 在 $H_0^1(\Omega)$ 中既无上界也无下界. 因此, 一般来讲, 对非线性微分方程边值问题的研究, 不能用古典变分方法 (求泛函极值) 来判定相应泛函的临界点, 而是需要全新的理论和方法来研究相应泛函的临界点, 即: 临界点存在的极小极大原理

(或称大范围变分法). 极小极大原理不仅给出泛函的临界点, 而且对相应的临界值作了估计, 从而成为研究非线性微分方程边值问题解的重要技巧.

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界区域, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中讨论次临界增长的半线性椭圆方程时, 由于对任意的 $1 \leqslant s < \frac{2N}{N-2}$ $(N \geqslant 3)$, Sobolev 嵌入: $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ 都是紧的, 其对应的变分泛函满足 Palais-Smale 条件, 利用极小极大原理就可以得出临界点存在的结论. 但对于临界增长的半线性椭圆方程的 Dirichlet 问题时, 由于 Sobolev 嵌入: $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)(N \geqslant 3)$ 是非紧的, 其对应的变分泛函不满足 Palais-Smale 条件. 利用没有 Palais-Smale 条件的山路定理 (或极小极大原理) 只能得出临界序列的存在, 为了证明临界序列的收敛性, 需要新的工具和技巧.

本书特别强调可读性, 强调直观对理解问题实质的重要作用. 我们尽可能用通俗易懂的语言和方法来给出系统严谨的论述和证明. 本书共分 6 章, 对具有临界增长的半线性椭圆方程作简单的介绍, 它也是读者进入一个新的理论领域的起点.

第 1 章介绍一些基本的不等式、Sobolev 空间的基础知识和临界点理论中的一些基本定理, 作为本书后几章研究问题的基本工具.

第 2 章主要考虑临界增长的半线性椭圆问题, 给出了极小能量正解的存在性, 即: 定理 2.1.1, 2.1.2; Palais-Smale 序列的全局表示, 即: 定理 2.3.2; 变号解的存在性, 即: 定理 2.4.1; 无穷多解的存在性, 即: 定理 2.5.1; 并在 2.6 节研究了第二边值问题的存在性.

第 3 章主要介绍两类几乎临界增长的椭圆方程正解的渐近行为, 并且给出了爆破速率和爆破点的位置, 即: 定理 3.1.1, 3.1.2.

第 4 章研究了一类典型的带临界 Sobolev 指数和强奇异项的半线性椭圆方程的第一边值问题, 建立了非平凡解的存在性, 即: 定理 4.2.6, 解决了 A. Ferrero 和 F. Gazzola 提出的一个公开问题.

第 5 章考虑一类典型的具有临界增长的 Hamilton 型椭圆方程组, 利用对偶变分泛函和山路定理, 证明了非平凡解的存在性, 即: 定理 5.1.1.

第 6 章研究具有临界增长的位势型椭圆方程组, 证明了 Brezis-Nirenberg 型的结果, 即: 定理 6.1.1, 6.1.2; 同时, 还给出了一些非存在性结果, 即: 定理 6.2.1, 6.2.2.

本书包含了作者的研究工作. 例如第 4 章的主要结果: 解决了意大利数学家 A. Ferrero 和 F. Gazzola 提出的一个公开问题和建立椭圆方程解的奇性阶数估计. 这是该领域中一个非常重要的结果, 证明过程中包含了新的思想和方法, 例如 Moser

迭代和特征函数的巧妙运用. 我们相信, 这是迄今为止对该类方程作的一个非常基础的工作和贡献.

本书作为具有临界增长的现代椭圆方程理论的入门书, 适宜作为数学及相关专业人员的阅读材料和研究生学习的教材, 也可作为高年级研究生和青年教师进行深入研究的参考书. 本书在写作过程中, 参阅了国内外同一主题的许多论文和一些著作, 简化了很多证明, 发现并纠正了一些错误, 相信这些对读者有所帮助.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (No.11071239, No.11101450) 的资助, 感谢国家自然科学基金连续多年对我们研究工作的资助. 在编写讲义和成书的过程中, 中国科学院数学与系统科学研究院和中央民族大学的很多同行和广大研究生, 都提出了许多宝贵的意见, 在此一并致谢. 由于作者学识水平所限, 书中难免有错误和不足之处, 欢迎读者予以批评指正.

作 者

2012 年 3 月

符　号　表

$\mathbb{R}$	实数集合
$\mathbb{N}$	自然数集合
$\triangleq$	表示定义
$x \in \mathbb{R}^N$	x 属于 N 维欧氏空间
x_i	向量 x 的第 i 个分量
n_i	单位外法向量 n 的第 i 个分量
X^*	表示 Banach 空间 X 的拓扑共轭空间
$C_0^\infty(\Omega)$	在 Ω 内具有紧支集的实值或复值的 C^∞ 函数空间
$L^p(\Omega)$	在 Ω 上可测并且 $\|u\|^p$ 可积的函数空间
$L^\infty(\Omega)$	在 Ω 上可测并且几乎处处有界的函数空间
$\\|\cdot\\|_{L^p(\Omega)}$ $(\\|\cdot\\|_p, \|\cdot\|_p)$	表示 $L^p(\Omega)$ 空间范数：$\left(\int_\Omega \|u\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$，$1 \leqslant p < \infty$
$\\|\cdot\\|_{L^\infty(\Omega)}$ $(\\|\cdot\\|_\infty, \|\cdot\|_\infty)$	表示 $L^\infty(\Omega)$ 空间范数：$\inf\{C > 0 \mid \|u(x)\| \leqslant C$ 几乎处处成立$\}$
$X \hookrightarrow Y$	Banach 空间 X 连续嵌入到 Banach 空间 Y
S_0	Sobolev 最佳嵌入常数
∂^α	表示导数 $\dfrac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_N}^{\alpha_N}}$，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$，$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$
$W^{m,p}(\Omega)$	表示函数空间 $\{f \in L^p(\Omega),\ \partial^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \|\alpha\| \leqslant m\}$， $\\|u\\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{\|\alpha\| \leqslant m} \\|\partial^\alpha u\\|_{L^p(\Omega)}$，$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	表示函数空间 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\\|\cdot\\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ 下的完备化， $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$
$\rightharpoonup$	表示弱收敛
$\to$	表示强收敛或几乎处处收敛

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

作为全书的预备知识, 本章主要介绍一些 Sobolev 空间的基本理论和临界点理论中的一些常用定理. 为了紧缩篇幅, 这些结果都没有给出证明, 但将指出有详细证明的参考文献. 我们假定读者了解实变函数理论和泛函分析的基本知识. 某些需要用到的结果将在各章适当的地方加以介绍.

1.1　常用不等式和 Sobolev 空间理论

本节介绍偏微分方程理论中一些常用的不等式, Sobolev 空间的基本知识和临界点理论中的一些常用结果.

1.1.1　几个常用不等式

ε-Young 不等式　设 $\varepsilon > 0, p > 1, q > 1$, 且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 成立

$$|a||b| \leqslant \frac{\varepsilon|a|^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}|b|^q}{q} \leqslant \varepsilon|a|^p + \varepsilon^{-\frac{q}{p}}|b|^q.$$

特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 称为 Cauchy 不等式.

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ 为一可测集.

Hölder 不等式　设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, 且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 对任意 $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$, 成立

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 称为 Schwarz 不等式.

Minkowski 不等式　设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 对任意 $f, g \in L^p(\Omega)$, 成立

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Young 不等式　设 $Tf(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K(x, y)f(y)dy$. 假定

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |K(x, y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}, \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |K(x, y)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_0,$$

其中 $r \geqslant 1$ 满足 $1+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. 则成立

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_0\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 设

$$r>1,\ 1<p<q<\infty, \quad 1+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}.$$

则成立

$$\|I_r f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_{p,q}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

其中 $I_r f(x)=\int_{\mathbb{R}^N}|x-y|^{-\frac{N}{r}}f(y)dy$.

Gagliardo-Nirenberg 不等式 设 $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$. 两整数 j,m 满足 $0 \leqslant j < m$. 假定

$$\frac{1}{p}=\frac{j}{N}+a\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{N}\right)+\frac{1-a}{q},$$

其中 $a \in \left[\frac{j}{m},1\right]$ (如果 $r>1$ 且 $m-j-\frac{N}{r}=0$, 取 $a<1$). 存在 $C=C(N,m,j,a,q,r)$, 使得对任意 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 成立

$$\sum_{|\alpha|=j}\|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\Big(\sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\Big)^a\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{1-a}.$$

1.1.2 Sobolev 空间理论

本节中的 Sobolev 空间定义、性质和有关理论, 大部分来自于文献 [1].

弱导数的定义 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一开集, $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$. 如果存在 $g_i \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$, 使得

$$\int_\Omega g_i\varphi dx=-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 g_i 为 u 关于 x_i 的弱导数, 记为 $\frac{\partial u}{\partial x_i}=g_i$, 有时也记为 $D_i u=g_i$ 或者 $\partial_i u=g_i$. 如果对所有的 $1 \leqslant i \leqslant N$, u 关于 x_i 的弱导数 g_i 都存在, 则称 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_N)$ 为 u 的弱梯度, 记为 $\nabla u=g$, 有时也记为 $Du=g$ 或者 $\partial u=g$. 这时也称函数 u 是弱可微的. 类似地, 可引进 k 阶弱导数和 k 阶弱可微.

Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一开集, k 为非负整数, $p \geqslant 1$. 称集合

$$\{D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,|\,|\alpha| \leqslant k\}$$

赋以范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

后得到的线性赋范空间称为 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$.

不难验证, $W^{k,p}(\Omega)$ 在上述范数意义下是一个 Banach 空间. 当 $p=2$ 时, 常将 $W^{k,p}(\Omega)$ 记作 $H^k(\Omega)$.

Sobolev 空间 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包.

边界 $\partial\Omega$ 光滑性的定义 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个区域, 称边界 $\partial\Omega$ 具有 C^k 光滑性, 记为 $\partial\Omega\in C^k$, 如果对任意的 $x^0\in\partial\Omega$, 存在 x^0 的一个邻域 U 和一个属于 C^k 的可逆映射 $\psi: U\longrightarrow B_1(0)$, 使得

$$\psi(U\cap\Omega)=B_1^+(0)=\{y\in B_1(0);\, y_N>0\};\quad \psi(U\cap\partial\Omega)=\partial B_1^+(0)\cap\{y\in\mathbb{R}^N;\, y_N=0\}.$$

Sobolev 空间的一些性质

性质 1 $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)=W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N)$; $W^{0,p}(\Omega)=W_0^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$; 如果 Ω 不是全空间 $\mathbb{R}^N$, 则 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 的一个真子空间.

性质 2 $C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中是稠密的.

性质 3 $W^{k,p}(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ 中一集合为弱列紧 (即从其中任一序列内都能抽出弱收敛的子序列) 的充要条件是: 范数有界.

如果存在有限锥 V, 使得每一点 $x\in\Omega$ 是包含于 Ω 内且全等于 V 的有限锥 V_x 的顶点. 则称区域 Ω 具有锥性质.

性质 4(内插不等式) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是具有锥性质的有界区域. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在只依赖于 p,k,ε,Ω 的常数 $C(\varepsilon)$, 使得对任何 $u\in W^{k,p}(\Omega)$ $(1\leqslant p<\infty)$, 成立

$$\sum_{|\beta|\leqslant k-1}\int_\Omega|D^\beta u|^p dx\leqslant\varepsilon\sum_{|\beta|=k}\int_\Omega|D^\beta u|^p dx+C\int_\Omega|u|^p dx.$$

如果 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是具有一致锥性质的区域 (定义比较复杂, 详见文献 [1] 中的第四章第一节), 性质 4 中内插不等式结论仍然成立. 说明, 此时 Ω 的有界性假设可以去掉.

性质 4 中内插不等式揭示了这样一个重要的事实: $W^{k,p}(\Omega)$ 中元素的中间导数的 L^p 范数可通过它本身及其最高阶导数的 L^p 范数估计出.

性质 5 (Sobolev 嵌入定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的区域 (可以无界). $1\leqslant p<\infty$.

(i) 若 Ω 满足锥性质. 当 $p=N$ 时, 对任意 $p\leqslant q<\infty$, 成立

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

且对任意 $u\in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C(N,q,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

当 $p<N$ 时, 对任意 $p\leqslant q\leqslant p^*=\dfrac{Np}{N-p}$, 成立

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega).$$

且对任意 $u\in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C(N,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(ii) 若 $\partial\Omega$ 适当光滑, 当 $p>N$ 时, 对任意 $0<\alpha\leqslant 1-\dfrac{N}{p}$, 成立

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

且对任意 $u\in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{C^\alpha(\Omega)}\leqslant C(N,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

这里 $\|u\|_{C^\alpha(\Omega)}=\|u\|_{0,\Omega}+[u]_{\alpha,\Omega}$, $\|u\|_{0,\Omega}=\sup\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$, $[u]_{\alpha,\Omega}=\sup\limits_{x,y\in\Omega,x\neq y}\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

上述嵌入定理可简记为

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases} L^q(\Omega), & p\leqslant q\leqslant p^*=\dfrac{Np}{N-p}, \quad p<N,\\ L^q(\Omega), & p\leqslant q<\infty, \quad p=N,\\ C^\alpha(\overline{\Omega}), & 0<\alpha\leqslant 1-\dfrac{N}{p}, \quad p>N.\end{cases}$$

更一般的嵌入定理可简记为: 设 k 为正整数. 成立

$$W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases} L^q(\Omega), & p\leqslant q\leqslant p^*=\dfrac{Np}{N-kp}, \quad kp<N,\\ L^q(\Omega), & p\leqslant q<\infty, \quad kp=N,\\ C^\alpha(\overline{\Omega}), & 0<\alpha\leqslant 1-\dfrac{N}{kp}, \quad kp>N.\end{cases}$$

性质 6 (Sobolev 紧嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界区域. $1 \leqslant p < \infty$.

(i) 若设 Ω 满足锥性质. 则当 $p \leqslant N$ 时, 下列嵌入是紧的:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q < p^* = \frac{Np}{N-p}, \quad p < N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q < \infty, \quad p = N;$$

(ii) 若 $\partial\Omega$ 适当光滑, 则当 $p > N$ 时, 下列嵌入是紧的:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p}.$$

需要说明的是: 性质 5, 6 中的 $W^{1,p}(\Omega)$ 可以被替换为 $W_0^{1,p}(\Omega)$, 结论仍然成立, 且嵌入常数也不依赖于 Ω.

性质 7 (Brezis-Lieb 引理 (参见文献 [5])) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开子集, 并假定 $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. 如果 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 有界, 且 $u_k \to u$ a.e 在 Ω 中, 则成立

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p) = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

1.1.3 临界点理论

本节不加证明地给出临界点理论中的一些基础知识, 主要是山路定理和环绕定理, 这两个定理在本书中是研究椭圆方程的基础.

令 φ 是定义在 Banach 空间 X 上的泛函, $u \in U$, 其中 U 是 X 中的开子集. 如果存在 $f \in X^*$(X 的对偶空间), 使得对任意的 $h \in X$, 成立

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle] = 0,$$

则称泛函 φ 在 $u \in U$ 处存在 Gâteaux 导数 f, 记作 $\varphi'(u)$; 如果成立

$$\lim_{\|h\|_X \longrightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_X}[\varphi(u+h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle] = 0.$$

则称泛函 φ 在 $u \in U$ 处存在 Frétchet 导数 f, 记作 $\varphi'(u)$(或者 $d\varphi(u)$, $\nabla\varphi(u)$).

如果泛函 φ 的 Frétchet 导数存在且在 U 上是连续的, 则称 φ 属于 $C^1(U, \mathbb{R})$.

任何 Frétchet 导数都是 Gâteaux 导数. 利用中值定理, 不难验证: 如果泛函 φ 在 U 上有连续的 Gâteaux 导数, 则 $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.

令 $\varphi \in C^1(U,\mathbb{R})$. 如果存在 $L \in \mathcal{L}(X,X^*)$, 使得任意的 $h,v \in X$, 成立

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\langle\varphi'(u+th)-\varphi'(u)-Lth,v\rangle]=0,$$

则称泛函 φ 在 $u \in U$ 处存在二阶 Gâteaux 导数 L, 记作 $\varphi''(u)$; 如果成立

$$\lim_{\|h\|_X\longrightarrow 0}\frac{1}{\|h\|_X}\|\varphi'(u+h)-\varphi'(u)-Lh\|_{X^*}=0,$$

则称泛函 φ 在 $u \in U$ 处存在二阶 Frétchet 导数.

如果泛函 φ 的二阶 Frétchet 导数存在且在 U 上是连续的, 则称 φ 属于 $C^2(U,\mathbb{R})$.

任何二阶 Frétchet 导数都是二阶 Gâteaux 导数. 利用中值定理, 不难验证: 如果泛函 φ 在 U 上有连续的二阶 Gâteaux 导数, 则 $\varphi \in C^2(U,\mathbb{R})$.

令 φ 是定义在 Banach 空间 X 上的 C^1 泛函. 称泛函 $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ 满足 $(P.S)_c$ 条件, 如果任意序列 $\{u_k\} \subset X$, 使得当 $k \longrightarrow \infty$ 时,

$$\varphi(u_k)\longrightarrow c,\quad \varphi'(u_k)\longrightarrow 0$$

都在 X 中收敛于 φ 的一个临界点.

山路定理(参见文献 [3]) 令 X 是 Banach 空间, $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $e \in X$, $r > 0$ 满足 $\|e\|_X > r$ 和

$$b \triangleq \inf_{\|u\|_X=r}\varphi(u) > \varphi(0) \geqslant \varphi(e).$$

如果 φ 满足 $(P.S)_c$ 条件, 其中

$$c \triangleq \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t)),\quad \Gamma \triangleq \{\gamma \in C([0,1],X):\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\},$$

则 c 是 φ 的一个临界值.

环绕定理(参见文献 [3]) 令 $X = Y \oplus Z$ 是 Banach 空间, $\dim Y < \infty$. 假定 $\rho > r > 0$, $z \in Z$ 使得 $\|z\|_X = r$. 定义

$$M \triangleq \{u=y+\lambda z:\ \|u\|_X \leqslant \rho,\ \lambda \geqslant 0,\ y \in Y\},$$

$$M_0 \triangleq \{u=y+\lambda z:\ \|u\|_X=\rho,\ \lambda\geqslant 0,\ y\in Y\ \text{ 或者 }\ \|u\|_X\leqslant\rho,\ \lambda=0\},$$

$$N \triangleq \{u\in Z:\ \|u\|_X=r\}.$$

令 $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ 满足

$$b \triangleq \inf_N\varphi > a \triangleq \max_{M_0}\varphi.$$

如果 φ 满足 $(P.S)_c$ 条件, 其中

$$c \triangleq \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in M}\varphi(\gamma(u)), \quad \Gamma \triangleq \{\gamma\in C(M,X) : \gamma|_{M_0} = id\},$$

则 c 是 φ 的一个临界值.

喷泉定理(参见文献 [54]) 假定群 $G=\mathbb{Z}/2$ 可以等距地作用在 Banach 空间 $X=\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty}X_j$ 上, 其中 $X_j\simeq\mathbb{R}$, $j=1,2,\cdots$. $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$ 是不变泛函, 即: 对任意 $u\in X$, $g\in G$, 成立 $\varphi(gu)=\varphi(u)$. 如果对任意正整数 k, 存在 $\rho_k>r_k>0$ 使得

(A_1) $a_k \triangleq \inf\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}\varphi(u)\geqslant 0$;

(A_2) $b_k \triangleq \max\limits_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}\varphi(u)\longrightarrow +\infty$;

(A_3) 对任意的 $c>0$, φ 满足 $(P.S)_c$ 条件.

则 φ 存在一串无界的临界值.

1.1.4 符号和定义

为了对本书中的结果进行准确的说明, 这里引进一些符号和定义. 我们始终定义 $2^*=\dfrac{2N}{N-2}(N\geqslant 3)$ 是临界 Sobolev 指标; 用 C(有时也用 $C_1,C_2,\cdots$) 表示正常数, 它们在不同的地方可以不同; $O(t)$ 和 $o(t)$ 分别表示 $|O(t)|\leqslant Ct$ 和 $\dfrac{o(t)}{t}\longrightarrow 0$ (当 $t\longrightarrow 0$ 时). $H_0^1(\Omega)$ 表示通常的 Sobolev 空间, 其范数的定义为 $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\left(\int_\Omega(|u|^2+|\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$, $H^{-1}(\Omega)$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间; $L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 表示通常的 L^p 空间, 其范数的定义为 $\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega|u|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1\leqslant p<\infty)$; $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$.

1.2 结构安排

近几十年来, 对半线性椭圆方程和方程组的研究日益受到重视, 这是因为一方面这些方程 (组) 所涉及的大量问题来源于物理学、化学和生物学中的众多数学模型, 因而有强烈的实际应用背景. 另一方面, 在对这些问题的研究中, 对数学本身也提出了许多挑战性的问题, 从而引起愈来愈多的数学家、物理学家、生物学家等的关注. 本书共分 6 章, 第 2 章主要考虑如下形式的半线性椭圆问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

这里 $f(x,u)$ 满足某些特殊的假设条件, $\Omega \subset \mathbb{R}^N(N \geqslant 3)$ 是光滑区域.

长期以来, 问题 (1.2.1) 一直受到人们的广泛关注, 其原因是许多数学物理问题, 如源于非线性源的非线性扩散理论 (参见文献 [36]), 热力学中的气体燃烧理论 (参见文献 [19, 44]), 量子场论和统计力学 (参见文献 [5, 14, 49]) 以及星系的重力平衡理论 (参见文献 [44]) 等都与方程 (1.2.1) 有着极大的渊源. 而且, 数学内部的许多分支, 如几何中的 Yamabe 问题 (参见文献 [6]) 和等周不等式 (参见文献 [43])、调和分析中的 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 (参见文献 [35]) 以及人口动力系统 (参见文献 [17]) 等问题都与方程 (1.2.1) 有着深刻的联系.

对于方程 (1.2.1) 的研究, 重点之一是在 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中建立正解及多解的存在性. 其研究方法主要是非线性分析中的度理论 (参见文献 [36]) 和变分理论 (参见文献 [3, 47, 50]), 而且变分理论被越来越多的实例证明是一种最为有力的工具之一[17]. 其具体过程为, 当 $f(x,u)$ 对 (x,u) 满足连续性条件, 对 u 满足某些增长性条件, 即当 $|u| \to +\infty$ 时,

$$f(x,u) = O(|u|^{p-1}) \text{ 对 } x \in \Omega \text{ 一致}. \tag{1.2.2}$$

寻求方程 (1.2.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的非平凡解等价于寻求下列变分泛函的非零临界点

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{1.2.3}$$

这里 $1 < p \leqslant 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ $(N \geqslant 3)$, $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds$ 是 $f(x,u)$ 的原函数.

为了寻求 $I(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的非零临界点, 一种典型的方法是按照 Palais 和 Smale 的想法 (参见文献 [46]) 进行如下过程:

(1) 利用 $I(u)$ 的几何结构导出 $(P.S)$ 序列 $\{u_n\}$: 当 $n \to \infty$ 时, $I(u_n) \to c$, 且 $DI(u_n) \to 0$.

(2) 证明 $(P.S)$ 序列 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛.

如果每一个 $(P.S)$ 序列在某一水平 c 收敛, 则称 $I(u)$ 满足 $(P.S)_c$ 条件.

在 (1.2.2) 中, 如果 $p < 2^*$, 则称 $f(x,u)$ 为次临界增长. 这时, 由于嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 是紧的, (1.2.3) 中 I 的任何 $(P.S)$ 序列都满足 $(P.S)_c$ 条件, 因此任何 $(P.S)$ 序列都收敛到方程 (1.2.1) 的一个非平凡解. 这方面著名的工作参见文献 [3, 47].

在 (1.2.2) 中, 如果 $p=2^*$, 则称 $f(x,u)$ 为临界增长. 由于嵌入映射 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ 是非紧的, 这就使得相应的能量泛函的 Palais-Smale 序列可以不满足 $(P.S)_c$ 条件, 因而问题变得复杂得多. 本书第 2 章研究 $f(x,u)$ 非常典型的一种情况, 即: $f(x,u)=\lambda u+|u|^{2^*-2}u$, 给出了极小能量正解的存在性, 即: 定理 2.1.1, 2.1.2; Palais-Smale 序列的全局表示, 即: 定理 2.3.2; 变号解的存在性, 即: 定理 2.4.1; 无穷多解的存在性, 即: 定理 2.5.1; 最后一节研究了第二边值问题的存在性. 进一步的研究结果参见文献 [29, 30, 34, 37~39].

第 3 章主要介绍两类几乎临界增长的椭圆方程正解的渐近行为, 即: 对任意 $\varepsilon>0$, 考虑

$$\begin{cases}-\Delta u=N(N-2)u^{2^*-1-\varepsilon}, & 在\ \Omega\ 中,\\ u>0, & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上\end{cases}\tag{1.2.4}$$

和

$$\begin{cases}-\Delta u=N(N-2)u^{2^*-1}+\varepsilon u, & 在\ \Omega\ 中,\\ u>0, & 在\ \Omega\ 中,\\ u=0, & 在\ \partial\Omega\ 上,\end{cases}\tag{1.2.5}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 中的有界光滑区域. 主要结果是: 当 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时, 问题 (1.2.4), (1.2.5) 的正解在 Ω 内的某个点爆破, 并且给出了爆破速率和爆破点的位置, 即: 定理 3.1.1, 3.1.2. 进一步的研究结果参见文献 [41, 42].

第 4 章研究了问题 (1.2.1) 的另一种典型情形, 即: 带临界 Sobolev 指数和强奇异项的半线性椭圆方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u-\mu\dfrac{u}{|x|^2}=\lambda u+|u|^{2^*-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1.2.6}$$

这里 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 5)$ 是有界光滑区域. $0\in\Omega,\ 2^*=\dfrac{2N}{N-2},\ \lambda>0,\ 0\leqslant\mu<\bar{\mu}=\left(\dfrac{N-2}{2}\right)^2$. 在适当条件下, 证明了问题 (1.2.6) 的非平凡解的存在性, 即: 定理 4.2.6, 完全解决了 A. Ferrero 和 F. Gazzola 提出的 Open Problem (公开问题). 进一步的研究结果参见文献 [8, 10, 11, 15, 23~25, 28, 40].

第 5 章研究一类典型的具有临界增长的 Hamilton 型椭圆方程组: