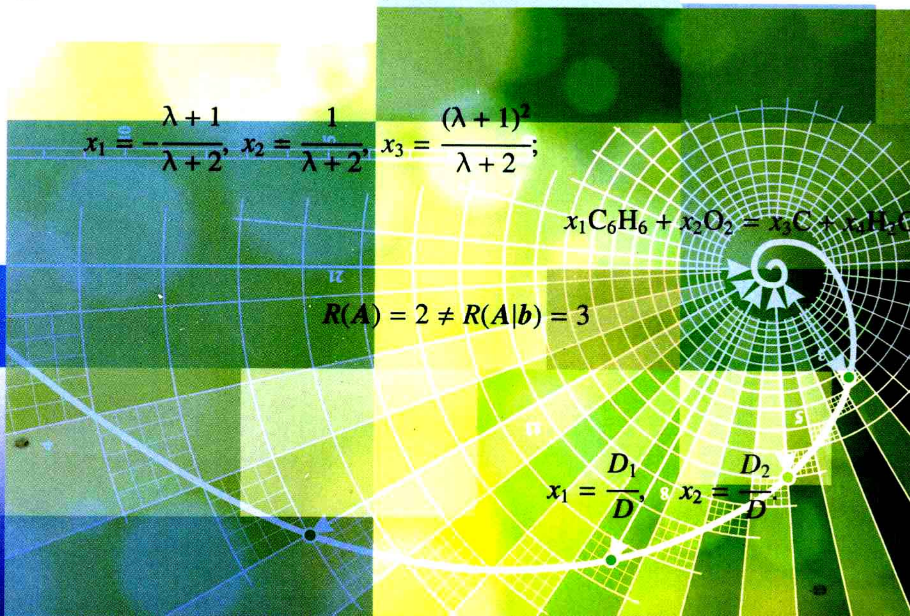
中国劳动关系学院“十二五”规划教材

线性代数

贾屹峰 编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



中国劳动关系学院十二五规划教材

线性代数

贾屹峰 编

上海交通大學出版社

内容摘要

本书是根据教育部高等学校基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”,并参考全国硕士研究生入学统一考试大纲编写而成的.主要内容包括行列式、线性方程组、矩阵及其运算、向量的线性相关性、矩阵的特征值及二次型、线性空间与线性变换等6章,并在每一章的最后一节给出了利用符号计算软件Mathematica在本章的基本应用.

本书以基本理论和方法为核心,在此基础上注重应用,从实际问题引入基本概念,力求由浅入深、化难为易.另外安排了较多的典型例题和习题,且包含一些的实际应用问题.可作为高等院校理工类、经管类本科生的教材,也可作为硕士研究生的数学复习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/贾屹峰编. —上海:上海交通大学出版社,2012

ISBN 978-7-313-08142-1

Ⅰ.线... Ⅱ.贾... Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 019702 号

线 性 代 数

贾屹峰 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

同济大学印刷厂 印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:12.5 字数:157 千字

2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷

印数:1~2030

ISBN 978-7-313-08142-1/O 定价:25.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:021-65982320

前　言

线性代数是我国高等院校非数学类专业重要的数学基础课,对培养学生的计算、逻辑思维和抽象能力有十分重要的意义.另外,随着计算机的发展,线性代数在各个领域的应用也越来越广泛,同时也改进了线性代数的教学.

在线性代数课程的建设中,我们积极探索和研究新的教学理论和方法,在教研、教改、教学实验以及计算机在线性代数教学的应用方面做了大量的工作,并取得了丰富的成果和经验.在此基础上,组织教学经验丰富的老师编写了此教材.

本书第1章由禹实编写,第2章由郑红芬编写,第3章由王志高编写,第4章由贾屹峰编写,第5章由李静编写,第6章由吴亚风编写,张明负责全书的课后习题,全书由贾屹峰统稿.

本书的出版获得中国劳动关系学院十二五规划教材项目的支持,并得到了上海交通大学出版社的鼎力帮助,在此表示感谢.

由于编者水平有限,且时间仓促,书中难免有错误和不妥之处,请各位读者、专家、同行给予指正.

编者

2012年2月

于中国劳动关系学院

目 录

第 1 章 行列式 1
1.1 二阶与三阶行列式 1
1.2 排列及其逆序数 4
1.3 n阶行列式的定义 5
1.4 行列式的性质 7
1.5 行列式按行按列展开 13
1.6 行列式的应用 18
1.7 Mathematica 计算行列式 23
习题1 25
第 2 章 线性方程组 29
2.1 数环和数域* 29
2.2 消元法 31
2.3 矩阵的秩 36
2.4 线性方程组的解 42
2.5 Mathematica求解线性方程组 47
习题2 49
第 3 章 矩阵及其运算 52
3.1 矩阵 52
3.2 矩阵的运算 56
3.3 逆矩阵 66

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

3.4 矩阵分块 69
3.5 初等矩阵 72
3.6 Mathematica计算矩阵 77
习题3 81
第 4 章 向量的线性相关性 86
4.1 向量及其运算 86
4.2 向量的线性相关性 91
4.3 秩 99
4.4 向量空间 106
4.5 线性方程组解的结构 110
4.6 Mathematica计算向量 115
习题4 117
第 5 章 矩阵的特征值及二次型 122
5.1 向量的内积 122
5.2 方阵的特征值和特征向量 128
5.3 矩阵的对角化 133
5.4 二次型及其标准形 140
5.5 Mathematica计算特征值 146
习题5 150
第 6 章 线性空间与线性变换* 153
6.1 线性空间的定义与性质 153
6.2 维数、基与坐标 161
6.3 线性变换 166
6.4 线性变换的矩阵表示式 171
习题6 178
习题参考答案 183
参考文献 192

第1章　行列式

行列式理论起源于解线性方程组,是线性代数中的一个基本概念,在其他自然科学领域中也有广泛的应用.本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法及应用.

1.1　二阶与三阶行列式

行列式是一种特定的算式,是由求解线性方程组引入的.首先介绍二阶和三阶行列式.

用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1.1.1}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时,线性方程组(1.1.1)有唯一解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

上式中的分子、分母都是4个数分两对相乘再相减而得,其中$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$是由线性方程组(1.1.1)的四个系数确定的,把四个系数按其在方程组的位置排列成二行二列数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}, \tag{1.1.3}$$

表达式$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为由数表(1.1.3)所确定的二阶行列式,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1.4}$$

D称为线性方程组(1.1.1)的系数行列式.同理,式(1.1.2)的分子也可用二阶行列式表示:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

当系数行列式$D\neq 0$时,线性方程组(1.1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.1.5}$$

例1.1.1 求解二元线性方程组$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$.

解: 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7, D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=14, D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-21,$$

由式(1.1.5),方程组的解为$x_1=2, x_2=-3$. ■

同理,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\ , \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

当$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$时,线性方程组(1.1.6)有唯一解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{23}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

与二阶行列式类似,定义三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ \quad a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}, \tag{1.1.7}$$

称为线性方程组(1.1.6)的系数行列式.同理有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当$D\neq 0$时,线性方程组(1.1.6)有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.1.8}$$

例1.1.2 求解三元线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-4 \\ 2x_1+x_2-3x_3=7 \\ x_1-x_2+x_3=-2 \end{cases}$.

解: 该方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+6-2-1-3+4=5\neq 0,$$

故有唯一解,又

$$D_1=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=5, D_2=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=10, D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-5.$$

因此,根据式(1.1.8),方程组的解为$x_1=1, x_2=2, x_3=-1$. ■

二阶和三阶行列式的计算,可以利用对角线法则,实线表示主对角线,虚线表示辅对角线.表达式(1.1.4)与(1.1.7)为主对角线元素乘积的和减去辅对角线元素乘积的和.参看图1.1与图1.2.

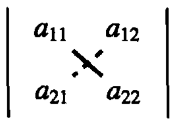


图 1.1 二阶行列式

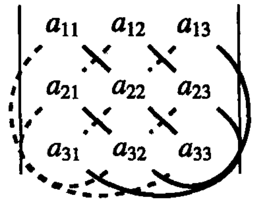


图 1.2 三阶行列式

利用二阶行列式与三阶行列式求解二元与三元线性方程组形式非常简洁, 而且也很方便,为了把这个结论推广到n元线性方程组,需要对二阶和三阶行列式的结构进一步研究,为此在下一节首先介绍排列和逆序数.

1.2 排列及其逆序数

为了给出n阶行列式的定义,本节介绍排列及逆序数.

n个数$1, 2, \cdots, n$组成的一个有序数组,称为一个n级排列.显然,n级排列的总数为$n!$.例如,由$1, 2, 3$组成3级排列总数为$3! = 6$,即

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

n个数按从小到大的顺序排列称为标准(自然)排列,如123; 而其余排列都有较大的数排在较小的数之前,如321.对此有如下定义:

定义1.2.1 $i_1, i_2, \cdots, i_n$是一个n级排列,若一个较大的数排在较小的数前,则称这一对数构成一个逆(反)序;排列中逆序的总数称为该排列的逆序数,记为$N(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

例如$N(213) = 1, N(312) = 2$.

逆序数是奇数的排列称为奇排列,逆序数是偶数的排列称为偶排列.例如$N(45132) = 7$,45132是奇排列;$N(54321) = 10$,54321是偶排列.

为了更好地理解行列式的概念和进一步研究行列式的性质,下面讨论对换及其与排列奇偶性的关系.

排列中任意两个元素对调,其余的元素不动,称为对换. 相邻的两个元素对换,称为相邻对换.

定理1.2.1　对换改变排列的奇偶性.

证明: (1) 先证相邻对换的情况.设排列为$A\ i\ j\ B$,A,B表示除i,j外其余的数.i与j对换后的排列为$A\ j\ i\ B$,新排列比原排列多$(i<j)$或少$(i>j)$一个逆序,因此奇偶性相反.

(2) 设排列为$A\ i\ k_1\cdots k_s\ j\ B$,$i$与$j$对换后的排列为$A\ j\ k_1\cdots k_s\ i\ B$.该对换相当于$i$先做$s$次相邻对换变为$A\ k_1\cdots k_s\ i\ j\ B$;$j$再做$s+1$次相邻对换变为$A\ j\ k_1\cdots k_s\ i\ B$. i与j对换相当于$2s+1$次相邻对换, 奇偶性改变了$2s+1$次,故与原排列奇偶性相反. ■

定理1.2.2　$n\geqslant 2$时,n个数的所有排列中,奇偶排列各一半.

证明: 设n个数的排列中,奇排列有p个,偶排列有q个,则$p+q=n!$. 对p个奇排列,施行同一对换,则由定理1.2.1得到p个不同的偶排列;又总共有q个偶排列,故$p\leqslant q$.同理$q\leqslant p$,因此$p=q=\dfrac{n!}{2}$. ■

1.3　n阶行列式的定义

为了给出n阶行列式的定义,对二阶和三阶行列式进一步分析.由式(1.1.4), 二阶行列式是两项的代数和,若不考虑符号,每一项都可写为$a_{1i_1}a_{2i_2}$; 由式(1.1.7),三阶行列式是6项的代数和,同样如果不考虑符号,都可写为$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$.从上面的讨论可以看出,二阶和三阶行列式的每一项是取自不同行不同列的元素乘积,这样的取法有2!和3!种,因此是2!和3! 项的和.其次,每一项的行标都是自然排列,当列标是偶排列时取正号,奇排列取负号.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

定义1.3.1 n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示$n!$项的代数和,每一项都是取自不同行不同列的n个元素的乘积$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$,符号为$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}$,即

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \tag{1.3.1}$$

记为$D=\det(a_{ij})$.

利用对换,可以证明行列式的定义也可以写成

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n,j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

上一节二阶和三阶行列式的定义与n阶行列式的定义是一致的.利用式(1.3.1)可以直接计算一些简单的、特殊的行列式的值.

例1.3.1 上三角行列式(主对角线下方元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ ■

例1.3.2 下三角行列式(主对角线上方元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ ■

例1.3.3 主对角行列式(主对角线元素非零,其余元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

辅对角行列式(辅对角线元素非零,其余元素都为零)

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}. \qquad \blacksquare$$

对一般的行列式,利用定义直接计算非常麻烦,但是如果能化成上述的三角或对角形式的行列式,计算就比较容易了.

1.4 行列式的性质

利用定义计算n阶行列式,需要计算$n!$项,且每项是n个元素的乘积,因此需计算$(n-1)n!$次乘法,当n较大时,即使用计算机也难以完成.因此,必须对行列式进一步的研究,找到切实可行的计算方法.本节介绍行列式的一些性质,不仅可以简化行列式的计算,而且对其理论研究也很重要.

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式D^{T}称为行列式D的转置行列式.

性质1 行列式与其转置行列式相等.

证明: 设n阶行列式$D=\det(a_{ij})$的转置为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即$b_{ij}=a_{ji}$.由行列式的定义和式(1.3.2)有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}b_{1i_1}b_{2i_2}\cdots b_{ni_n}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}=D. \quad \blacksquare$$

性质1说明行列式行与列的平等,对行成立的性质对列也成立.

性质2 交换行列式两行,行列式改变符号.

证明: 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n}(-1)^{N(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}.$$

交换行列式D的第i行与第j行,可得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n}(-1)^{N(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{nk_n}.$$

由定理1.2.1,对D_1中的任意一项有

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{N(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{nk_n}\\
=&(-1)^{N(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}\\
=&-(-1)^{N(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}.
\end{aligned}
$$

因此

$$D_1=-\sum_{k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n}(-1)^{N(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}=-D. \quad ■$$

推论1.4.1 若行列式的两行完全相同,则此行列式等于零.

性质3 数λ乘以行列式某一行的所有元素,等于λ乘以此行列式.

证明: 设行列式$D=\det(a_{ij})$第i行的元素$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$乘以$\lambda$ 得行列式D_1. 则D_1第i行元素为$\lambda a_{i1},\lambda a_{i2},\cdots,\lambda a_{in}$,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots\lambda a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\lambda\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\lambda D. \quad ■$$

推论1.4.2 行列式中某一行元素的公因子可以提到行列式符号外面.

推论1.4.3 行列式中两行元素对应成比例,则该行列式等于零.

性质4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_1+c_1 & \cdots & b_n+c_n\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_1 & \cdots & b_n\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_1 & \cdots & c_n\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}. \quad (1.4.1)$$

证明: 根据行列式的定义有

$$a_{1j_1}\cdots(b_i+c_i)\cdots a_{nj_n}=a_{1j_1}\cdots b_i\cdots a_{nj_n}+a_{1j_1}\cdots c_i\cdots a_{nj_n},\qquad(1.4.2)$$

故式(1.4.1)成立. ■

推论1.4.4 如果行列式中某一行的元素都可以写成$m(\geqslant 2)$个元素之和,则该行列式可以写成m个行列式之和.

性质5 行列式某一列的所有元素乘以同一数λ后再加到另一列对应的元素上去,行列式的值不变.

证明: 设行列式$D=\det(a_{ij})$ 的第i列乘以λ加到第j列得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j}+\lambda a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j}+\lambda a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj}+\lambda a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=D+\lambda\cdot 0=D.$$ ■

为了便于以后讨论,引入以下记号:

(1) 交换第i行(列)与第j行(列)记为: $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;

(2) 第i行(列)乘以k记为:$kr_i(kc_i)$;

(3) 第j行(列)乘以k加到第i行(列)记为:$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$

上述记号对矩阵也适用.

行列式计算一种常用的方法就是利用行列式的性质把行列式对角化或三角化, 从而得到行列式的值.

例1.4.1 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1\\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2\\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3\end{vmatrix}$.

解:

$$D \xlongequal[c_2-c_1]{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 \\ 1+a_2 & 1 & 2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

例1.4.2 证明$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证明:

$$左 = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 右. \quad \blacksquare$$

例1.4.3 计算n阶行列式$D = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解:

$$D = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}. \quad \blacksquare$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com