现代数学基础丛书 144

混沌、Mel'nikov方法及新发展

李继彬 陈凤娟 著

科学出版社

现代数学基础丛书 144

混沌、Mel′nikov 方法及新发展

李继彬 陈凤娟 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

物理、化学、力学和生物学中物质运动的数学模型往往用微分方程所定义的连续动力系统来模拟，这些动力学模型存在着复杂的动力学行为——混沌性质. 本书介绍精确地判定 Smale 马蹄存在意义下具有混沌性质的 Mel'nikov 方法，并介绍近年来学者们所发展的同宿和异宿到耗散鞍型周期轨道的同宿和异宿缠结理论.

本书主要面向从事动力系统应用的读者，亦可作为研究生和对常微分方程与动力系统感兴趣的人员的入门读物.

图书在版编目（CIP）数据

混沌、Mel'nikov 方法及新发展/李继彬，陈凤娟著. —北京：科学出版社，2012

(现代数学基础丛书; 144)

ISBN 978-7-03-034740-4

I. ① 混… II. ① 李… ② 陈… III. ①混沌理论 IV. ①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 123479 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第 一 版　开本：B5(720 × 1000)
2012 年 6 月第一次印刷　印张：21
字数：408 000

定价：75.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003年8月

前言

1989 年, 本书第一作者曾在重庆大学出版社出版过 38 万字的《混沌与 Mel′nikov 方法》一书. 书稿是用铅字排版的, 当年五月底和六月初, 笔者应邀在重庆大学为数学系 1987 年入学的硕士研究生们讲 "分枝与混沌" 这门课, 并和排版师傅一起, 边铸新铅字, 边改边校对书稿. 第一次印刷的 2000 本书很快售罄. 有趣的是, 时隔二十余年, 迄今在网络上还有求购这本书的帖子, 这说明对读者而言, 该书的内容仍有学习的价值. 鉴于原来的铅字版早已毁掉, 今天的出版界也已远离 "铅与火", 编著者在保持原书风格的基础上, 结合当今研究的进展, 逐章地改写了原书, 增加了三章新发展的内容和大量的参考文献, 定名《混沌、Mel′nikov 方法及新发展》, 交由科学出版社出版.

兹录《混沌与 Mel′nikov 方法》一书的引言作为本书前言的一部分:

在现实世界中, 许多物理、力学、化学、生物和经济与社会学系统, 往往用微分方程所确定的数学模型来描述. 为揭示这些模型所反映的系统的内部结构, 人们作了各种各样的探索, 所获得的成果丰富和充实了微分方程经典学科的内容, 促进了该学科的发展, 增加了人们对于客观世界的理解. 大量的事实雄辩地说明, 集中精力对付某些有实际背景的系统是发展理论的指南和源泉.

19 世纪 80 年代由 H. Poincaré 所开创的微分方程定性理论, 在 20 世纪上半期由于与非线性振动的联系, 在应用方面获得令人刮目的进展. 在理论方面, G. D. Birkhoff 将经典微分方程所定义的动力系统抽象为拓扑动力系统. 随着 20 世纪 50 年代微分流形和微分拓扑理论的崛起, 传统的定义于 Euclid 空间上的微分方程被引申到微分流形上定义的动力系统, 形成了崭新的可微动力系统理论新学科, 获得了许多优秀的成果. 动力系统理论是与时间的发展有关的数学. 该理论的一般目标是寻找有效的方法, 回答问题: 随着时间的演化, 系统的性质如何? 理论的发展沿着两条并行的路线, 一方面, 发现简单性、可理解性和稳定性; 另一方面, 揭示复杂性、不稳定性和混沌性.

微分动力系统理论的新成果源于微分方程又反作用于微分方程, 提供了对于高维动力系统所确定的连续流的动态复杂性的理论思维. 这是符合认识发展的辨证法的. 1967 年, 美国动力系统专家 S.Smale 说过, "...... 常

微分方程定性理论中出现的若干现象和问题, 在微分同胚问题中以最简单形式同样出现. 因此, 作为第一步, 在微分同胚中发现定理; 第二步, 通常是倒回去, 将它们翻译成微分方程理论中的结果." 这样一种"倒回去"的工作, 简言之, 即微分方程研究中的动力系统方法. 编写本书的目的, 是介绍微分动力系统理论反作用于常微分方程的理论和应用中, 涉及对系统复杂性认识的某些基本结果.

20 世纪 70 年代以来, 对物理、力学、化学和生物学中各种动力学模型的计算机实验和模拟结果说明, 高于二维的微分方程所确定的向量场, 在某些参数条件下, 其轨道有复杂的混沌 (chaos) 性质. 什么是混沌, 如何理解混沌现象? 系统是如何伴随着参数的改变而发展为混沌行为的? 有什么精确的数学方法和技巧检验混沌行为的存在? 本书回答上述问题的某些精确的数学理解. 重点介绍检验 Smale 马蹄型混沌存在的 Mel'nikov 测量方法.

粗略地说, 作为一种动力学现象, 混沌所描述的是微分方程的解的轨道在相空间中关于初始条件的敏感依赖性和随时间长期发展的不可预测性. 早在 1890 年, Poincaré 就发现, 混沌的出现与双曲鞍点的稳定和不稳定流形的横截相交导致的同宿缠结 (homoclinic tangles) 紧密相关. 关于同宿缠结的研究导致 20 世纪 60 年代 Smale 马蹄映射的发现. Smale 马蹄具有复杂的动力学结构, 既实现了混沌的描述性定义又体现了所有同宿缠结的存在. 同宿缠结机制的这种概念性的简化和 Smale 马蹄映射的优美的几何结构使得现代动力系统理论的新思想得以向数学之外的科学领域广泛传播, 形成了非线性科学研究的新方向.

对于在应用中大量出现的依赖于时间的周期扰动的可积系统和 Hamilton 系统, 1963 年由苏联数学家 Mel'nikov 发展的分析方法, 经 Guckenheimer 和 Holmes 于 1983 年撰写的专著的再加工和介绍得到广泛传播和发展. 该方法通过测量系统轨道的 Poincaré 映射的双曲鞍点的稳定和不稳定流形之间的距离, 来精确地判定同宿缠结和 Smale 马蹄的存在性. 经过众多数学家近五十年的工作, Mel'nikov 所建立的方法已经被大大推广, 去处理高维系统和非双曲周期轨道的情况, 并发展到无穷维动力系统和随机动力系统的混沌性质研究. 读者可从本书所收录的大量参考文献了解当今的发展动态.

近年来, 为了填补抽象的非一致双曲动力系统理论与微分方程模型的具体应用之间的空白, 美国 Arizona 大学 Wang Qiudong 教授等发展了系列的新混沌理论 —— 秩为 1 的映射理论, 提供了对非一致双曲的同宿缠结的复杂的几何和动力学结构的深刻理解. 特别, 对于依赖于时间的周期和非周期扰动的二阶振子, 在假设未扰动系统有同宿到耗散鞍点的同宿轨道的条件下, 他们建立了系统的 Poincaré 映射的精确的数学表达式, 给出了 Poincaré 映射的同宿缠结的更为细致和完整的

刻画. 进而证明了系统的许多复杂的动力学行为的存在性. 我们用第 8~10 章共三章初步介绍这个新方向的某些新结果. 希望作进一步研究工作的读者, 应认真地学习 Wang Qiudong 等的原著.

本书主要面向从事动力系统应用的读者, 亦可作为硕士研究生、博士研究生和对常微分方程与动力系统感兴趣的人员的入门读物. 所介绍的内容是基本的, 可供对混沌及其应用感兴趣的研究人员参考. 阅读本书需要学习过数学分析和微分方程课程的基础知识.

本书的出版得到了国家自然科学基金重点基金 (10831003) 的资助. 编著者感谢浙江师范大学的支持及科学出版社赵彦超先生在出版过程中给予的帮助. Wang Qiudong 教授认真地审阅了后三章的原稿, 并提出了宝贵的改进建议, 编著者在此一并表示衷心的谢意.

作　者

2012 年 3 月

于浙江金华

目 录

第 1 章　动力系统的基本概念

本章简要介绍动力系统的某些基本概念.

1.1　流和离散动力系统

"动力系统" 这个名词, 由 Poincaré 研究多体问题 —— 质点组动力学问题而产生. 后来被发扬光大, 沿用下来, 在数学上具有确定的含义. 考虑定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 上的微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.1.1}$$

其初始条件为 $x(0) = x_0$. 设 $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 则 (1.1.1) 的初值问题解 $x = \phi(t, x_0)$ 局部存在唯一. 再对 f 增加解整体存在唯一的条件, 即对于一切的 $t \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 设解 $x = \phi(t, x_0)$ 整体存在唯一. 由微分方程的一般理论可知, 函数 $\phi(t, x_0)$ 具有以下的性质:

(1) 确定性: 对于一切 $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\phi(0, x) = x; \quad \phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x)).$$

(2) 连续性: $\phi(t, x)$ 关于变元 t, x 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 连续.

满足这两个性质的映射 $\phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 构成以 t 为参数的从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的单参数连续变换群. 我们称 ϕ 为 $\mathbf{R}^n$ 中定义的动力系统或流.

对于给定的 $x \in \mathbf{R}^n$, 集合

$$\mathrm{Orb}_\phi(x) = \{\phi(t, x) |\ t \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$$

称为流 ϕ 过点 x 的轨道. $\mathbf{R}^n$ 称为状态空间或相空间, 每个点 $x \in \mathbf{R}^n$ 称为一个状态.

如果抛开微分方程, 设 X 是一个拓扑空间 (C^r 微分流形), 一般地, 考虑连续映射 (C^r 映射)$\phi : \mathbf{R} \times X \to X$, 并设 ϕ 满足确定性条件:

1° $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$, 对于一切 $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in X$ 成立;

2° $\phi(0, x) = x$, 对于一切 $x \in X$ 成立.

此时, 称 ϕ 为定义在 X 上的一个拓扑动力系统 (C^r动力系统), 或者称 X 上的 $C^0(C^r)$ 流.

对于任意取定的 $t \in \mathbf{R}$, 由于 $\phi(t, \cdot)$ 定义了一个以 t 为参数的连续 (C^r 映射, 简记为 ϕ^t, 条件 1° 和 2° 可改写为

(1) $\phi^{s+t} = \phi^s \cdot \phi^t$, 对于一切 $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in X$ 成立;

(2) $\phi^0 = id$.

由于对于任何固定的 $t \in \mathbf{R}$, ϕ^t 有逆映射 ϕ^{-t}, 因此, ϕ^t 是一个同胚 (C^r 微分同胚). 在拓扑空间 X 上定义的上述流 ϕ 同样关于 t 构成单参数的变换群, 参数的取值范围是实数加群 $\mathbf{R}^+$.

如果对流进行离散采样, 研究它每隔一段时间间隔 T 的状态, 我们得到一个两边有无穷多项的序列

$$\cdots, \phi^{-2T}, \phi^{-T}, \phi^0 = id, \phi^T, \phi^{2T}, \cdots.$$

这个序列由同胚 $f = \phi^T$ 所生成, 即

$$\phi^{kT} = \phi^T \circ \phi^T \circ \cdots \circ \phi^T = f \circ f \circ \cdots \circ f = f^k, \tag{1.1.2}$$

$$\phi^{-kT} = \phi^{-T} \circ \phi^{-T} \circ \cdots \circ \phi^{-T} = f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1} = f^{-k}. \tag{1.1.3}$$

ϕ^T 称为流 ϕ 的时刻 T 映射, 又称 Poincaré 映射. 特别, ϕ^1 称为流 ϕ 的时刻 1 映射. 流 ϕ^t 的时刻 T 映射可看作流 $\psi^T = \phi^{Tt}$ 的时刻 1 映射. 因此, 只需考虑 $T = 1$ 情形.

一般地, 任给一个同胚 (C^r 微分同胚)f, f 不一定是某个流的时刻 1 映射, 同样能够生成一个双边序列

$$\cdots, f^{-2}, f^{-1}, f^0, f^1, f^2, \cdots, \tag{1.1.4}$$

其中, $f^0 = id, f^k = f \circ f^{k-1} = f \circ f \circ \cdots \circ f$; $f^{-k} = (f^{-1})^k$. 显然 f 满足关系:

(1) $f^{k+l} = f^k \circ f^l$, 对于一切 $k, l \in \mathbf{Z}$ 成立;

(2) $f^0 = id$.

与流的情形类比, 人们称这种由同胚 (C^r 微分同胚) 生成的双边序列为离散动力系统. 离散动力系统也是一个单参数变换群, 其参数取值范围是整数加群 $(\mathbf{Z}, +)$.

由于存在没有全局截面的流, 因此, 一般而言, 不能说每个流通过取 Poincaré 映射必对应一个微分同胚. 但是, 流经过采样离散化而得到一个低一维的离散动力系统. 流的时刻 1 映射总是一个同胚. 反之, 采用 “扭扩” (suspension) 微分同胚 f (见图 1.1.1), 可构造 f 作为某个流的 Poincaré 映射. 这里不再赘述. 正因为流和离散动力系统有这样紧密的关系, 才激励着离散动力系统理论的大发展. 我们研究流所得到的结论, 往往可用于微分同胚情形. 反之, 在一定的条件下, 由微分同胚所获得的信息, 可用于研究比微分同胚高一维的流. 人们往往首先在微分同胚的研究中

去发现定理, 反过来又用之于微分方程所定义的流, 以得到相应的结果. 这就是微分方程研究的动力系统方法.

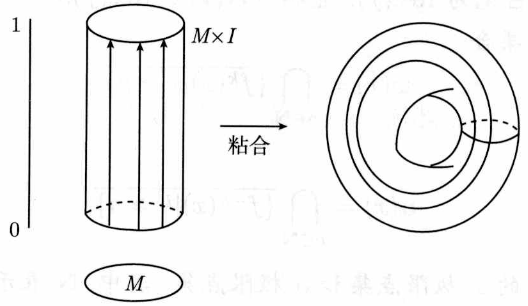

图 1.1.1 离散动力系统的扭扩

上面的讨论都是由同胚 (C^r 微分同胚) 生成的系统, 如果我们更一般地考虑连续映射 (C^r 映射) 的迭代: $f^0 = id,\ f^1, f^2, \cdots, f^k, \cdots, k \in Z^+$, 所得到的系统称为拓扑半动力系统 ($C^r$ 微分半动力系统).

1.2 基本定义和性质

设 X 是拓扑空间 (C^r 流形), $f: X \to X$ 是一个同胚 (C^r 微分同胚).

定义 1.2.1 集合 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^k(x) | k \in \mathbf{Z}\}$, $\mathrm{Orb}_{f^+}(x) = \{f^k(x) | k \in \mathbf{Z}^+\}$, $\mathrm{Orb}_{f^-}(x) = \{f^k(x) | k \in \mathbf{Z}^-\}$ 分别称为离散动力系统 f 过点 x 的轨道、正半轨道和负半轨道.

显然, $\mathrm{Orb}_f(x) = \mathrm{Orb}_{f^+}(x) \cup \mathrm{Orb}_{f^-}(x)$. 如不产生混淆, 可简记 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 为 $\mathrm{Orb}(x)$.

定义 1.2.2 若存在正整数 $n \geqslant 1$, 使得 $f^n(x) = x$ 成立, 称 x 为 f 的周期点; 使得 $f^n(x) = x$ 成立的最小自然数 n, 称为 x 的周期. 特别, 周期为 1 的点, 称为 f 的不动点.

用记号 $\mathrm{Per}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$ 分别表示 f 的周期点集合和不动点集合. 显然, $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f)$.

定义 1.2.3 设 $x \in X$, 若存在正整数 $m > 0$, 使得 $f^m(x)$ 是 f 的周期点, 则称 x 为 f 的准周期点 (或称终于周期点).

f 的终于周期点集合记为 $\mathrm{EPer}(f)$. f 的周期点必是准周期点, 反之不真. 并且

$$\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{EPer}(f) = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(\mathrm{Per}(f)).$$

定义 1.2.4　设 $x \in X$, 若对 x 的任意邻域 $U(x) \subset X$, 都存在 $n > 0$, 使得 $f^n(x) \in U(x)$, 则称 x 为 f 的回复点 (recurrence point).

f 的回复点集合记为 $\mathrm{Rec}(f)$. 显然, $\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f)$.

定义 1.2.5　集合

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\{f^k(x) | k \geqslant n\}}$$

与

$$\alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\{f^{-k}(x) | k \geqslant n\}}$$

分别称为 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 ω 极限点集和 α 极限点集. 其中, $\mathbf{N}$ 表示正整数集合.

由这个定义可见, $\omega(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都是闭集. 如果 X 是紧致的度量空间, 则对于一切 $x \in X$, $\omega(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都是非空的.

定义 1.2.6　设 $x \in X$, 若存在 x 的邻域 $U(x) \subset X$, 使得对于一切 $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $f^k(U(x)) \cap U(x) = \varnothing$, 其中 $\varnothing$ 表示空集, 则称 x 为 f 的游荡点. 不是游荡点的点称为非游荡点 (non-wandering point). 换言之, 对 x 的任意邻域 $U(x)$, 总存在整数 $k \neq 0$, 使得 $f^k(U(x)) \cap U(x) \neq \varnothing$, 则称 x 为 f 的非游荡点.

f 的非游荡点全体所构成的集合称为 f 的非游荡集, 记为 $\Omega(f)$. 由该定义可知, f 的游荡点集是开集, f 的非游荡集 $\Omega(f)$ 是闭集.

定义 1.2.7　设集合 $\Lambda \subset X$, 且 $F(\Lambda) = \Lambda$ (对于半动力系统 $F(\Lambda) \subset \Lambda$), 称 Λ 为 f 的不变集. 又若 Λ 是 f 的非空闭不变集, 并且不存在真包含于它之中的非空闭不变子集, 则称 Λ 为 f 的极小集.

定理 1.2.1　设 $f: X \to X$ 是一个连续映射, 则

(i) $\Omega(f)$ 是闭集;

(ii) $\bigcup_{x \in X} \omega(x) \subset \Omega(f)$, 从而 $\Omega(f)$ 非空;

(iii) 全体周期点集 $\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f)$;

(iv) $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$, 又若 f 为同胚, 则 $\Omega(f)$ 为不变集, 即 $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$.

证　(i) 根据定义 1.2.6, $X - \Omega(f)$ 为开集, 故 $\Omega(f)$ 为闭集.

(ii) 设 $x \in X, y \in \omega(x)$, 兹证 $y \in \Omega(f)$. 用 V 表示点 y 的邻域, 兹求满足 $f^{-n}(V) \cap V \neq \varnothing$ 的 $n \geqslant 1$, 从而存在 $n \geqslant 1$ 和某个 $z \in V$, 满足 $f^n(z) \in V$. 事实上, 因为 $y \in \omega(x)$, 故存在自然数列 $\{n_i\}$, 满足 $f^{n_i}(x) \to y$, 选择 $n_{i0} < n_{i1}$, 且 $f^{n_{i0}}(x) \in V$, $f^{n_{i1}}(x) \in V$. 于是, 取 $n = n_{i1} - n_{i0}$, $z = f^{n_{i0}}(x)$, 即得到结论.

(iii) 若 $f^n(x) = x, n > 0, U$ 是 x 的邻域, 则有 $x \in f^{-n}(U) \cap U$, 从而 $x \in \Omega(f)$.

(iv) 设 $x \in \Omega(f), V$ 为 $f(x)$ 的邻域, 则 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域. 从而存在某个 $n > 0$, 使得 $f^{-(n+1)}(V) \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$. 因此, $f^{-n}(V) \cap V \neq \varnothing$, 故 $f(x) \in \Omega(f)$, 即

$f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. 如果 f 是同胚, 必有 $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$. 因此, 由 $f^{-1}(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ 知, $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$, 即 $\Omega(f)$ 是不变集. □

定义 1.2.8 (i) 连续映射 $f: X \to X$ 称为单边拓扑传递的 (topologically transitive), 倘若存在某些 $x \in X$, 其半轨道 $\{f^n(x)|n \geqslant 0\}$ 在 X 中稠;

(ii) 同胚映射 $f: X \to X$ 称为拓扑传递的, 倘若存在某些 $x \in X$, 其轨道 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^n(x)|n \in \mathbf{Z}\}$ 在 X 中稠.

如果同胚映射 $f: X \to X$ 是单边拓扑传递的, 称 f 是拓扑混合的. 存在例子说明, 拓扑传递的同胚映射 f 不是拓扑混合的. 反之, f 拓扑混合必拓扑传递, 且 $\Omega(f) = X$.

定理 1.2.2 设 $f: X \to X$ 是紧致度量空间的同胚映射, 则以下的说法等价:

(i) f 是拓扑传递的;

(ii) 设 E 是 X 的闭子集, 是 f 的不变集, 则或者 $E = X$, 或者 E 无处稠密 (换言之, 对于任何满足 $f(U) = V$ 的开子集 $U \subset X$, 或者 $U = \varnothing$, 或者 U 为稠集);

(iii) 对任何非空开集 U, V, 存在 $n \in \mathbf{Z}$, 使得 $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$;

(iv) 集合 $\{x \in X : \overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = X\}$ 是稠的 G_δ 集合.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $x_0 \in X, \mathrm{Orb}_f(x_0)$ 在 X 中稠, 从而 $\overline{\mathrm{Orb}_f(x_0)} = X$. 设 $E \neq \varnothing$, 且 E 为闭集, 关于 f 不变. 若 U 为开集且 $U \subset E, U \neq \varnothing$, 则存在 p 使得 $f^p(x_0) \in U \subset E$. 从而, $\mathrm{Orb}_f(x_0) \subset E$, 即 $X = E$. 因此, 或者 $E = X$, 或者 E 无内点.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 设 U, V 是非空开集, 则 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U)$ 为开集, 且关于 f 不变, 由 (ii) 中条件, 该集合必为稠集, 从而 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

(iii)$\Rightarrow$(iv). 用 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 表示 X 的可数基, 则集合 $\{x \in X|\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = X\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} f^m(U_n)$, 且由 (iii) 的条件 $\bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} f^m(U_n)$ 稠, 由此即得 (iv) 的结论.

由 (iv)$\Rightarrow$(i) 是显然的. □

以下设拓扑空间 X 是可度量化的, 其距离函数为 d.

定义 1.2.9 设 $f: X \to X$ 是一个连续映射, 称 f 关于初始条件具有敏感依赖性, 倘若存在 $\delta > 0$, 使得对于一切 $x \in X$ 和 x 的任何邻域 U, 恒存在 $y \in U, n \geqslant 0$ 使得 $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

定理 1.2.3 如果同胚映射 $f: X \to X$ 是拓扑传递的, 并且 f 有稠的周期点, 则 f 关于初始条件具有敏感依赖性.

证 由于 f 的周期点在 X 中稠, 必存在数 $\delta_0 > 0$, 使得对每个 $x \in X$, 存在

f 的周期点 $q \in X$, 满足 $d(\mathrm{Orb}_f(q), x) \geqslant \frac{1}{2}\delta_0$. 事实上, 任取两个周期点 q_1 和 q_2, 记 $\delta_0 = d(\mathrm{Orb}_f(q_1), \mathrm{Orb}_f(q_2))$. 由三角不等式得 $d(\mathrm{Orb}_f(q_1), x) + d(\mathrm{Orb}_f(q_2), x) \geqslant d(\mathrm{Orb}_f(q_1), \mathrm{Orb}_f(q_2)) = \delta_0$. 故 $d(\mathrm{Orb}_f(q_1), x) \geqslant \frac{1}{2}\delta_0$ 或 $d(\mathrm{Orb}_f(q_2), x) \geqslant \frac{1}{2}\delta_0$.

以下证 f 具有敏感常数为 $\delta = \frac{1}{8}\delta_0$ 的初始条件敏感依赖性. 设 $x \in X$, V 为 x 的某个邻域. 由于 f 的周期点是稠的, 在 x 为中心, δ 为半径的球 $B_\delta(x)$ 与 V 之交集 $U = V \cap B_\delta(x)$ 中, 必存在周期为 n 的周期点 p. 如前所述, 存在另一个周期点 $q \in X$(未必在 U 内), 满足 $d(\mathrm{Orb}_f(q), x) \geqslant 4\delta = \frac{1}{2}\delta_0$. 记 $\hat{V} = \bigcap\limits_{i=0}^{n} f^{-i}(B_\delta(f^{-i}(q)))$. 显然, $\hat{V}$ 为开集, 且 $q \in \hat{V}$, 即 $\hat{V}$ 非空. 根据 f 的拓扑传递性, U 中必有一点 y, 并存在某个自然数 k, 使得 $f^k(y) \in \hat{V}$. 取 $j = \left[\frac{k}{n} + 1\right]$, 其中 $[\cdot]$ 表示该数的整数部分. 于是, $1 \leqslant (nj - n) \leqslant n$. 从而

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(\hat{V}) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

由于 p 是周期点, $f^{nj}(p) = p$. 应用三角不等式

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geqslant d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x)$$

和关系 $p \in B_\delta(x), f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ 可得

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

再次用三角不等式可证

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta \quad 或 \quad d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$$

成立. 在两种情形, 都已找到 V 中的点, 使得 f^{nj} 作用于该点后与 $f^{nj}(x)$ 的距离大于 δ, 即 f 关于初始条件具有敏感依赖性. □

这个定理考虑的是度量空间中的连续映射, 具有一般性. 如果限制空间为一维的, 则以下结论成立:

定理 1.2.4　设 I 表示一个区间 (不必有限), $f: I \to I$ 是连续的拓扑传递映射. 则 (1) f 的周期点在 I 中稠; (2) f 关于初始条件具有敏感依赖性.

下面设 f 为 $C^r, r \geqslant 1$ 微分同胚. 用 $Df(x_0)$ 表示 f 在 $x_0 \in X$ 的线性化算子.

定义 1.2.10　(i) f 的不动点 $\tilde{x}$ 称为稳定的, 倘若对 $\tilde{x}$ 的每个邻域 U, 都存在 $\tilde{x}$ 的邻域 $\tilde{U} \subset U$, 使得若 $x \in \tilde{U}$, 则对一切 $m > 0, f^m(x) \in U$ 成立. 若不动点 $\tilde{x}$ 是稳定的, 并且对一切 $x \in \tilde{U}$, $\lim\limits_{m \to \infty} f^m(x) = \tilde{x}$, 则称不动点 $\tilde{x}$ 是渐近稳定的, 渐近稳

定的不动点又称吸引的不动点.

(ii) f 的周期为 n 的周期点 $\tilde{x}$ 称为双曲的, 倘若 $Df^n(\tilde{x})$ 的所有特征值都不等于 1.

对于二维情形, $\tilde{x}$ 称为双曲的, 倘若 $Df^n(\tilde{x})$ 的两特征值的模一个大于 1, 一个小于 1.

1.3 拓扑共轭、结构稳定性与分枝

设 X 和 Y 是拓扑空间 (C^r 微分流形), $f: X \to X$ 和 $g: Y \to Y$ 是同胚 (C^r 微分同胚).

定义 1.3.1 若存在从空间 X 到空间 Y 的同胚映射 $h: X \to Y$, 使得

$$h \circ f = g \circ h,$$

则称 f 和 g 拓扑共轭 (见图 1.3.1).

显然, 拓扑共轭是整个同胚空间上的等价关系. 拓扑共轭映射 h 把系统 f 过点 x 的轨道变成系统 g 过点 $h(x)$ 的轨道; 把轨道 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 $\omega(\alpha)$ 极限点变成轨道 $\mathrm{Orb}_g h(x)$ 的 $\omega(\alpha)$ 极限点; 把 f 的 n 周期点变成 g 的 n 周期点; 把 f 的非游荡集变成 g 的非游荡集, 等等. 总之, 拓扑共轭的两个系统有相同的轨道结构. 因此, 研究动力系统时, 拓扑共轭的两个系统可看作同一个系统.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

图 1.3.1 拓扑共轭

一个动力系统在什么样的条件下经 “扰动” 而不改变轨道结构? 这就是扰动系统的 “持续性” 问题, 或结构稳定性问题.

所谓扰动系统的 “小扰动”, 与一切映射组成的空间的拓扑有关. 以 Euclid 空间的映射为例, 设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是一个开集, 对映射的集合引进 C^r 弱拓扑, 即 “在任何紧集上直到 r 阶微分一致收敛的拓扑”. 任给 $f \in C^r(U, \mathbf{R}^n)$, f 的基本邻域为

$$u(f, K, \varepsilon) = \{g \in C^r(U, \mathbf{R}^n) | \sup_{x \in X} \|D^j g(x) - D^j f(x)\| < \varepsilon, j = 0, 1, \cdots, r\},$$

其中, $K \subset U$ 是任意紧集, ε 是任意正实数. 注意, 高阶微分 $D^j g(x)$ 是一个 j 重线性映射, $\|D^j g(x)\|$ 表示 j 重线性映射的模.

兹考虑 C^r 流形 M 到 C^r 流形 N 的 C^r 映射集合 $C^r(M, N)$, 我们同样赋予这个集合以 C^r 弱拓扑. 设 $M = N$ 为紧致微分流形, 用 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 表示 M 到 M 的 C^r 微分同胚集合.

定义 1.3.2 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ 称为是 C^r 结构稳定的, 如果存在 f 在 C^r 拓扑中的邻域 u, 使得对任意的 $g \in u$, 都与 f 拓扑共轭.