鉄路工人技术学校教材

数　学

下册

(初　稿)

人民鉄道出版社

铁路工人技术学校教材

数　学

下　册

（初　稿）

刘　立　十　编

铁道部机車車輛修理工厂管理局推荐

人民铁道出版社

一九五七年·北京

本書是根据劳动部1956年制訂的工人技术学校数学教学大綱而編写的。

全書分为上、下兩册：上册包括算术、三角和代数；下册則为几何（平面，立体）。內容深入淺出，結合实际，是工人学習数学的良好書籍。

本書除供作全国各工業部門工人技术学校教材外，並可作为技工的自修讀本。

鉄路工人技术学校教材

数　　学

下　册

刘 立 十 編

人民鉄道出版社出版（北京市霞公府17号）

北京市書刊出版業营業許可証出字第010号

人民鉄道出版社印刷厂印

新华書店發行

書号796　开本$850\times1168\frac{1}{32}$　印張$5\frac{3}{8}$　字数 135千

1957年7月第1版

1957年7月第1版第1次印刷

印数0001——9,000册　　定价（10）0.95元

目　录

第八章　直綫形

第二十四节　基 本 概 念

（一）　几何圖形

1． **几何体**：任何物体都有它一定的材質（包括物理性質和化学性質）、形狀、大小及其所在的位置。

譬如滾珠軸承上的鋼珠和常見的皮球，它們的形狀是相同的，而材質、大小与位置都不同；松木制的車輪模型和依它鑄造的鋼輪，它們的形狀与大小大致相同（鑄件实际比原木模要小1％左右），而材質与位置並不同；工作台上的电灯泡和街头照明用的电灯泡，形狀、大小、材質都可能相同，可是位置却不一样。

这样看来，我們对于物体可以从材質上去分析，也可就形狀等方面来研究。假如只研究物体的形狀和大小，而除开其他的任何性質，这个物体叫做几何体。換句話說：几何体是按物体所佔空間部分的形狀和大小抽象出来的形象。正象沒有糊紙的灯籠骨架与未嵌玻璃的窗戶格扇，可以看成是灯籠或窗戶一样。

2． **几何面**：每件物体，都隨着它的形狀，佔据了一部分空間。譬如一塊木头，就依它的外表和所放置的地方（如地面、工作台等）而与周圍的空气隔开；又如同时裝在一个玻璃杯中的油和水，油与水之間、油与空气之間、油水与玻璃之間，都有着分界的表面，假如我們想揭去一層油膜，就要損及油的本体。很显然，物体的表面是無法离开物体而單独存在，它只能給予我們抽象的概念。所以說：几何体的界是几何面；几何面是只有長度和寬度，而是沒有厚度的。

3． **几何綫与几何点**：物体的表面是具有各式各样形狀的。像皮球、水管、木板等都有不同形狀的表面，当我們把这些物体切开时（如圖１），就出現边緣，無疑地，这些边緣都是使面分开的界限。抽象来看，这就是几何綫。如果把几何綫分成兩部分，分界的地方就是几何点。

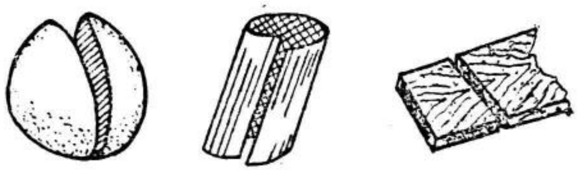


圖　1

由于几何面是沒有厚度的，所以說：几何綫只有長度，並沒有寬度与厚度；几何点只有位置，沒有長度、寬度与厚度。

在自然界中，同样地是找不到几何綫和几何点的。像切开的球、水管等的边緣，仍然只能抽象地表示几何綫的形象，而綫与綫分界的点，也只可想像着它的存在。

4． **几何圖形**：几何体、几何面、几何綫和几何点，在数学上又簡称体、綫、面、点。这些点、綫、面、体或它們的組合叫做几何圖形。

上面提到过，把一条綫分成兩部分，分界的地方就是点，可是分綫的位置是任意选定的，無疑地，綫上包含着無数的点。反过来看，如果把一个点任意移动，它所留下的痕跡必定是一条綫。同样地，綫移动的痕跡可能产生面，面移动的痕跡可能产生体。关于这种形象，也是不难找到类似的事例，譬如把划規的尖端想像成一个点，它在工作物上所画的綫，正是尖端移动的痕跡；又如很細的鋸口可以想像成一条綫，被它鋸开的工作物的断面，也是鋸口移动的痕跡；再如汽錘的底面是一个面，当它錘击时，所經过的空間，有着体的形象。

几何圖形不仅能在空間任意移动，同时在移动时还能不变更它的形狀和大小，这是几何圖形的重要性質。当兩个几何圖形比較时，如果它們处处密合，这兩个几何圖形叫做全等形。

（二） 直綫与平面

把一塊很小的橡筋，用兩只小鑷子夾住兩边，往左右一拉，就会像绷紧了的細絲綫一样，要是在它的彈性限度以內，它只会愈拉愈長愈細，愈绷愈紧愈直。这样，能給我們直綫的概念。工作中常用的直角尺、鋼皮尺，繪圖用的刻度尺、丁字尺、比例尺、三角板等，它們的边沿，也代表着直綫。

拿绷紧了的橡筋，往平滑的玻璃板上隨意一擱，如果它处处都和玻璃板密合，这塊玻璃板能給我們平面的概念。現場中画綫用的平台表面，繪圖用的圖板，教室里的黑板，平靜的水面，也常想象它代表平面。

直綫和平面，有着下面的性質：

Ⅰ．过一点，能引無数条直綫，过兩点能引一条也只能引一条直綫（如圖2）。

圖 2

Ⅱ．連結平面內任意兩点的直綫，它上面所有的点，都会在这个平面內。

几何圖形，分为平面的与空間的兩种，凡圖形上所有的点在一个平面上的叫做平面几何圖形；凡圖形上所有的、不全在一个平面上的叫做空間几何圖形。本書第八、九兩章專門研究平面几何圖形的性質，而在第十章中專門研究空間几何圖形。本章只限于研究直綫組成的平面圖形，所以簡称直綫形。

（三） 射綫与綫段

直綫是最簡單的綫，我們常常想像它能無限伸長的，正像站在华北大平原上看火車道，鉄軌就像从天边鋪来，又通向天边去一样。如果在直綫上任取一点，它可以把直綫分成兩部分，其中每一部分都叫做射綫，这一点又叫做射綫的端点。譬如机車前的灯光，从灯头射出，直到黑暗的远方，这样的『光柱』，可以看成許多射綫的組合。如果在直綫上任取兩点，这兩点間的部分叫做綫段，好像一节鋼軌，只是路軌上的一小段一样。

从上面可以看出：直綫的兩端，是毫無止境的．射綫的一端有限制，而另一端沒有限制；綫段的兩端，都是有限制的。習慣上，我們常把連結兩点間的綫段叫做兩点間的距离。此外，还常利用直尺来画綫段，或者把綫段向兩方延展，其延展的部分，叫做这一綫段的延長綫。

基於上述的性質，使我們在工作中能用卡鉗的兩个尖端的距离，度量着工件是否合乎規格；在繪圖时应用圓規（或分規）兩个尖端的距离去截取、等分或加、減一条已知綫段，使几何圖形便于移动，使圖紙上的綫段，有增加、減少、扩大几倍、縮小几倍的可能，給数学、机械制圖、工程測繪等方面，帶来了莫大的便利。

無論直綫、射綫、綫段或它的延長綫，都有它一定的記法。譬如直綫，可以在綫上任取兩点，就用这兩点的大写字母（数学上常用大写字母表示点）来表示（如圖3左圖，記为直綫AB或BA），或者用一个小写的字母表示（如圖3右圖，記为直綫l）；又如射綫，則以端点字母記在前面，从綫上任取一点的字

圖　3

母連着写在后面（如圖 4，記为射綫ＯＰ）；至於綫段，常用兩端点的字母表示（如圖 5 左圖，記为綫段ＣＤ或ＤＣ，ＤＥ或ＥＤ，ＣＥ或ＥＣ），也可用一个小写的字母表示（如圖 5 右圖可記为綫段 a）；如果在直綫上連續截取兩条綫

圖　4

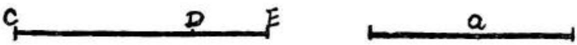


圖　5

段，那末后一綫段可以看成是前一綫段的延長綫，前一綫段也可看成是后一綫段的延長綫（如圖 5 左圖，可以看成延長ＣＤ綫段到Ｅ，ＤＥ是ＣＤ的延長綫，也叫ＤＣ的反向延長綫；同样可以說把ＥＤ綫段延長到Ｃ，ＤＣ是ＥＤ的延長綫，或者說是ＤＥ的反向延長綫）。

（四）　曲綫与折綫

1. 曲綫：　輪子的边緣，旋下来鉄屑的棱，制圖上画过的圓、橢圓、漸伸綫…………，它們都代表着綫。但是这些綫有一个公共的特点，就是沒有任何一段是直的，所以总称曲綫。

曲綫中最常見的是圓，它是由一条射綫繞着端点旋轉一周（如圖 6）时射綫上一点所走的痕跡，它正好是一条封閉曲綫，一般就叫做圓，俗称圓周。射綫的端点叫做圓心，圓上一点与圓心的距离（如ＯＡ）叫做半徑，圓的一部分叫弧（如 $\overset{\frown}{AB}$，『$\frown$』是弧的記号）。

由此可知：在同圓或等圓（同样的半徑所画的兩个不相重合的圓）中，所有的半徑都是相等的。同时也可知道：有了半徑，定了圓心，就能决定一个圓

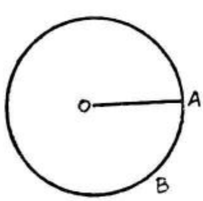


圖　6

2. 折綫：折断的火柴梗，折叠式的刻度尺，帶齒的鋸条边緣，制圖上画过的一些多边形………，这些也表示着一种綫，它

的組成，卻是一些互相啣接的綫段，像这样不在同一直綫上而順次首尾連接的許多綫段叫做折綫。每一綫段叫做折綫的一边，兩边的公共点叫折綫的頂点，各边長度的和叫做折綫的長。

折綫中最常見到的是多边形，它是首端和末端相接的折綫，因此又叫封閉折綫（如圖7）。折綫的边就是多边形的边；每相鄰兩边組成了多边形的角；每不相鄰兩个角頂的連綫，叫做多边形的对角綫。多边形常根据它的边数而叫几边形，如三角形、四边形、………。

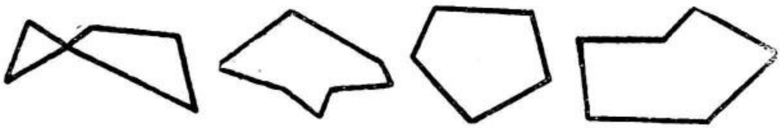
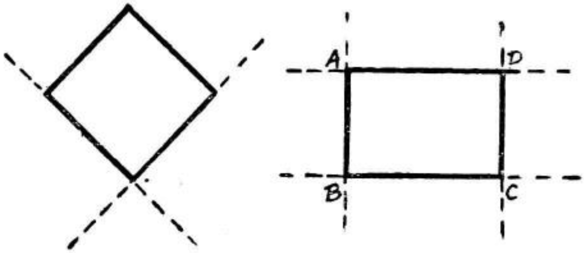


圖　7

（五）　兩条直綫的相关位置

我們从千百次繪圖的經驗中，知道在同一平面內的兩条直綫，只有兩种相关位置，一种是兩条直綫有一个公共点，另一种是兩条直綫無論怎样延長也不会有公共点，前者叫相交綫，后者叫平行綫。像正方形、長方形等圖形，它們都相鄰的兩边，正好在頂点相交，並且只有这一个交点；它們相对的兩边，再延長也不会相交（如圖8）。



I　　　　II

圖　8

由此可知：在同一平面內，兩条直綫相交时，可以也只可以得到一个交点；当兩条直綫平行时，沒有交点。如圖8，Ⅱ，在長方形ABCD（多边形只要順次記各頂点的字母）內，我們可以說AD与AB相交于A，AD与BC互相平行，或者說AD平行于BC，AB平行于CD，並記成AD∥BC，AB∥CD（『∥』是『平行于』的記号）。本行綫具有下面的特性：过已知直綫外一点，可以也只可以引一条直綫与它平行。

（六） 定义，公理与定理

在数学上，关于几何圖形的研究，虽然也常应用計算的方法，来处理一些長短、大小的問題；但是其中較大的一部分，是研究它們的形狀特征及相互位置关系，因而需要应用比較特殊的方法——推理的方法来处理它。

可是推理时所根据的『理』是什么呢？

总的来說，是根据一些正确而完整的叙述——也就是命題来表达它。最常見的有下面三种：

1．**定义**：前面提到过的一些名称，如射綫、綫段、圓、半徑……，以及一些术語，如延長、相交、平行、……，它們都各有一些特殊的性質或情形，如果应用命題的形式来表达它的特性或特殊情形时，这个命題，叫做这一名称或术語的定义。

2．**公理**：某些論据，通过經驗就能判定它是正确的。譬如：『过兩点可以也只能引一条直綫』、『連結平面內任意兩点的直綫，它上面所有的点，都会在这个平面內』、『过已知直綫外一点，可以引也只能引一条直綫与它平行』等，这些都是从千百次实踐中所总結的眞理。又如关于等量或不等量方面的：

Ⅰ．第一个量等（大）于第二个量，第二个量等（大）于第三个量，第一个量等（大）于第三个量；

Ⅱ．等量加等量，它們的和相等；

Ⅲ．等量減等量，它們的差相等；

Ⅳ．等量乘等量，它們的积相等；

Ⅴ．等量除等量，它們的商相等（除数不能为0）；

Ⅵ．全量等于它的各个分量的和，全量大于它的一部分；

Ⅶ．在等式或不等式中，任何一个量都可以用它的等量代入。

像这些不加証明就可採用的眞理叫做公理。

3．定理：根据叙述过的公理、定义推导出来的命题叫做定理。例如：『在同圓或等圓中半徑都相等』，这是根据圓的定义証实的；又如『兩条直綫相交，只能有一个交点』，是根据『过兩点只能作一条直綫』的公理推証的。很明显，証明定理不仅可以依据已經学过的定义和公理，还可应用已經証明过的定理或某些有代表性的習題与例題。

習題五十三

1．什么叫几何体？机車是不是个几何体？

2．什么叫几何面？薄到万分之一公厘厚度的金箔，能不能叫它几何面？

3．什么叫几何綫？細到断面直徑只有五千分之一公厘的白金絲，是不是几何綫？

4．什么叫几何点？用鉛笔在紙上画一点，算不算几何点？

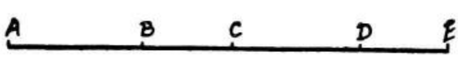
5．在你所熟悉的形象中，举出几个类似直綫与平面的例子。

6．什么叫几何圖形？什么叫全等形？

7．直綫、射綫、綫段，它們之間的主要区别在哪里？

8．几何圖形分哪几种？

9．如圖：



（第9題）

（1）写出綫段AE是綫段AB、BC、CD、DE的和；

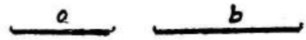
（2）写出綫段AB是綫段AE与綫段BE的差；

（3）如果AB=CD、BC=DE，試証AC=CE；

（4）如果AC=CE、BC=DE，試証AB=CD。

10．如圖，$a=1\frac{1}{2}$公分，b=2公分，作出一条綫段，使它的長等于：

（1）3a+b；（2）3b−2a。



（第 10 題）

历史資料

远在上古时代，人們为了辨識周圍环境中各个物体的形狀、大小和相互的位置，譬如所住的巢穴的部位及其容量，漁猎場所的形狀与大小，所走路徑的方向和远近，猎获物体的粗細与長短，……。因而在产生数量概念和計数需要的同时，也孕育和發展了有关几何圖形的观念及这方面的知識。

最早关于几何圖形方面知識的記載，是始于四千年前古代埃及、巴比倫对于体积、面积的求法。像古代埃及，由于尼罗河水的定期泛濫后，冲毁了地界，为了恢复原来地形，不仅在地面測量与計算上有着一套法則，並且在繪制地形圖上，也积累了一套有用的經驗而被流傳下来。

大約在2500年前，希臘人繼承了这些有关几何圖形的知識，並用之于地段上的測量，今日数学中『几何学』的原名，便是希臘文『測地学』的原意。

后来希臘学者們，發現了許多几何圖形的性質，創造了严井的系統；到紀元前300年左右，由欧几里得綜合着这些成果，編成几何原本一書，系統地叙述理論算术原理，对几何学的發展，起了很大的作用；直到現在，还用它做为編写几何課本的根据。

我国古代劳动人民，已經知道在用器上裝飾一些几何圖形，从已出土的古物来看，新石器时代（公元前1200～5000年）石斧、石鏟上，鑿有整齐的圓孔；在黑陶时期（約在公元前1000年），陶瓷上已有正方形、圓、菱形等几何圖形的花紋。

从古書里，也有不少記載几何知識的書。例如在战国时代墨翟（公元前480～390年）所著墨子一書中，記載許多几何方面的知識，里面也有提到

繪圖工具的，如：『輪匠执其規矩，以度天下之方圓。』（見墨子卷七天文志上第二十六）；也有提到圖形性質的，如『圜，一中同長也；方，柱隅四杂也。』（見墨子經上）。又如周髀算經中，关于直角三角形、矩形、正方形与圆的相互关系，研究得很多，而且也很詳細（見勾股定理）。至于九章算术，里面对求积的算法，記載得相当完备，並可看出在我国古代，大概是先有平面面积的計算，到公元一世紀左右，才完备了立体体积的計算，这样，便形成和發展了我国古代的几何学。

第二十五节 角与三角形

（一）角的意义及記法

書面、桌子面、三角板面，它們每兩条边相交的地方，出現一种几何圖形，抽象来看，这就是角。

角，是指由一点引出兩条射綫所組成的圖形（如圖9，Ⅰ），第二章提到过的直角、銳角、鈍角等都是，無疑地，它是屬于平面几何圖形的；这兩条射綫（OA，OB）叫做角的边，公共的端点（O）叫做角的頂点。

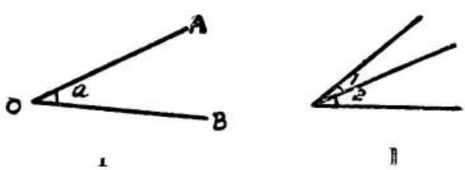


圖 9

角的記法，通常用三个字母如∠AOB或∠BOA（『∠』是『角』的記号）表示，但頂点的字母，一定要写在中間；有时在一个頂点上沒有出現几个角时，可以用頂点上那个字母（如∠O）来表示，也可用一个小写字母（如∠a）或数目字（如圖9，Ⅱ中∠1、∠2）表示它。

角的兩边，把整个平面分成兩部分，如果从兩条边上各取一点，並連成綫段（如圖10中的CD），包含着这一綫段的部分叫

做角的內部，另一部分叫做角的外部；通常所說的角，是指角的內部而言。

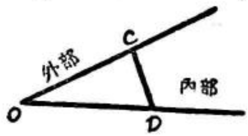


圖 10

由于角的兩条边是兩条射綫，它的大小，只决定于兩条边所張开的程度，与边的長短無关；因此，我們对于角的認識，又有了新的概念，即一条固定了端点的射綫，繞着端点旋轉后，从起始到停止，它所扫过的平面，正好是一个角。

（二）角的度量

1. **角的大小**：任何兩个能够相比的量，在比較大小时，只可能产生三种情况，就是大于、等于或小于；兩个角相比时，同样地只会有这三种情况。

在小学課本里学过用重合法（又叫做叠合法）来比較大小，这是平面圖形条件上的优越性。我們如果仅仅只要比比兩个角誰大誰小，一般就是採用这种方法。譬如圖11中的三組圖，都是比較∠AOB与∠A′O′B′的大小。首先，根据几何圖形可以任意移动的公理，把∠AOB放在∠A′O′B′上，使頂点O与頂点O′重合，一边OA与O′A′重合，並使它們的內部，都在O′A′的同旁，然后看OB落下的位置；当OB与O′B′重合时（如圖11中的Ⅰ），∠AOB＝∠A′O′B′；当OB落

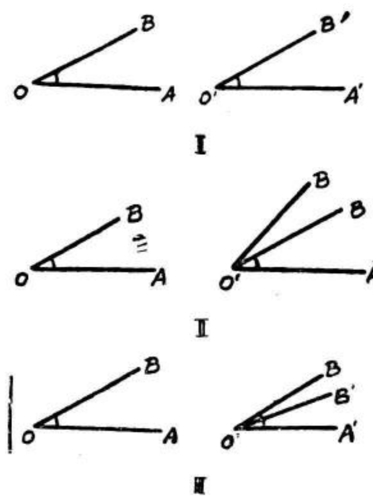


圖 11