上海市中学教师进修教材

初等几何复习与研究

立体部分

上海教育出版社

上海市中学教师进修教材

初等几何复习与研究

立 体 部 分

上海市中学教师进修教材编写组编

上 海 教 育 出 版 社

上海市中学教师进修教材

初等几何复习与研究

立 体 部 分

上海市中学教师进修教材编写组编

上海教育出版社出版

(上 海 永 福 路 123 号)

上海新华书店发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 15.25　字数 335,000

1981 年 8 月第 1 版　1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—38,300 本

统一书号: 7150·2464　　定价: 1.25 元

前　言

这套中学数学教师进修教材，是在上海市教育局领导下，为提高中学在职数学教师的专业水平，以适应四个现代化对中学数学教学工作的需要而编写的.

本书是我组所编《初等几何复习与研究——平面部分》一书的续篇. 为了使读者能居高临下领会和掌握现行《中学数学教学大纲》立体几何教材的全部知识内容，本书在一些知识的内容上论述多一些、深一些，适当地介绍了空间图形的变换及球面几何的初步知识.

本书在各篇的章节里，密切结合教材有关知识内容，精选了一些范例，它们不仅有利巩固和应用有关知识，同时也揭示了某些类型问题解法的规律，供读者参考.

本书在有关章节后，配有一定数量的练习题，在每篇后有复习题，最后还配有总复习题，以帮助读者巩固基础知识，加强基本训练，培养逻辑思维能力和对空间图形的想象力，也有利于提高运算能力和解综合题的技能技巧.

本书在每章后附有小结，概述了本章知识的主要内容和内在联系，并针对某些空间图形结合有关平面图形进行类比，帮助读者加深对教材的领会和认识.

本书由黄松年同志主编，参加本书编写的还有汪恩煦、奚定华、朱钟元同志. 本书蒙上海师范学院杨荣祥同志、上海教育学院凌康源、陈朝龙同志审稿，杨荣祥、黄松年、汪恩煦三同志统稿. 并得到了上海市黄浦区教育局、虹口区教师进修学

院及各区、县教师进修院校和上海市浦明中学、奉贤县中、宝山县中的大力支持，谨此致谢.

由于编者水平有限，时间仓促，本书难免存在缺点、错误，欢迎读者提出批评和修改意见.

上海市中学教师进修教材编写组

1980年10月

目　录

第二篇 多 面 体

第三篇　旋　转　体

第四篇　简单球面几何

第一篇　直线与平面

第一章　平　　面

§1　立体几何研究的对象

几何学是研究几何图形的形状、大小和位置关系的科学．平面几何学，是研究同一平面上几何图形性质的科学．而立体几何学，是研究空间几何图形性质的科学．因此，立体几何学又叫做空间几何学．

我们以前研究平面几何图形时，知道，平面图形是在同一平面上的点与线的集合．在空间里，具有某种关联的点、直线、平面或其部分的集合，叫做空间图形．

人类生活在三维空间，日常所接触到的任何物体，如果撇开它们的物理性质和化学性质，只研究它们的几何性质，即它们的形状、大小和位置关系，可以抽象地看成各种不同的几何体．例如，一块石头或一个球，在几何里，我们就不去考虑它们的质量、硬度和颜色，不管这石头是大理石还是花岗石，不管这球是铁球还是皮球，是红的还是白的、是重的还是轻的，我们只研究它们的形状和大小以及它们各部分的相互位置．因此不论是铁球、皮球、乒乓球甚至宇宙间的星球，都将它们看成是一种球的几何体．

所以，一个空间图形，可以看成是许多物体的抽象形式，正由于几何图形的抽象性，因而使立体几何学所研究的内容非常实际，它不仅在人们生活实践中有广泛的应用，而且在生

产实践和科学实验中是应用广泛的一门基础理论的学科.

和研究平面几何一样,研究空间图形的性质,是运用逻辑推理的方法. 因此,通过立体几何学的学习,对培养逻辑思维能力、对空间图形的想象力,以及运用知识解决实际问题的能力,都有积极的作用.

§2 平面

平面是组成空间图形的重要元素,研究空间图形的问题,首先要研究平面的基本性质.

在立体几何里, 我们常用一个平行四边形来表示一个平面, 这是根据制图学的投影原理. 这样能更好地表示空间图形中直线与平面之间的相互位置关系, 并且使在一个平面上所画出的空间图形富于立体感. 但并非意味着它所表示的平面是有界的,而是可以无限扩展的.

用平行四边形来表示平面, 按制图学斜二轴测投影的画法规定,通常将它的一个锐角画成 45° 或 60°, 横边画成竖边的两倍. 在立体几何里, 又规定用大写字母或希腊字母标在锐角内(或锐角外)并用它来表示平面. 如图 1·1·1 中的平面

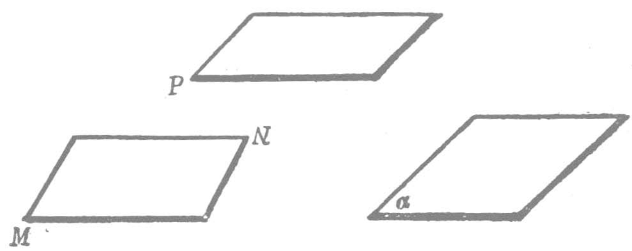

图 1·1·1

P、平面 MN 或平面 α. 但有时根据制图学里正等轴测投影的画法，把平面画成一个锐角为 45° 或 60° 的菱形.

§3 平面的基本性质

人类从长期的生活实际和生产实际中，总结出平面有下面的基本性质:

公理 1 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那末这条直线上所有的点都在这平面内.

泥水工人平整地面时，常用一根绳子拉紧它的两端，任意地放在地面上，当绳子的两端点与地面重合后，如果绳子与地面处处重合，那末地面是平面，就是这个道理. 因此，也可以说:

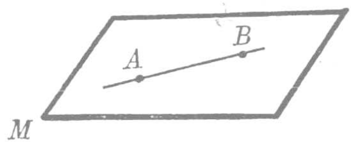

图 1·1·2

如果一个面上任意两点的直线都在这个面上，那末这个面就是平面.

公理 2 过不在一直线上的任意三个点，确定一个平面.*

测量上采用的三足架以及用三根杆子中间扎在一起，下端张开架在地面上做成的简易的晒衣架子，都是应用了公理 2 的性质.

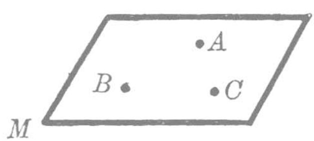

图 1·1·3

公理 3 如果两个平面有一个公共点，那末它们相交于过这点的一条直线.

天花板和墙壁的交线，将一张纸折迭起来它的折痕，这些

---

* 所谓确定一个平面，是指存在一个平面，且只有一个平面的意思. 也就是说明了平面的存在性和唯一性.

都说明了这个性质.

定义　有一条公共直线的两个平面,叫做相交的平面.

画两个相交平面的图形,通常将其中一个平面被另一个平面所遮住的线段,画成虚线(如图1·1·4),或不画(如图1·1·5).

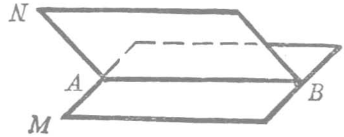

图 1·1·4

如图1·1·6中,平面 M 和平面 N 初看起来,它们只有一个公共点 C,但由于平面是可以无限扩展的,所以它们是相交于过点 C 的直线 AB.

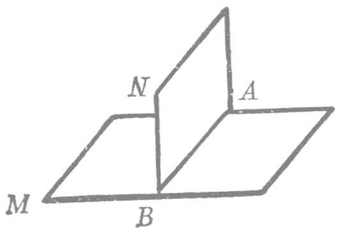

图 1·1·5

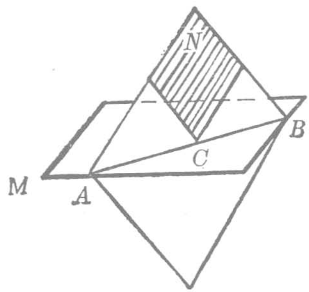

图 1·1·6

根据上面三条公理,可以推导出下面的三条推论.

推论1　过一条直线及这直线外一点,可以确定一个平面.

设直线 AB 及 AB 外一点 C,在直线 AB 上任取 A、B 两点,这样 A、B、C 三点不在同一直线上,根据公理2,可知过 A、B、C 三点可确定平面 P.又根据公理1,可知,直线 AB 必在平面 P 上.

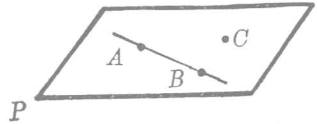

图 1·1·7

∴　过直线 AB 及 AB 外一点 C, 确定一个平面 P.

推论2　经过一条直线(或经过两个点)可以作无限多个平面.

设直线 AB, 在 AB 外任取一点 P. 根据推论1, 可知, 过 AB 及点 P 可确定一个平面 α. 同理, 可作平面 β、γ、…. 因此, 可以作无限多个平面.

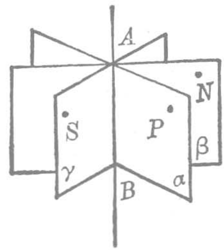

图 1·1·8

推论3　过两条相交的直线, 可以确定一个平面.

设直线 AB、CD 相交于点 O, 除点 O 外在 AB 上取一点 B. 在 CD 上取一点 C, 则 O、B、C 三点不在同一直线上.

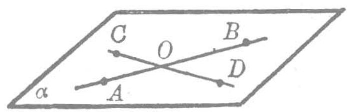

图 1·1·9

∴　过 O、B、C 三点可确定一个平面 α.

∵　直线 AB、CD 分别有两个点在这平面 α 内,

∴　直线 AB 及 CD 都在平面 α 内.

∴　过相交直线 AB、CD 确定一个平面 α.

推论4　过两条平行直线, 可以确定一个平面.

根据平行线的定义, 两条平行线在同一平面内.

∴　过两条平行线可以确定一个平面.

如图 1·1·10 中, 直线 $AB /\!/ CD$, 则过 AB 和 CD 确定一个平面 α.

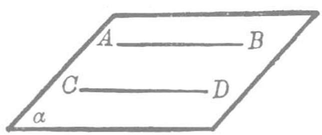

图 1·1·10

例1　一条直线和两条平行直线相交, 证明这三条

直线在同一平面内.

已知 直线$l // m$，直线n和直线l及m分别相交于A、B.(如图1·1·11)

求证 直线l、m、n都在同一平面内.

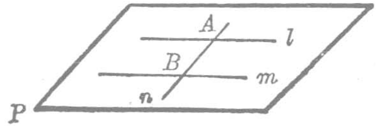

图 1·1·11

证明

∵ 直线$l // m$,

∴ 过l、m可以确定一个平面P.

∵ 直线n与l、m分别相交于A、B,

∴ 直线n上有两个点A、B在平面P内.

∴ 直线n在平面P内.

即 直线l、m、n都在同一平面P内.

例2 空间四条直线，其中每两条都相交，试问，这四条直线可以确定几个平面?

解 1. 当这四条直线不过同一点时，可分两种情况:

(1) 没有三条直线相交于一点;(如图1·1·12)

(2) 其中有三条直线相交于一点.(如图1·1·13)

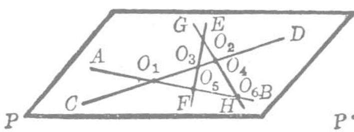

图 1·1·12

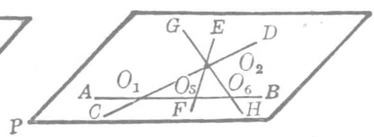

图 1·1·13

∵ AB与CD相交于O_1点,

∴ 过AB、CD可确定一个平面P.

∵ EF与AB、CD分别相交,

∴ EF在平面P内.