

上海市中学教师进修教材

初等几何复习与研究

立体部分

上海教育出版社



0133/22

上海市中学教师进修教材

初等几何复习与研究

立 体 部 分

上海市中学教师进修教材编写组编



23169608

上海教育出版社

064234

上海市中学教师进修教材

初等几何复习与研究

立 体 部 分

上海市中学教师进修教材编写组编

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

上海新华书店发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 15.25 字数 335,000

1981年8月第1版 1981年8月第1次印刷

印数 1—38,300本

统一书号: 7150·2464 定价: 1.25元

前 言

这套中学数学教师进修教材,是在上海市教育局领导下,为提高中学在职数学教师的专业水平,以适应四个现代化对中学数学教学工作的需要而编写的。

本书是我组所编《初等几何复习与研究——平面部分》一书的续篇。为了使读者能居高临下领会和掌握现行《中学数学教学大纲》立体几何教材的全部知识内容,本书在一些知识的内容上论述多一些、深一些,适当地介绍了空间图形的变换及球面几何的初步知识。

本书在各篇的章节里,密切结合教材有关知识内容,精选了一些范例,它们不仅有利巩固和应用有关知识,同时也揭示了某些类型问题解法的规律,供读者参考。

本书在有关章节后,配有一定数量的练习题,在每篇后有复习题,最后还配有总复习题,以帮助读者巩固基础知识,加强基本训练,培养逻辑思维能力和对空间图形的想象力,也有利于提高运算能力和解综合题的技能技巧。

本书在每章后附有小结,概述了本章知识的主要内容和内在联系,并针对某些空间图形结合有关平面图形进行类比,帮助读者加深对教材的领会和认识。

本书由黄松年同志主编,参加本书编写的还有汪恩煦、奚定华、朱钟元同志。本书蒙上海师范学院杨荣祥同志、上海教育学院凌康源、陈朝龙同志审稿,杨荣祥、黄松年、汪恩煦三同志统稿。并得到了上海市黄浦区教育局、虹口区教师进修学

院及各区、县教师进修院校和上海市浦明中学、奉贤县中、宝山县中的大力支持,谨此致谢。

由于编者水平有限,时间仓促,本书难免存在缺点、错误,欢迎读者提出批评和修改意见。

上海市中学教师进修教材编写组

1980年10月

目 录

前言	1
----------	---

第一篇 直线与平面

第一章 平面	1
§ 1 立体几何研究的对象	1
§ 2 平面	2
§ 3 平面的基本性质	3
§ 4 关于空间图形的作图问题	8
§ 5 水平放置的平面图形的画法	10
§ 6 小结	13
第二章 直线和直线的位置关系	20
§ 1 空间两条直线的相互位置	20
§ 2 空间平行直线的关系	25
§ 3 空间相交直线的关系	31
§ 4 异面直线所成的角	33
§ 5 小结	36
第三章 直线和平面的位置关系	39
§ 1 空间直线和平面的相互位置	40
§ 2 直线和平面的平行	41
§ 3 直线和平面的垂直	47
§ 4 三垂线定理	60
§ 5 斜线的性质	67

§ 6	直线和平面所成的角	69
§ 7	小结	74
第四章	平面和平面的位置关系	78
§ 1	空间平面和平面的相互位置	78
§ 2	平面和平面的平行	82
§ 3	平面和平面的相交	97
§ 4	平面和平面的互相垂直	105
§ 5	异面直线的公垂线	116
§ 6	射影	123
§ 7	二面角的平分面	130
§ 8	空间图形的基本轨迹	133
§ 9	小结	137
第五章	三面角	145
§ 1	多面角	145
§ 2	三面角	147
§ 3	多面角的全等和对称	153
§ 4	三面角全等的判定	156
§ 5	多面角的性质	164
§ 6	小结	172
复习题一		177

第二篇 多 面 体

第一章	多面体的一般性质	184
§ 1	多面体	184
§ 2	多面体的面角数、棱数、顶点数、面数 之间的关系	186
§ 3	小结	189

第二章	棱柱	192
§ 1	棱柱及其基本性质	192
§ 2	平行六面体	194
§ 3	棱柱直观图的画法	199
§ 4	棱柱截面的画法	200
§ 5	棱柱的展开面及其面积	208
§ 6	棱柱的体积	210
§ 7	小结	219
第三章	棱锥	224
§ 1	棱锥及其基本性质	224
§ 2	棱锥直观图的画法	226
§ 3	平行于棱锥的底面的截面	227
§ 4	棱锥截面的画法	234
§ 5	棱锥的展开面及其面积	238
§ 6	棱锥的体积	239
§ 7	小结	246
第四章	棱台	254
§ 1	棱台及其基本性质	254
§ 2	棱台直观图的画法	257
§ 3	棱台截面的画法	258
§ 4	棱台的展开面及其面积	260
§ 5	棱台的体积	261
§ 6	拟柱体	268
§ 7	小结	275
第五章	正多面体	278
§ 1	正多面体	278
§ 2	正多面体直观图的画法	283

§ 3	正多面体的性质	285
§ 4	正多面体的计算	289
§ 5	小结	296
第六章	空间图形的变换	298
§ 1	合同变换	299
§ 2	对称图形	313
§ 3	位似变换	319
§ 4	小结	323
	复习题二	324

第三篇 旋 转 体

第一章	圆柱	329
§ 1	旋转体	329
§ 2	圆柱及其基本性质	329
§ 3	圆柱直观图的画法	330
§ 4	圆柱的几个常见截面	331
§ 5	圆柱的展开面及其面积	337
§ 6	圆柱的体积	340
§ 7	小结	343
第二章	圆锥	346
§ 1	圆锥及其基本性质	346
§ 2	圆锥直观图的画法	347
§ 3	圆锥的几个常见截面	347
§ 4	圆锥的展开面及其面积	355
§ 5	圆锥的体积	357
§ 6	小结	361
第三章	圆台	364

§ 1	圆台及其基本性质	364
§ 2	圆台直观图的画法	365
§ 3	圆台的几个常见截面	365
§ 4	圆台的展开面及其面积	370
§ 5	圆台的体积	374
§ 6	小结	381
第四章	球	384
§ 1	球及其基本性质	384
§ 2	球的直观图的画法	386
§ 3	球与直线、平面和球之间的位置关系	388
§ 4	球与四面体及球与圆柱、圆锥和圆台	403
§ 5	球的面积	413
§ 6	球的体积	422
§ 7	小结	433
	复习题三	436

第四篇 简单球面几何

第一章	球面三角形	441
§ 1	球面上的大圆	441
§ 2	球面角	442
§ 3	球面三角形	445
§ 4	球面三角形边和角的性质	449
§ 5	球面三角形的相等	451
§ 6	球面三角形的边和角的关系	453
§ 7	小结	454
第二章	球面三角形的计算	456
§ 1	一点到一圆的球面距离	456

§ 2 球面三角形中边和角的一些计算	460
§ 3 球面三角形的面积	465
§ 4 小结	467
复习题四	470
总复习题	471

第一篇 直线与平面

第一章 平 面

§1 立体几何研究的对象

几何学是研究几何图形的形状、大小和位置关系的科学。平面几何学，是研究同一平面上几何图形性质的科学。而立体几何学，是研究空间几何图形性质的科学。因此，立体几何学又叫做空间几何学。

我们以前研究平面几何图形时，知道，平面图形是在同一平面上的点与线的集合。在空间里，具有某种关联的点、直线、平面或其部分的集合，叫做空间图形。

人类生活在三维空间，日常所接触到的任何物体，如果撇开它们的物理性质和化学性质，只研究它们的几何性质，即它们的形状、大小和位置关系，可以抽象地看成各种不同的几何体。例如，一块石头或一个球，在几何里，我们就不去考虑它们的质量、硬度和颜色，不管这石头是大理石还是花岗石，不管这球是铁球还是皮球，是红的还是白的、是重的还是轻的，我们只研究它们的形状和大小以及它们各部分的相互位置。因此不论是铁球、皮球、乒乓球甚至宇宙间的星球，都将它们看成是一种球的几何体。

所以，一个空间图形，可以看成是许多物体的抽象形式，正由于几何图形的抽象性，因而使立体几何学所研究的内容非常实际，它不仅在人们生活实践中有广泛的应用，而且在生

产实践和科学实验中是应用广泛的一门基础理论的学科。

和研究平面几何一样,研究空间图形的性质,是运用逻辑推理的方法。因此,通过立体几何学的学习,对培养逻辑思维能力、对空间图形的想象力,以及运用知识解决实际问题的能力,都有积极的作用。

§2 平面

平面是组成空间图形的重要元素,研究空间图形的问题,首先要研究平面的基本性质。

在立体几何里,我们常用一个平行四边形来表示一个平面,这是根据制图学的投影原理。这样能更好地表示空间图形中直线与平面之间的相互位置关系,并且使在一个平面上所画出的空间图形富于立体感。但并非意味着它所表示的平面是有界的,而是可以无限扩展的。

用平行四边形来表示平面,按制图学斜二轴测投影的画法规定,通常将它的一个锐角画成 45° 或 60° ,横边画成竖边的两倍。在立体几何里,又规定用大写字母或希腊字母标在锐角内(或锐角外)并用它来表示平面。如图 1.1.1 中的平面

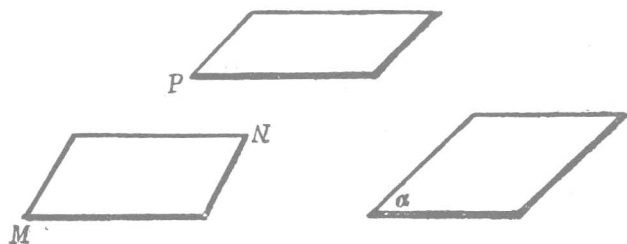


图 1.1.1

P 、平面 MN 或平面 α 。但有时根据制图学里正等轴测投影的画法,把平面画成一个锐角为 45° 或 60° 的菱形。

§3 平面的基本性质

人类从长期的生活实际和生产实际中,总结出平面有下面的基本性质:

公理 1 如果一条直线上有两个点在一个平面内,那末这条直线上所有的点都在这平面内。

泥水工人平整地面时,常用一根绳子拉紧它的两端,任意地放在地面上,当绳子的两端点与地面重合后,

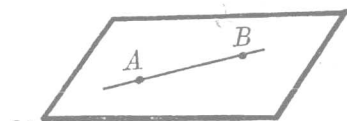


图 1.1.2

如果绳子与地面处处重合,那末地面是平面,就是这个道理。因此,也可以说:

如果一个面上任意两点的直线都在这个面上,那末这个面就是平面。

公理 2 过不在一直线上的任意三个点,确定一个平面。*

测量上采用的三足架以及用三根杆子中间扎在一起,下端张开架在地面上做成的简易的晒衣架,都是应用了公理 2 的性质。

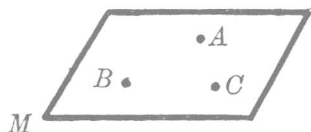


图 1.1.3

公理 3 如果两个平面有一个公共点,那末它们相交于过这点的一条直线。

天花板和墙壁的交线,将一张纸折迭起来它的折痕,这些

* 所谓确定一个平面,是指存在一个平面,且只有一个平面的意思。也就是说明了平面的存在性和唯一性。

都说明了这个性质。

定义 有一条公共直线的两个平面,叫做相交的平面。

画两个相交平面的图形,通常将其中一个平面被另一个平面所遮住的线段,画成虚线(如图 1.1.4),或不画(如图 1.1.5)。

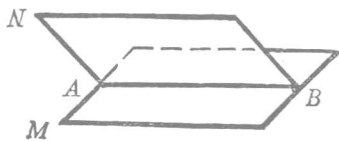


图 1.1.4

如图 1.1.6 中,平面 M 和平面 N 初看起来,它们只有一个公共点 O ,但由于平面是可以无限扩展的,所以它们是相交于过点 C 的直线 AB 。

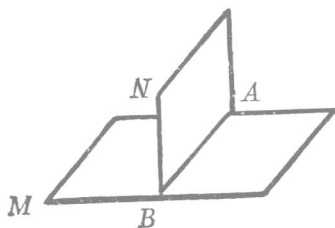


图 1.1.5

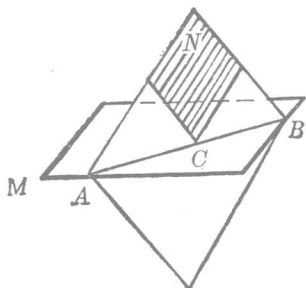


图 1.1.6

根据上面三条公理,可以推导出下面的三条推论。

推论 1 过一条直线及这直线外一点,可以确定一个平面。

设直线 AB 及 AB 外一点 C , 在直线 AB 上任取 A, B 两点, 这样 A, B, C 三点不在同一直线上, 根据公理 2, 可知过 A, B, C 三点可确定平面 P . 又根据公理 1, 可知, 直线 AB 必在平面 P 上。

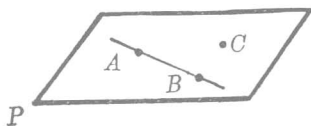


图 1.1.7

$\therefore$ 过直线 AB 及 AB 外一点 C , 确定一个平面 P .

推论 2 经过一条直线 (或经过两个点) 可以作无限多个平面.

设直线 AB , 在 AB 外任取一点 P . 根据推论 1, 可知, 过 AB 及点 P 可确定一个平面 α . 同理, 可作平面 $\beta, \gamma, \dots$. 因此, 可以作无限多个平面.

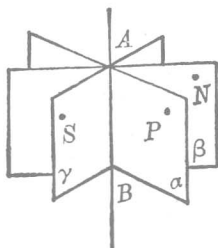


图 1.1.8

推论 3 过两条相交的直线, 可以确定一个平面.

设直线 AB, CD 相交于点 O , 除点 O 外在 AB 上取一点 B . 在 CD 上取一点 C , 则 O, B, C 三点不在同一直线上.

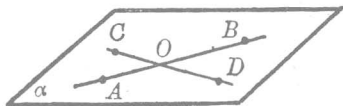


图 1.1.9

$\therefore$ 过 O, B, C 三点可确定一个平面 α .

$\because$ 直线 AB, CD 分别有两个点在这平面 α 内,

$\therefore$ 直线 AB 及 CD 都在平面 α 内.

$\therefore$ 过相交直线 AB, CD 确定一个平面 α .

推论 4 过两条平行直线, 可以确定一个平面.

根据平行线的定义, 两条平行线在同一平面内.

$\therefore$ 过两条平行线可以确定一个平面.

如图 1.1.10 中, 直线 $AB \parallel CD$, 则过 AB 和 CD 确定一个平面 α .

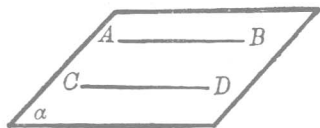


图 1.1.10

例 1 一条直线和两条平行直线相交, 证明这三条

直线在同一平面内.

已知 直线 $l \parallel m$, 直线 n 和直线 l 及 m 分别相交于 A 、 B . (如图 1.1.11)

求证 直线 l 、 m 、 n 都在同一平面内.

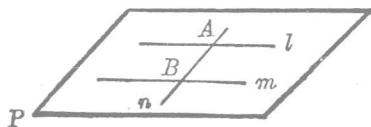


图 1.1.11

证明

$\because$ 直线 $l \parallel m$,

$\therefore$ 过 l 、 m 可以确定一个平面 P .

$\because$ 直线 n 与 l 、 m 分别相交于 A 、 B ,

$\therefore$ 直线 n 上有两个点 A 、 B 在平面 P 内.

$\therefore$ 直线 n 在平面 P 内.

即 直线 l 、 m 、 n 都在同一平面 P 内.

例 2 空间四条直线, 其中每两条都相交, 试问, 这四条直线可以确定几个平面?

解 1. 当这四条直线不过同一点时, 可分两种情况:

(1) 没有三条直线相交于一点; (如图 1.1.12)

(2) 其中有三条直线相交于一点. (如图 1.1.13)

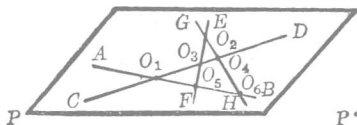


图 1.1.12

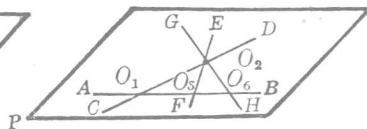


图 1.1.13

$\because$ AB 与 CD 相交于 O_1 点,

$\therefore$ 过 AB 、 CD 可确定一个平面 P .

$\because$ EF 与 AB 、 CD 分别相交,

$\therefore$ EF 在平面 P 内.