恩波学校21世纪学习辅导系列

高等数学典型题精解

——解题思路 · 方法 · 技巧

同济大学《高等数学》(第四版)

同济大学数学教研室　陈兰祥主编

理的应用受到限制. 如果把$f(a)=f(b)$这个条件取消,但仍保留其余两个条件,并相应地改变结论,那末就得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

拉格朗日中值定理　如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,那末在(a,b)内至少有……$<\xi<b)$,使等式

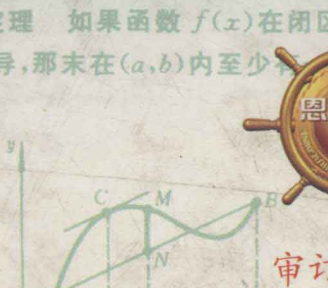

图 3-2

审订/恩　波

学苑出版社

高等数学典型题精解

——解题思路、方法、技巧

主编:同济大学数学教研室陈兰祥教授

编委:(按姓氏笔画为序)

东 南 大 学　王海燕

同 济 大 学　刘庆生

上海交通大学　李　铮

同 济 大 学　陈兰祥

学苑出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学典型题精解：解题思路、方法、技巧/陈兰祥主编．—北京：学苑出版社，2000.10

ISBN 7－5077－1779－8

Ⅰ．高…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．高等数学－解题　Ⅳ．013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 71399 号

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街 11 号　100036

北京市通县长凌营印刷厂印刷　新华书店经销

850×1168 开本　23.75 印张　594 千字

2000 年 10 月北京第 1 版　2000 年 10 月北京第 1 次印刷

印数：0001—5000 册　定价：22.00 元

内 容 提 要

本书是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试高等数学考试要求编写的，是与《高等数学复习指南》配套的复习参考书。

本书侧重于通过高等数学各种典型题型的分析，介绍各种解题思路、方法和运算的技巧，帮助学员把高等数学中各个概念予以融会贯通，拓宽解题思路，提高分析解决问题的能力，掌握解题的技巧。

本书可供理、工、医、农（非数学专业）大学生提高高等数学学习质量和参加硕士生入学考试的考生复习高等数学使用，另外也可作为从事高等数学教学的教师和非数学专业的研究生的参考书。

逐字逐句深刻理解，并在理解基础上随时都能正确表达。

2. 各章节的“知识网络图”指出了各知识点的有机联系，应该予以充分理解。

3. “概念的内涵，重点和难点”在于帮助学员深入理解基本概念，抓住事物的主要矛盾，理清思路。

4. “典型例题解析”中介绍了与基本概念有关的各种题型。在学习时应带着三个问题去思考：

① 这种题型是怎样提出的？

② 它反映了基本概念的什么内涵？

③ 用什么途径解决的。

5. “综合例题”是涉及多个知识点的题目，在学习时应着重考虑该题目究竟与那些知识点相关连，是如何解决的，这对于基本概念的融会贯通，提高分析问题的能力起到十分重要的作用，其中包括了同济教科书中的大部分难题和部分研究生入学试题。

6. “综合练习”是供学员自我考核的。“参考答案及其提示”应该在独立思考解题以后再予以核对检查。

《高等数学典型题精解——解题思路、方法、技巧》仍按相同的章排列，但“节”的编写有所变动，它是以题型为主线，介绍解决此种题型的各种方法和有关概念的灵活运用。目的在于拓宽解题思路，提高分析解答的能力。

在使用该书时我们有以下建议：

1. 由于本书是以“题型”为主线，涉及的概念包含高等数学教材中各个章节的知识点，应积极探索一个题目的多种解法，它往往使您对各个有关概念的相互关系有更深刻的理解，通过各种解法的比较，掌握如何用最简捷的方法去解决问题。

2. 针对各种题型，本书还介绍了许多新的更简捷的解题方法（在大纲知识点要求范围内）这些内容对提高解题能力十分有帮助的。

3. 本书中大部分例题都有一定的难度，它包括了大部分历

届研究生入学试题，。“解题思路”和“分析”能帮助您迅速地找到解决问题的关键，应仔细体会并学会这些思维方法。

由于这两本书是同步编写的。两本书的相应章是紧密联系，难度由浅入深。但由于主线不一样，可以帮助学员从不同侧面深入理解基本概念并达到知识点的融会贯通。

两本书可以分别使用。然而同时两本书在手更为有利，对于在学学生来说通过后面一册可及时了解到研究生入学时应达到的要求；而对于报考研究生的学生在复习过程中能随时从前面一册中查找需要的基本概念和基本例题，减少下册中学习的困难。

本套复习资料由同济大学数学系陈兰祥教授主编。负责全书的统一协调、编纂和定稿，由同济大学陈兰祥、刘庆生、上海交通大学李铮、东南大学王海燕共同编写。

其中第一、四、十一章由李铮执笔；第二、三、十二章由陈兰祥执笔，第五、六、十章由王海燕执笔，第七、八、九章由刘庆生执笔。

由于四位同志分别撰写，各自章节按排和风格可能略有不同，虽经协调，存在一定差异仍在所难免。另外由于编者的水平所限，难免有错误与不妥之处。欢迎来信批评指正。

本套复习资料属于恩波二十一世纪考试辅导丛书系列，对于恩波编辑部的大力支持，编者表示衷心的感谢。

编者

目　录

第一章　函数与极限

考研大纲要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单应用问题的函数关系式.

6. 理解极限的概念,理解函数左、右极限的概念,以及极限存在与左、右极限之间的关系.

7. 掌握极限的性质及四则运算法则.

8. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

9. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数连续性的概念(含左、右连续),会判别函数间断点的类型.

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

第一节　函　　数

题型(一)　求函数的定义域

例 1.1　下列函数的定义域

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} + \arcsin \dfrac{2x + 1}{3}$

(2) $y = \dfrac{1}{\ln|x - 1|}$

【解题思路】　熟记下列简单函数的定义域:

$y=\dfrac{1}{x}, x\neq 0$；$y=\sqrt{x}, x\geqslant 0$；$y=\log_a x, x>0$；

$y=\arcsin x, y=\arccos x, |x|\leqslant 1$

求较复杂函数的定义域，就是求解各个简单函数的定义域所应满足的不等式组的解集．

解：(1) $\begin{cases}2x-x^2>0\\ \left|\dfrac{2x+1}{3}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<2\\ -2\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

定义域为：$0<x\leqslant 1$ 或 $(0,1]$

(2) $\begin{cases}\ln|x-1|\neq 0\\ |x-1|\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0, x\neq 2\\ x\neq 1\end{cases}$

定义域为：$x\neq 0, x\neq 1, x\neq 2$，或 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

例 1.2 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域．（1998 年数学一考研题）

【解题思路】 解出 $\varphi(x)$ 然后确定其定义域．

解：$f(x)=e^{x^2}$，所以 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$

又因为 $f(\varphi(x))=1-x$，所以 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$

所以 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$　由 $\varphi(x)\geqslant 0$ 可得

$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x)\geqslant 0$

即　$x\leqslant 0$ 或 $(-\infty,0]$

例 1.3 已知 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，则 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$ 的定义域为________（1992 年数学五考研题）

【解题思路】 此题由于是填空题，所以已给出了 $\varphi(x)$ 的表达式．

解：定义域为 $|1-x^2|\leqslant 1$

即 $0\leqslant x^2\leqslant 2$　或 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

例 1.4 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域．

【解题思路】 $y=f(x)$ 的定义域是指 x 的变化范围，$y=f(\varphi(x))$ 的定义域同样也是指 x 的变化范围，已知 $y=f(x)$ 的定义域求 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域的一般方法令 $t=\varphi(x)$，解出 x 的变化范围．

解:令 $t=\varphi(x)$,由题意知 $f(t)$ 的定义域为$(0,1]$

即 $0<1-\ln x\leqslant 1$ 解得 $1\leqslant x<e$

所以 $f(\varphi(x))$ 的定义域为$[1,e)$

例 1.5 (选择题) 设 $f(x-1)$ 的定义域为$[0,a](a>0)$,则 $f(x)$ 的定义域为(　　)

(A) $[1,a+1]$　　(B) $[-1,a-1]$

(C) $[a-1,a]$　　(D) $[a,a+1]$

【解题思路】 已知 $f(\varphi(x))$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域的一般方法,从 x 的变化范围解出 $t=\varphi(x)$ 的变化范围.

解:$f(x-1)$ 的定义域为$[0,a]$ 则 $0\leqslant x\leqslant a$

$t=x-1$ 则 $-1\leqslant t\leqslant a-1$

故 $f(x)$ 的定义域为$[-1,a-1]$ 故选(B).

【常见错误】 选(A) 原因概念不清,混淆定义域所指 x 的变化范围这一重要概念.

例 1.6 设 $f(x)$ 的定义域为$[-1,1]$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域.

解:分别考虑 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 的定义域再解联立不等式,由于

$f(x)$ 的定义域为$[-1,1]$

所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故由 $-1\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow -1-a\leqslant x\leqslant 1-a$

由 $-1\leqslant x-a\leqslant 1\Rightarrow a-1\leqslant x\leqslant 1+a$

因此 $\begin{cases}-1-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a-1\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$

由于 $a>0$ 所以 当 $a-1<1-a$ 即 $a<1$ 时,定义域为$[a-1,1-a]$,

当 $a-1>1-a$ 即 $a>1$ 时定义域为空集 Φ,

$a-1=1-a$,即 $a=1$ 时,定义域为 $x=0$.

题型(二) 求函数 $f(x)$ 的表达式

例 1.7 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$ (a,b,c 均为常数,且 $|a|\neq|b|$,求:$f(x)$.

【解题思路】 函数定义的两个要素:定义域和对应规律,当两个函数定

义域相同、对应规律一致时，这两个函数表示同一个函数．如：$y=f(x)$，$s=f(t)$ 均表示同一函数，这一性质又称为函数表示法的"变量无关性"．

解：$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$ (1)

取 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}$ 故

$af(\frac{1}{t})+bf(t)=ct$

所以 $af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$ (2)

联立(1)、(2) 解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx)$

例 1.8 设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求：$f(x)$．

解：$\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}$

解得 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1$

例 1.9 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\0, & |x|>1\end{cases}$ 则 $f(f(x))=$ ______．

【解题思路】 分段函数一般说来不是初等函数，分段函数的讨论是高等数学的重点之一，分段函数的复合函数一般采用分层次讨论的方法．

解：$f(f(x))=\begin{cases}1, & \text{当 } |f(x)|\leqslant 1\\0, & \text{当 } |f(x)|>1\end{cases}$

而 $|f(x)|\leqslant 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$\therefore$ $f(f(x))=1$ 故填 $\underline{\ 1\ }$．

例 1.10 （选择题）设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\x+2, & x>0.\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 则 $g(f(x))=$（ ）

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

（1997 年数学二考研题）

解：$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$

而 $\quad x \geqslant 0, f(x) = -x \leqslant 0$

$\quad x < 0, f(x) = x^2 > 0$

所以 $g(f(x)) = \begin{cases} 2 + x, & x \geqslant 0 \\ x^2 + x, & x < 0. \end{cases}$

故选(D)

例 1.11 设 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \leqslant 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ 求:$f(f(x))$.

解:$f(f(x)) = \begin{cases} 4 - f^2(x), & |f(x)| \leqslant 2 \\ 0, & |f(x)| > 2 \end{cases}$

当 $\quad |x| > 2$ 时,$f(x) = 0$. $\cancel{|f(x)| \leqslant 2},$

当 $\quad |x| \leqslant 2$ 时,$f(x) = 4 - x^2$.

① 由 $\quad |4 - x^2| \leqslant 2 \quad$ 可解得 $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{6}$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{6} \\ |x| \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant 2$$

② 由 $\quad |4 - x^2| > 2 \quad$ 可解得 $|x| < \sqrt{2}$ 或 $|x| > \sqrt{6}$

$$\begin{cases} |x| < \sqrt{2} \\ |x| \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \text{ 或 } \begin{cases} |x| > \sqrt{6} \\ |x| \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{无解.}$$

因此 $\quad f(f(x)) = \begin{cases} 0, & |x| < \sqrt{2} \\ 4 - (4 - x^2)^2, & \sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant 2 \\ 4 - 0^2, & |x| > 2. \end{cases}$

例 1.12 (选择题) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0 \\ x^2 + x, & x > 0. \end{cases}$ 则(　　)

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0 \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$

(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$ (1999 年数学三考研题).

解:$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leqslant 0 \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0 \end{cases}$

$$=\begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

$f(1)=2f(1)$

故选(D).

例 1.13 设 $f(x)$ 对任意非零数 x_1, x_2 有：$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$，且 $f'(1) = 1$. 求：$f(x)$.

$f(1)=0$

【解题思路】 高等数学的重要研究对象是函数，因此求函数的表示式的内容可以遍及高等数学的各个章节，此例为利用导数定义求 $f(x)$.

解：当 $x \neq 0$ 时.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[x \cdot (1 + \frac{\Delta x}{x})] - f(x \cdot 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{f(1 + \frac{\Delta x}{x}) - f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} f'(1) = \frac{1}{x}$$

所以 $\quad f(x) = \ln|x| + c$

由于 $\quad f(1) = f(1) + f(1)$

$\therefore \quad f(1) = 0 \qquad \therefore \quad c = 0$

故 $\quad f(x) = \ln|x|$

例 1.14 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，$f'(0)$ 存在，且对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$，恒有

$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$，求：$f(x)$.

解：此题也是利用导数定义求 $f(x)$ 的例子．注意：不能直接对 $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 两边求导．

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + f(\Delta x) + 2x\Delta x - f(x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} + 2x) = f'(0) + 2x.$$

所以 $f(x) = f'(0)x + x^2 + c$

令 $y = 0$ 则 $f(x) = f(x) + f(0) + 0$ $\therefore f(0) = 0$

$\therefore$ $c = 0.$ 故 $f(x) = f'(0)x + x^2.$

例 1.15 设 $f(x)$ 是连续函数，且

$f(x) = \cos^4 x + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$，求：$f(x)$.

【解题思路】 利用连续函数必可积，求 $f(x)$ 的关键点是定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为一常数.

解： 设 $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$

则 $f(x) = \cos^4 x + x \cdot A$

所以 $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\mathrm{d}x + A\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$

$$= \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} + A \cdot \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2$$

故 $$A = \frac{\frac{3\pi}{16}}{1 - \frac{\pi^2}{8}} = \frac{3\pi}{2(8 - \pi^2)}$$

因此 $f(x) = \cos^4 x + \dfrac{3\pi}{2(8 - \pi^2)} x.$

例 1.16 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，满足方程：$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8)$，求：$f(x)$.

【解题思路】 对于积分方程通常通过求导化为微分方程来求解.

解： 方程两边对 x 求导

$g(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ 注意 $g(f(x)) = x$.

$\therefore$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 所以 $f(x) = \sqrt{x} + c.$

例 1.17 设 $f(x)$ 可导且存在反函数 $g(x)$，$f(0) = 0$，且有 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t =$

$\int_0^x \frac{t\cos t}{\sin t+\cos t}dt$. 求：$f(\frac{\pi}{2})$.

【解题思路】 一般求函数值 $f(\frac{\pi}{2})$ 总是先求出 $f(x)$ 的表达式，但具体问题要具体分析，由于只要求 $f(\frac{\pi}{2})$，所以，不一定要求 $f(x)$.

解：方程两边求导得

$$xf'(x)=\frac{x\cos x}{\sin x+\cos x}$$

所以 $$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{4}$$

即 $$f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{\pi}{4} \quad \therefore f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$$

例 1.18 求连续函数 $f(x)$，使它满足

$\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x\sin x$. （1992 年数学五考研题）

解：令 $u=tx$，则

$$\int_0^1 f(tx)dx=\int_0^x f(u)\cdot\frac{du}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$$

$$\therefore \quad \int_0^x f(u)du=xf(x)+x^2\sin x$$

$$\therefore \quad f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$$

$$\therefore \quad f'(x)=-2\sin x-x\cos x$$

$$\therefore \quad f(x)=\cos x-x\sin x+c.$$

题型(三) 函数的奇偶性

例 1.19 判定下列函数的奇偶性.

(1) $y=\ln\frac{x-1}{x+1}$

(2) $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>1)$

(3) $y=f'(x)$ 其中 $f(x)$ 为奇函数且可导.

(4) $y=\int_0^x f(t)dt$ 其中 $f(x)$ 为偶函数且连续.

【解题思路】 奇偶性的判定一般从 $f(-x)$ 出发