高中生学习丛书

能力与方法

数学

NENGLI YU FANGFA

[illegible]伟 苏陈耀 毕东方 编著

农业出版社

高中生学习丛书

能力与方法

数学

傅以伟 苏陈耀 毕东方 编著

农业出版社

高中生学习丛书

能 力 与 方 法

数　　学

傅以伟　苏陈耀　毕东方　编著

*　*　*

责任编辑　魏丽萍

农业出版社出版（北京朝阳区枣营路）

新华书店北京发行所发行　　农业出版社印刷厂印刷

787×1092 mm 32 开本　　7 印张　　141 千字

1989 年 2 月第 1 版　　1989 年 2 月北京第 1 次印刷

印数　1—11,470 册　　定价 1.40 元

ISBN 7-109-01185-2/G·33

丛书说明

《高中生学习丛书——能力与方法（各科分册）》是高中生学习辅导读物，是遵循国家教委颁布的高中各科教学大纲，以现行教材为依据进行编写的。它按教材体系分成若干章，每章都包括能力培养和典型例题解析两大部分。“丛书”的编写是为了帮助中学生和广大青年全面系统地掌握高中各科基础知识和基本技能。前一部分，针对目前学生中存在学习不得法，复习方法少的现状，重点是指导学生掌握学习方法，摆脱死记硬背和题海战术的束缚。后一部分，书中精选少量典型例题，并对其解题思路，分析方法以及容易产生错误的前因后果予以具体辅导，从而进一步提高学生分析问题和解决问题的能力。本丛书按照各科教材的知识体系，根据“布鲁姆理论”从“识记、理解、分析、应用”四个方面总结出最受欢迎的“双向细目表”，这也是当前教学中令人瞩目的研究课题。丛书的出版也希望在高中教学中与同行们共同磋商提高。

这套丛书可供应届和历届高中毕业生、高中各年级学生、广大青年、高中各科教师，教研员学习参考。

各分册主编如下：

1. 英语　北京师大实验中学外语组长　沈信予
2. 数学　北京四中数学组长　傅以伟
3. 语文　北京市西城区教育局教研室主任　申士昌

4.物理　北京朝阳区教育局教研室主任　王亚伟

5.化学　北京日坛中学高三年级组长　屠棕

6.生物　《生物学通报》常务编委、市教研员、北京日坛中学　陈正宜

7.历史　北京日坛中学教师、北京朝阳区教育局历史教研室教研员　张毅民

8.地理　北京八中教师　刘孟贤

9.政治　北京八中教师　吴松年

目　录

第一章 代　　数

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学。通过学习数学基础知识和基本技能，提高运算能力、逻辑推理能力和空间想象能力，以及运用数学知识分析和解决实际问题的能力。掌握知识、技能和培养能力是密不可分的、互相促进的。学习数学离不开解题，解题是掌握知识、发展数学能力的重要手段，解题是学会数学思维、提高运算能力的途径。在解题中学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等数学思维方法，掌握综合法、分析法、反证法、数学归纳法等逻辑推理能力，学会换元法、配方法、待定系数法以及数形结合等解题方法及技能技巧。

一、能力培养

（一）识记与理解

记忆，是学习的基础，没有记忆，也就没有学习活动。理解，就是对某一事物不仅知其然，而且知其所以然，不仅能回答是什么，而且能回答为什么。理解是记忆的前提，反过来，记忆又能帮助理解。知识越丰富，理解能力往往越强。提高记忆能力和理解能力，是学好数学的首要一环。

记忆有两种，一种是机械记忆，如记某些数学记号，某些公理、定义；另一种是意义记忆，根据概念、公式、定理

的引入及推理过程来记忆。由于完全无意义的材料属少数，有意义的材料属多数，对这些意义理解以后，不仅容易记，而且保持的时间也长。所以，意义记忆比机械记忆更重要，是记忆的主要方式，也是提高记忆能力的主要方法。在理解的基础上记忆，这就是加强记忆的关键。

1．系统记忆法　高中第一册的一些重要概念，如从集合对应的观点出发，用映射定义函数和一一映射及逆映射定义反函数，一环扣一环，紧密相连，系统性强，对这种类型的概念，宜采用系统记忆法，用图表的形式整理出知识系统。

对应（原始概念）→映射（特殊的对应）→函数（特殊的映射）

↓　　　　　　　↓

一一映射——→逆映射——→反函数

设有集合A到集合B的一个对应f：$A \xrightarrow{f} B$，上述概念系统简化记忆如下：集合、对应是两个不定义的原始概念；映射是特殊的对应（象唯一的对应）；函数是特殊的映射（非空数集A到B上的映射）；一一映射是A到B上且原象唯一的映射；只有一一映射才有逆映射；确定函数$y=f(x)$的映射是定义域到值域上的映射．如果f是一一映射，则f的逆映射f^{-1}：$B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做$y=f(x)$的反函数。抓住映射、一一映射、逆映射，函数与反函数概念就容易理解了。零碎的珠子，我们一只手抓不了几粒，如果用线穿起来，抓住线头，就可以带起一大串。记忆也是这样，分散的、片断的知识记得不多，也不能长久保持，把知识系统化条理化了，就会在脑子里留下深刻的印象。系统记忆法就是按照科学知识的系统性，把知识顺理成章，编织成网，这样记住的就是一大串。

2. 形象记忆法　借助直观形象，可以提高记忆的效果，有些概念和性质，虽然理解了，但要记住，仍然有一定的困难。例如幂函数的图象性质，在运用时常常出现混淆，为此可采取以下办法：第一，缩小记忆范围，重点记忆幂函数在第一象限的图象性质；第二，明确分类，除了 $n=0$，$n=1$ 以外，分为 $n>0$ 与 $n<0$ 两大类，再把 $n>0$ 分为 $n>1$ 与 $0<n<1$ 两种；第三，类比联想，在同一坐标系作出 $n=2$，$n=\frac{1}{2}$，$n=-1$ 时 $y=x^n$ 的图象，在第一象限 $y=x^n$ 的图象，当 $n>1$ 时，与 $y=x^2$ 图象类似，穿过（1，1）点后上升较快；当 $0<n<1$ 时，与 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 图象类似，穿过（1，1）点后上升较慢；当 $n<0$ 时，$y=x^n$ 的图象与双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的形状类似，利用类比易于记住曲线形状与走向；第四，利用定义域和奇偶性，确定函数在二、三象限的情况。利用以上类比及图 1—1 的形象，记得牢，不混淆。

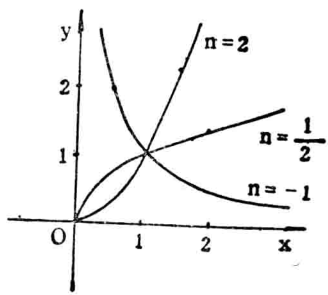

图 1—1

〔例 1〕　分别指出函数 $y_1=x^{\frac{5}{4}}$、$y_2=x^{\frac{4}{3}}$、$y_3=x^{\frac{3}{5}}$、$y_4=x^{\frac{4}{5}}$ 的示意图只能是哪一个？

解： $y_1=x^{\frac{5}{4}}$，$n=\frac{5}{4}>1$，且定义域 $x\geqslant0$，图象是(C)；

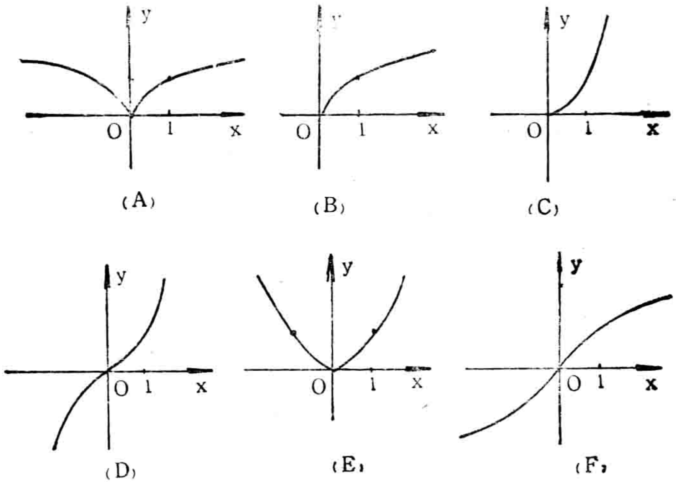

图 1—2

$y_2=x^{\frac{4}{3}}$，$n=\frac{4}{3}>1$，且定义域 $x\in R$，是偶函数，图象是（E）；

$y_3=x^{\frac{3}{5}}$，$n=\frac{3}{5}<1$，定义域 $x\in R$，是奇函数，图象是（F）；

$y_4=x^{\frac{4}{5}}$，$n=\frac{4}{5}<1$，定义域 $x\in R$，是偶函数，图象是（A）。

〔例 2〕　若函数 $y=x^{\frac{n}{m}}$的图象如下（m、n 互质整数，$m\neq0$），则正确的是（　　）。

（A）$mn>0$，n、m 都是奇数；

（B）$mn>0$，n、m 一奇一偶；

（C）$mn<0$，n、m 都是偶数；

（D）$mn<0$，n、m 一奇一偶。

分析：由图知函数定义域 $x>0$ 且 $\frac{n}{m}<0$，则 $mn<0$，由 m、n 互质知 n、m 一奇一偶，答（D）。

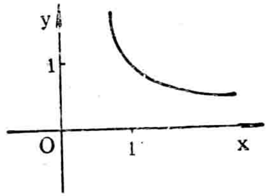

图 1—3

〔例 3〕　已知 $2\lg y=\lg x+\lg x^{\frac{1}{3}}$，则点（x，y）的图象是（　　）。

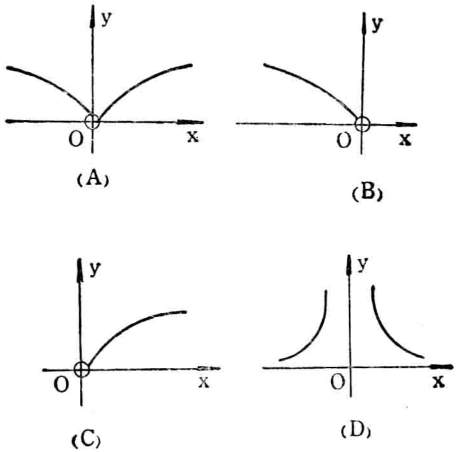

图 1—4

解：原式化为 $y^2=x^{\frac{4}{3}}$，即 $y=x^{\frac{2}{3}}$（$x>0$，$y>0$），图象是（C）。

把一些数学结论配合图象进行记忆，印象深刻，这是因为直观形象所产生的信息比语言文字强几倍，会在脑子里留

下较深刻的印象。

3.对比记忆法　对比联想，有助于增强记忆，当我们接受某种信息刺激以后，常常浮现出与那种信息有关联的事物来，只要我们把这些新旧事物建立起牢固的联系，记忆就会长久保持。对比联想包括把比较接近的概念、性质放在一起，比较它们的异同，可以理解得更深刻，记忆更牢固；或者把相反的性质、公式收集在一起，进行相反的对比联想；或者把本质方面类似的性质分类比较，进行分类工作本身，就已进行了比较和鉴别，从而加强了记忆。例如数集扩充到复数集以后，实数集中有些性质保留和发展了，有些则消失了，如四则运算律保持，绝对值发展为模，算术根不适用，指数概念只保留整数指数，有些性质如$|a|^2=a^2$在虚数集中消失了。下面列举实数和复数部分性质对比表以增强记忆：

	实　数（$a, b\in R$）	复　数（$z, z_1, z_2\in C$）
1	$a^2\geqslant 0$，实数平方为非负数	z^2可以是正数、负数或虚数
2	$a^2+b^2=0\Longleftrightarrow a=b=0$	$z_1^2+z_2^2=0$时，z_1、z_2可能是非0实数或虚数
3	$\bar{a}=a$，实数的共轭复数是自身	共轭虚数对应点关于x轴对称
4	若$\|a\|=2$，则$a=\pm 2$，表示数轴上与原点距离为2的两个点	$\|z\|=2$，则z有无穷多个值，它们的对应点在以原点为圆心以2为半径的圆上
5	$\|a\|^2=a^2$ $\|x_1-x_2\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}$，实数集中，去掉绝对值的方法：①平方，②分区讨论	$\|z\|^2=\|\bar{z}\|^2=z\cdot\bar{z}=\|\bar{z}^2\|$，z是虚数时$\|z\|^2\neq z^2$非纯虚数的平方仍是虚数。 复数集中，去掉绝对值的方法是：①$\|z\|^2=z\cdot\bar{z}$，②$\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$
6	$\|a\|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$ 当且仅当$a\geqslant 0$时，$\|a\|=a$	$\|z\|=\sqrt{a^2+b^2}$ 虚数的模不可能与它自身相等

（续）

	实　数 $(a, b\in R)$	复　数 $(z, z_1, z_2\in C)$
7	分指数 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $(a\geqslant 0)$ 成立 $a>0$ 时，有 $a^n=(a^2)^{\frac{n}{2}}$	虚数中只定义整数指数，不定义分指数 $i\neq(i^2)^{\frac{1}{2}}$，z 是虚数时，$z^n\neq(z^2)^{\frac{n}{2}}$
8	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
9	$\|\|a\|-\|b\|\|\leqslant\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$	$\|\|z_1\|-\|z_2\|\|\leqslant\|z_1+z_2\|\leqslant\|z_1\|+\|z_2\|$
10	一元二次方程韦达定理	韦达定理仍然成立
11	实数可以比较大小 $a+b\sqrt{m}=0\Longleftrightarrow a=b=0$ （$\sqrt{m}$ 无理数） $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}\Longleftrightarrow a=c, b=d\ (a、b、c、d\in Q)$	虚数不能比较大小 $a+bi=0\Longleftrightarrow a=b=0$ $(a、b、c、d\in R)$ $a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c, b=d$
12	$ax^2+bx+c=0\ (a、b、c\in R, a\neq 0)$ 当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，有两个实根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，有两个虚根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}$	当 a、b、c 有虚数时，$ax^2+bx+c=0$ 有实根的条件不再是 $\Delta\geqslant 0$，设 b^2-4ac 平方根是 α，则方程的根是 $x=\dfrac{-b+\alpha}{2a}$
13	$a\geqslant 0$ 时，a 的偶次方根有两个 $a<0$ 时，a 的偶次方根无意义 $a\in R$ 时，a 的奇次方根只有一个值	z 的n次方根有n个值。设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 则 z 的n 次方根是 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$
14	$\Delta=b^2-4ac<0$ 时，ax^2+bx+c 在实数集是既约的(不能再分解)	在复数集，一切多项式均可分解为一次因式的积

4. 口诀记忆法　对于一些难于记忆的概念和结论，可把有关结论编成简明的顺口溜，赋予它们一定的音韵和节奏，朗

朗上口，便于记诵。举例如下：

（1）设 $a<b$，则 $(x-a)(x-b)>0$ 的解是 $x<a$ 或 $x>b$，$(x-a)(x-b)<0$ 的解是 $a<x<b$；$\frac{x-a}{x-b}>0$ 的解是 $x<a$ 或 $x>b$，$\frac{x-a}{x-b}<0$ 的解是 $a<x<b$；$|x|>a$ 的解是 $x<-a$ 或 $x>a$，$|x|<a$ 的解是 $-a<x<a(a>0)$。它们有着共性，可用"大于分两边，小于夹中间"这一句话统一记诵。

（2）函数 $f(x+m)$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象左右平移 $|m|$ 个单位得到；$f(x+3)$ 的图象可把 $f(x)$ 的图象往左平移3单位得到，$f(x-3)$ 的图象可把 $f(x)$ 的图象往右平移3单位得到，移动方向可概括为一句话"加往左，减往右"。

（3）$y=|f(x)|$ 的图象可将 $y=f(x)$ 的图象经过"上不动，下翻转"的几何变换得到。这是因为 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=|f(x)|=f(x)$，即 x 轴上方的图象与 $y=f(x)$ 的图象相同，$f(x)<0$ 时，$y=|f(x)|=-f(x)$，即把 x 轴下方的图象往上翻转 $180°$。

（4）$y=f(|x|)$ 的图象可将 $y=f(x)$ 的图象经过"右不动，左对称"的几何变换得到。因为 $x\geqslant 0$ 时，$y=f(|x|)=f(x)$，即在 y 轴右方，$y=f(|x|)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象相同，又 $y=f(|x|)$ 是偶函数，y 轴左侧的图象与右侧对称。

另外四种图形变换需要通过理解来记忆：

（5）$y=-f(x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称。〔点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 图象上，则关于 x 轴对称点 $(x,-y)$ 在 $y=-f(x)$ 图象上〕。

（6）$y=f(-x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称。〔点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 图象上，则关于 y 轴对称点

$(-x, y)$ 在 $y=f(-x)$ 图象上〕。

（7）$y=f(ax)(a>0)$ 的图象可由 $y=f(x)$ 图象上各点沿 x 轴向原点压缩（$a>1$ 时）或伸长（$a<1$ 时）到 $\frac{1}{a}$ 倍得到。〔当 y 值相同时，$y=f(ax)$ 的点的横坐标是 $y=f(x)$ 上对应点横坐标的 $\frac{1}{a}$〕。

（8）$y=af(x)(a>0)$ 的图象可将 $y=f(x)$ 图象上各点沿 y 轴向原点压缩（$a<1$ 时）或伸长（$a>1$ 时）到 a 倍得到。

〔例 4〕　已知 $y=f(x)$ 的图象如图 1—5(A)，作出函数 $y=2f(2x-2)$ 的图象。

先作 $y=f(2x)$ 的图象（把图 1—5 各点向原点压缩到

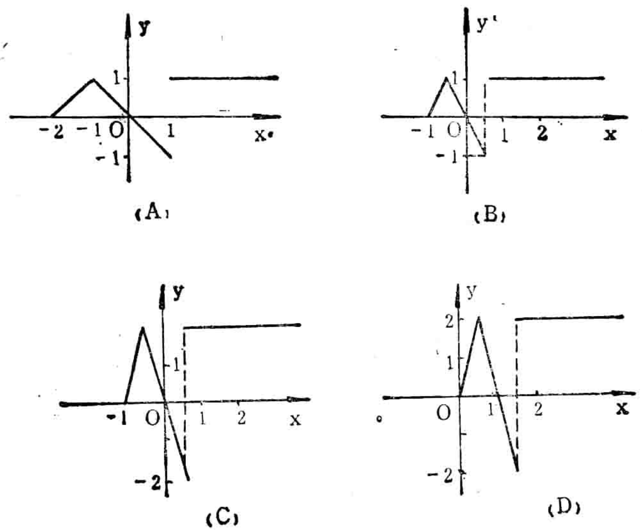

图 1—5

$\frac{1}{2}$）$\Longrightarrow$ 再作 $y=2f(2x)$，（把图A各点沿y轴伸长到2倍）$\Longrightarrow$ 后作 $y=2f(2x-2)$，（把 $y=2f(2x)$ 图象向右平移 1 单位）

〔例 5〕 已知 $f(x)=2^x$，作出 $y=|f^{-1}(1-x)|$的图象。

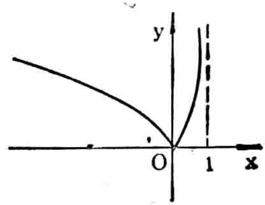

图 1—6

解：$\because y=2^x$，

$\therefore x=\log_2 y$，

$f^{-1}(x)=\log_2 x$，

$\therefore y=|f^{-1}(1-x)|=|\log_2(1-x)|$。

将 $y=\log_2 x$ 的图象向左平移 1 单位得 $y=\log_2(1+x)$，作它关于 y 轴对称的图象得 $y=\log_2(1-x)$，再利用“上不动，下翻转”，得 $y=|\log_2(1-x)|$图象。

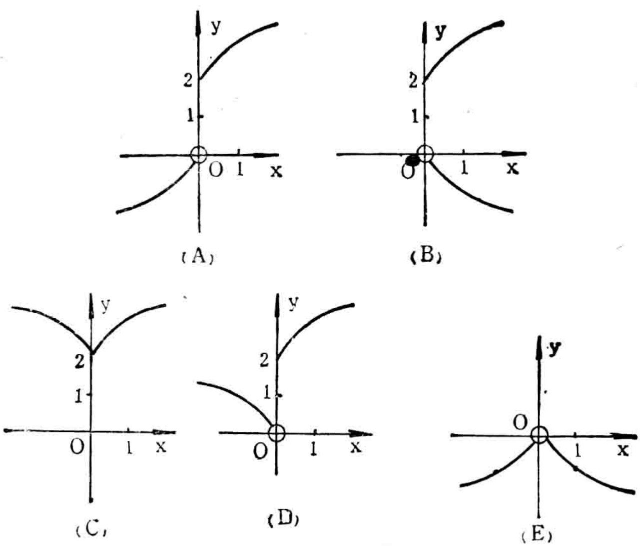

图 1—7