

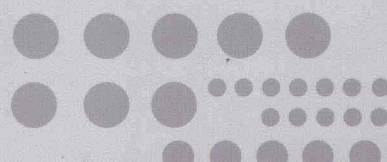
微分几何

Weifen Jihe

徐森林 纪永强 金亚东 胡自胜 编著



中国科学技术大学出版社



微分几何

Weifen Jihe

徐森林 纪永强 金亚东 胡自胜 编著



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

全书共 3 章. 第 1 章讨论了曲线的曲率、挠率、Frenet 公式、Bouquet 公式等局部性质, 证明了曲线论基本定理. 还讨论了曲线的整体性质: 4 顶点定理、Minkowski 定理、Fenchel 定理, 以及 Faxy-Milnor 关于纽结的全曲率不等式. 第 2 章引进了第 1 基本形式、第 2 基本形式、Gauss(总)曲率、平均曲率、Weingarten 映射、主曲率、曲率线、测地线等重要概念, 给出了曲面的基本公式和基本方程、曲面论的基本定理, 以及著名的 Gauss 绝妙定理等曲面的局部性质. 第 3 章详细论述了曲面的整体性质, 得到了全脐超曲面定理、球面刚性定理、极小曲面的 Bernstein 定理、著名的 Gauss-Bonnet 公式及 Poincaré 指标定理.

为了帮助读者熟练地掌握微分几何的内容和方法, 书中配备了大量有趣的习题, 并在《微分几何学习指导》中给出了详细的解答.

本书可用作综合性大学、理工科大学、师范大学数学系高年级大学生的教科书, 也可作为大学数学教师和研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/徐森林等编著. —合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013. 2
ISBN 978-7-312-03000-0

I. 微… II. 徐… III. 微分几何 IV. O186

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 171475 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 20.75
字数 406 千
版次 2013 年 2 月第 1 版
印次 2013 年 2 月第 1 次印刷
定价 36.00 元

前 言

微分几何是一门历史悠久的学科. 近一个世纪以来, 许多著名数学家如陈省身、丘成桐等都在这一研究方向上作出了极其重要的贡献. 这一学科的生命力至今还很旺盛, 并渗透到各个科学研究领域.

古典微分几何以数学分析为主要工具, 研究空间中光滑曲线与光滑曲面的各种性质. 本书第 1 章讨论了曲线的曲率、挠率、Frenet 公式、Bouquet 公式等局部性质; 证明了曲线论基本定理, 也讨论了曲线的整体性质: 4 顶点定理、Minkowski 定理与 Fenchel 定理以及 Fary-Milnor 关于纽结的全曲率不等式. 第 2 章引进了第 1 基本形式、第 2 基本形式、Gauss(总)曲率、平均曲率、Weingarten 映射、主曲率、曲率线、测地线等重要概念, 给出了曲面的基本公式和基本方程、曲面论的基本定理, 以及著名的 Gauss 绝妙定理等曲面的局部性质, 还运用正交活动标架与外微分运算研究了第 1、第 2、第 3 基本形式, Weingarten 映射以及第 1、第 2 结构方程. 第 3 章详细论述了曲面的整体性质, 得到了全脐超曲面定理、球面的刚性定理、极小曲面的 Bernstein 定理、著名的 Gauss-Bonnet 公式及 Poincaré 指标定理.

书中尽可能对 $\mathbf{R}^n$ 中 $n-1$ 维超曲面采用 $g_{ij}, L_{ij}, \dots$ 表示, 是为了克服 $\mathbf{R}^3$ 中 E, F, G, L, M, N 不能推广到高维的困境和障碍, 也是为了能顺利地将古典微分几何从 $\mathbf{R}^3$ 推广到 $\mathbf{R}^n$, 再搬到 Riemann 流形上. 2.10 节介绍 Riemann 流形上的 Levi-Civita 联络、向量场的平移及测地线, 是为了使读者逐渐摆脱古典方法(坐标观点)而进入近代方法(映射观点或不变观点). 因此, 撰写本书就是为了给读者从古典微分几何到近代微分几何之间架设一座桥梁. 当 $n=3$ 时, 作为特例我们得到 $\mathbf{R}^3$ 的 1 维曲线、2 维曲面的一些古典结果, 它们是读者研究微分几何不可缺少的几何直观背景. 熟读全书后, 读者一定会感到离进入近代微分几何的学习与研究只差一步之遥.

书中有大量的实例是为了帮助读者更好地掌握微分几何的基本知识与基本方法, 也是为了增加读者的几何背景. 这有助于古典微分几何的实际应用, 也有助于近代微分几何的学习、研究. 书中还配备了大量既有趣又实用的习题, 有能力的读者一定要独立思考, 绝不能先看《微分几何学习指导》书中的解答. 如果有困难再参

阅答案,切记!

早在 20 世纪 60 年代,作者徐森林、薛春华跟随著名数学家吴文俊教授攻读微分几何,得到恩师的栽培.在几十年中,作者在中国科学技术大学数学系、少年班及统计系讲授古典微分几何,使得一大批大学生顺利进入研究生阶段,并使他们对近代微分几何进行学习和研究,其中有 7~8 人次在全国研究生暑期班中获了奖,还培养了许多几何拓扑的年轻数学家.

感谢中国科学技术大学数学系领导和老师对我们的大力支持,感谢著名数学家吴文俊教授的鼓励和教导.

徐森林

2011 年 12 月 12 日于北京

目 录

前言	(i)
第 1 章 曲线论	(1)
1.1 C^r 正则曲线、切向量、弧长参数	(1)
1.2 曲率、挠率	(10)
1.3 Frenet 标架、Frenet 公式	(24)
1.4 Bouquet 公式、平面曲线相对曲率	(40)
1.5 曲线论的基本定理	(53)
1.6 曲率圆、渐缩线、渐伸线	(62)
1.7 曲线的整体性质(4 顶点定理、Minkowski 定理、Fenchel 定理)	(77)
第 2 章 R^n 中 k 维 C^r 曲面的局部性质	(118)
2.1 曲面的参数表示、切向量、法向量、切空间、法空间	(118)
2.2 旋转面(悬链面、正圆柱面、正圆锥面)、直纹面、 可展曲面(柱面、锥面、切线面)	(130)
2.3 曲面的第 1 基本形式与第 2 基本形式	(141)
2.4 曲面的基本公式、Weingarten 映射、共轭曲线网、渐近曲线网	(158)
2.5 法曲率向量、测地曲率向量、Euler 公式、主曲率、曲率线	(169)
2.6 Gauss 曲率(总曲率) K_G 、平均曲率 H	(180)
2.7 常 Gauss 曲率的曲面、极小曲面($H=0$)	(194)
2.8 测地曲率、测地线、测地曲率的 Liouville 公式	(211)
2.9 曲面的基本方程、曲面论的基本定理、Gauss 绝妙定理	(231)
2.10 Riemann 流形、Levi-Civita 联络、向量场的平行移动、测地线	(248)
2.11 正交活动标架	(261)

第 3 章 曲面的整体性质	(279)
3.1 紧致全脐超曲面、球面的刚性定理	(279)
3.2 极小曲面的 Bernstein 定理	(292)
3.3 Gauss-Bonnet 公式	(302)
3.4 2 维紧致定向流形 M 的 Poincaré 切向量场指标定理	(317)
参考文献	(325)

第 1 章 曲 线 论

这一章将引进空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^r 曲线、 C^r 正则曲线. 在 $\mathbf{R}^3$ 中给出曲率 κ 与挠率 τ 的概念. 曲率表示曲线弯曲的程度, 曲率为零的连通曲线就是直线段. 挠率表示曲线离开密切平面的程度, 挠率为零的连通曲线就是平面曲线. 平面 $\mathbf{R}^2$ 中给出的相对曲率 κ_r , 其绝对值表示曲线弯曲的程度, 而它的正负号表示曲线弯向哪一侧, 正号表示弯向 V_{2r} 的一侧, 负号表示弯向 V_{2r} 的另一侧. 接着详细介绍重要的 Frenet 公式, 研究了圆柱螺线、一般螺线以及 Bertrand 曲线. 应用 Taylor 公式, 在曲线点邻近建立了 Bouquet 公式(局部规范形式), 由此可研究该点处曲线的局部性质. 1.5 节证明了曲线论的基本定理与曲线的刚性定理. 除一个刚性运动外, 空间曲线完全由它的曲率与挠率所决定. 在 $\mathbf{R}^2$ 中, 曲线除一个平面刚性运动外, 完全由它的相对曲率所决定. 1.6 节仔细论述了曲率圆、渐缩线和渐伸线, 以及它们之间的关系. 1.7 节研究了曲线的整体性质, 即大范围性质. 证明了 4 顶点定理、Minkowski 定理(等宽 b 曲线的周长为 πb)、旋转指标定理、Fenchel 定理以及纽结不等式.

1.1 C^r 正则曲线、切向量、弧长参数

定义 1.1.1 设 $x: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n, t \mapsto x(t) = x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) = \sum_{i=1}^n x^i(t) e_i$ 是以 t 为参数的参数曲线, 其中 $x^i(t)$ 为点 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 中的第 i 个分量; $i = 1, 2, \dots, n; \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的规范正交基, 或单位正交基, 或 ON 基.

如果 $x(t) (\Leftrightarrow x^i(t), i=1, 2, \dots, n)$ 连续, C^r 可导(具有 r 阶连续导数, 其中 $r \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ (自然数集)), C^∞ 可导(具有各阶连续导数), C^ω (每个 $x^i(t), i=1, 2, \dots, n$ 在每个 $t \in (a, b)$ 处可展开为收敛的幂级数, 即是实解析的), 则分别称 $x(t)$ 为 C^0 (连续) 曲线, C^r 曲线, C^∞ 曲线, C^ω (实解析) 曲线.

记 $C^r((a, b), \mathbf{R}^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中在 (a, b) 上的 C^r 参数曲线的全体.

设 $\mathbf{x}(t) \in C^r((a, b), \mathbf{R}^n), r \geq 1$, 我们称

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^i(t + \Delta t) - x^i(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n x^{i'}(t) \mathbf{e}_i \\ &= (x^{1'}(t), x^{2'}(t), \dots, x^{n'}(t)) \end{aligned}$$

为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 在 t 或 $\mathbf{x}(t)$ 处的切向量(图 1.1.1). 如果 $t_0 \in (a, b), \mathbf{x}'(t_0) \neq 0$, 则称 t_0

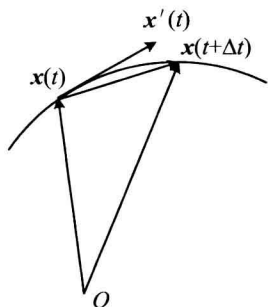


图 1.1.1

或 $\mathbf{x}(t_0)$ 为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的正则点; 如果 $\mathbf{x}'(t_0) = 0$, 则称 t_0 或 $\mathbf{x}(t_0)$ 为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的奇点. 当曲线 $\mathbf{x}(t), a \leq t \leq b$ 上所有点都是正则点时, 称 $\mathbf{x}(t)$ 为正则曲线. 在微分几何里, 通常研究的就是不同光滑程度 ($C^r, 1 \leq r \leq \omega$, 其中 $1 \leq 2 < \dots < \infty < \omega, r$ 越大, 曲线越光滑) 的正则曲线. 有时, 我们也研究曲线在奇点处的性态.

按惯例, 我们认为参数增加的方向 (即切向量 $\mathbf{x}'(t)$ 所指的方向) 为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的正向, 其相反方向为负向或反向 (图 1.1.2).

注 1.1.1 设 t_0 为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的正则点, 即 $\mathbf{x}'(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow$ 存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $x^{i'}(t_0) \neq 0$. 由 $x^{i'}(t)$ 连续, 有 $\delta > 0$, 使 $x^{i'}(t) (t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ 与 $x^{i'}(t_0)$ 同号. 因此, 在 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 中 $x^i(t)$ 严格单调. 根据反函数定理知, $t = t(x^i)$. 这样, 局部地可用 x^i 作为曲线的参数, 即 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t(x^i))$.

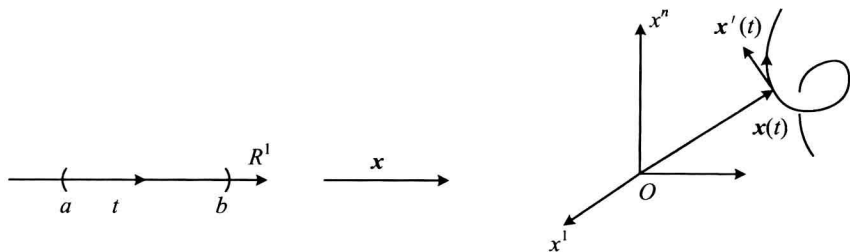


图 1.1.2

注 1.1.2 如果采用另一参数 $\bar{t}$, 则曲线的参数表示为 $\bar{\mathbf{x}}(\bar{t})$. 为了保证 t 与 $\bar{t}$ 一一对应, 参数变换式 $\bar{t} = \bar{t}(t)$ 必须满足 $\bar{t}'(t) \neq 0$. 由于 $\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}) = \mathbf{x}(t)$, 故

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt},$$

所以, $\mathbf{x}'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\bar{t}}=0$. 这表明, 曲线上一点在取参数 t 时为正则(奇)点 $\Leftrightarrow$ 在参数 $\bar{t}$ 时为正则(奇)点.

定义 1.1.2 设 $\mathbf{x}(t), t \in (a, b)$ 为 $C^r (r \geq 1)$ 正则曲线, 我们称

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t |\mathbf{x}'(t)| dt \\ &= \int_{t_0}^t \left[\sum_{i=1}^n (x^{i'}(t))^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 从参数 t_0 到 t 处的弧长.

注 1.1.3 如果选直角坐标 $x^1, x^2, \dots, x^n$ 中一个(如 x^1)为曲线的参数, 则

$$\mathbf{x}(x^1) = (x^1, x^2(x^1), \dots, x^n(x^1)),$$

$$s(x^1) = \int_a^b [1 + (x^{2'}(x^1))^2 + \dots + (x^{n'}(x^1))^2]^{\frac{1}{2}} dx^1.$$

当 $n=2$ 时, 在平面 $\mathbf{R}^2$ 中, 有

$$s(x^1) = \int_a^b [1 + (x^{2'}(x^1))^2]^{\frac{1}{2}} dx^1.$$

如果采用极坐标, $\mathbf{x}(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, 则

$$\begin{aligned} s(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} [(x^{1'}(\theta))^2 + (x^{2'}(\theta))^2]^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \{ [r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta]^2 + [r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta]^2 \}^{\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} [r'^2(\theta) + r^2(\theta)]^{\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

引理 1.1.1 弧长与同向参数的选取无关.

证明 设 t 与 $\bar{t}$ 为两个同向参数, 则 $\frac{d\bar{t}}{dt} > 0$. 又设曲线上定点 P_0 的参数为 t_0 ,

$\bar{t}_0$, 动点 P 的参数为 $t, \bar{t}$. 令 $s(t)$ 为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 从 t_0 到 t 的弧长, $\bar{s}(\bar{t})$ 为曲线 $\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}) = \mathbf{x}(t)$ 从 $\bar{t}_0$ 到 $\bar{t}$ 的弧长, 则

$$\begin{aligned} \bar{s}(\bar{t}) &= \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} |\bar{\mathbf{x}}'(\bar{t})| d\bar{t} \\ &= \int_{t_0}^t |\bar{\mathbf{x}}'(\bar{t})| \frac{d\bar{t}}{dt} dt \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^t \left| \bar{\mathbf{x}}'(\bar{t}) \frac{d\bar{t}}{dt} \right| dt$$

$$= \int_{t_0}^t |\mathbf{x}'(t)| dt = s(t).$$

□

引理 1.1.2 设 $\mathbf{x}(t), t \in (a, b)$ 为 $C^r (r \geq 1)$ 正则曲线, $s = s(t)$ 为弧长, 则 $s'(t) = |\mathbf{x}'(t)| > 0$, 并且 s 可作为该正则曲线的参数.

证明 因为 $s'(t) = \left(\int_{t_0}^t |\mathbf{x}'(t)| dt \right)' = |\mathbf{x}'(t)| > 0$, 所以 s 为 t 的严格增函数. 根据反函数定理, $t = t(s)$ 为严格增的 C^r 函数, 且 $t'(s) = \frac{1}{s'(t)} > 0$. 于是, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t(s))$, s 为该正则曲线的新参数. □

引理 1.1.3 设 $\mathbf{x}(t)$ 为 $C^r (r \geq 1)$ 正则曲线, 则

$$|\mathbf{x}'(t)| = 1 \Leftrightarrow t = s + c,$$

其中 s 为该正则曲线的弧长, c 为常数.

证明 因为 $t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\mathbf{x}'(t)|}$, 所以

$$|\mathbf{x}'(t)| = 1 \Leftrightarrow t'(s) = 1 \Leftrightarrow t = s + c, c \text{ 为常数.} \quad \square$$

例 1.1.1 曲线 $\mathbf{x}(t) = (t^3, t^2, 0), t \in \mathbf{R}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的 C^∞ 曲线, $\mathbf{x}'(t) = (3t^2, 2t, 0)$. 因此, $t=0$ 为该曲线的奇点, $t \neq 0$ 为该曲线的正则点 (图 1.1.3).

例 1.1.2 曲线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 上间距为 $2\pi b (b > 0)$ 的一条圆柱螺线, 它是一条 C^∞ 正则曲线. 求弧长 $s(t)$, 并用弧长 s 作参数表示该曲线 (图 1.1.4).

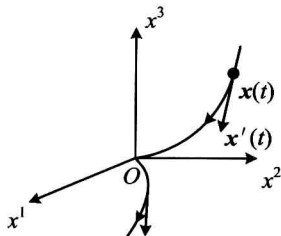


图 1.1.3

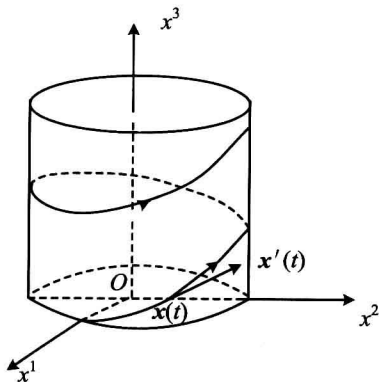


图 1.1.4

证明 因为 $(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 = a^2$, 所以 $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 在柱面 $(x^1)^2 + (x^2)^2 = a^2$ 上.

显然, 间距为 $bt|_{t=2\pi} - bt|_{t=0} = 2\pi b$.

从 $\mathbf{x}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \neq 0$ 知, $\mathbf{x}(t)$ 为正则曲线. 由 $\sin t, \cos t$ 有各阶连续导数, 它是 C^∞ 的. 事实上, 它是 C^∞ (实解析) 的 (参阅 [9] 151 页例 14.23). 读者注意到

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|} \cdot (0, 0, 1) \\ &= \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot (0, 0, 1) \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

为常数, 故单位切向量 $\frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|}$ 与 x^3 轴的夹角为常数. 弧长

$$\begin{aligned}s &= s(t) = \int_0^t |\mathbf{x}'(t)| \, dt \\ &= \int_0^t [(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2]^{\frac{1}{2}} \, dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^t \, dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} t.\end{aligned}$$

因此, $\mathbf{x} = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$, s 为该曲线的弧长参数. $\square$

例 1.1.3 求双曲螺线

$$\mathbf{x}(t) = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at), \quad a > 0$$

的弧长表示, 其中双曲余弦 $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, 双曲正弦 $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

解 $\mathbf{x}'(t) = (a \operatorname{sh} t, a \operatorname{ch} t, a)$, 从 $t=0$ 起弧长为

$$\begin{aligned}s &= s(t) = \int_0^t |\mathbf{x}'(t)| \, dt \\ &= \int_0^t [(x^1'(t))^2 + (x^2'(t))^2 + (x^3'(t))^2]^{\frac{1}{2}} \, dt \\ &= \int_0^t [a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2 \operatorname{ch}^2 t + a^2]^{\frac{1}{2}} \, dt \\ &= \int_0^t [a^2 (\operatorname{sh}^2 t + 1) + a^2 \operatorname{ch}^2 t]^{\frac{1}{2}} \, dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t (2a^2 \operatorname{ch}^2 t)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \sqrt{2}a \int_0^t \operatorname{ch} t dt \\
&= \sqrt{2}a \operatorname{sh} t.
\end{aligned}$$

因此, $t = \operatorname{arsh} \frac{s}{\sqrt{2}a}$ 或

$$\begin{aligned}
\frac{s}{\sqrt{2}a} &= \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \\
(e^t)^2 - \frac{\sqrt{2}s}{a} e^t - 1 &= 0, \\
e^t &= \frac{\frac{\sqrt{2}s}{a} + \sqrt{\frac{2s^2}{a^2} + 4}}{2} = \frac{s + \sqrt{s^2 + 2a^2}}{\sqrt{2}a}, \\
t &= \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + 2a^2}}{\sqrt{2}a}.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}, a \operatorname{sh} t, at) \\
&= \left(a \sqrt{1 + \frac{s^2}{2a^2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, a \operatorname{arsh} \frac{s}{\sqrt{2}a} \right).
\end{aligned}$$

□

在 $\mathbf{R}^n$ 中, 曲线 $\mathbf{x}(t)$ 在 t_0 处的切线方程为(图 1.1.5)

$$X - \mathbf{x}(t_0) = \lambda \mathbf{x}'(t_0), \quad \lambda \text{ 为切线上的参数.}$$

即

$$\begin{aligned}
&(X^1 - x^1(t_0), X^2 - x^2(t_0), \dots, X^n - x^n(t_0)) \\
&= (X^1, X^2, \dots, X^n) - (x^1(t_0), x^2(t_0), \dots, x^n(t_0)) \\
&= \lambda (x^{1'}(t_0), x^{2'}(t_0), \dots, x^{n'}(t_0)),
\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}(t_0) = (x^1(t_0), x^2(t_0), \dots, x^n(t_0))$ 为切线上的定点, $X = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ 为切线上的动点, 而 $\mathbf{x}'(t_0) = (x^{1'}(t_0), x^{2'}(t_0), \dots, x^{n'}(t_0))$ 为切线的方向.

消去 λ 得到切线的直角坐标方程:

$$\frac{X^1 - x^1(t_0)}{x^{1'}(t_0)} = \frac{X^2 - x^2(t_0)}{x^{2'}(t_0)} = \dots = \frac{X^n - x^n(t_0)}{x^{n'}(t_0)}.$$

曲线的法面(过切点并垂直切线的 $n-1$ 维超平面)方程(图 1.1.6):

$$[X - \mathbf{x}(t_0)] \perp \mathbf{x}'(t_0),$$

$$[X - \mathbf{x}(t_0)] \cdot \mathbf{x}'(t_0) = 0,$$

即法面的直角坐标方程为

$$[X^1 - x^1(t_0)]x^{1'}(t_0) + [X^2 - x^2(t_0)]x^{2'}(t_0) + \cdots + [X^n - x^n(t_0)]x^{n'}(t_0) = 0,$$

其中 $\mathbf{x}(t_0) = (x^1(t_0), x^2(t_0), \cdots, x^n(t_0))$ 为法面上的定点, $X = (X^1, X^2, \cdots, X^n)$ 为法面上的动点, 而 $\mathbf{x}'(t_0) = (x^{1'}(t_0), x^{2'}(t_0), \cdots, x^{n'}(t_0))$ 为法面(超平面)的法向.

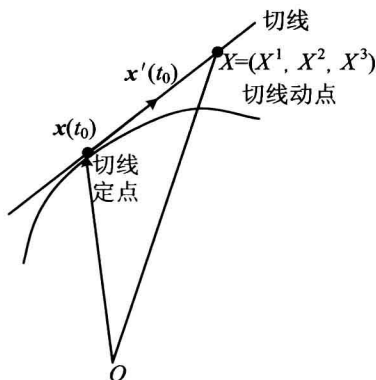


图 1.1.5

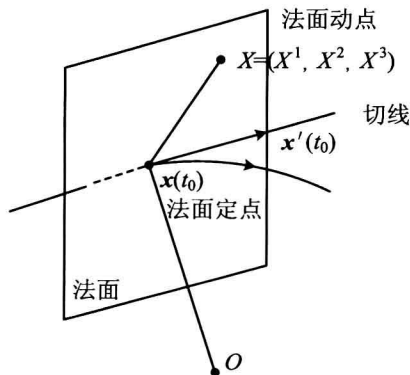


图 1.1.6

例 1.1.4 求圆柱螺线 $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 在 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的切线方程与法面方程.

解 由 $\mathbf{x}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, 知

$$\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\pi}{3}b\right),$$

$$\mathbf{x}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, b\right).$$

(1) 切线方程为 $X - \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lambda \mathbf{x}'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 即

$$\begin{aligned} (X^1, X^2, X^3) = X &= \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \lambda \mathbf{x}'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\pi}{3}b\right) + \lambda \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}, b\right) \\ &= \left(\frac{1-\lambda\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}+\lambda}{2}a, \left(\frac{\pi}{3}+\lambda\right)b\right); \end{aligned}$$

它的直角坐标方程为

$$\frac{X^1 - \frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{X^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \frac{X^3 - \frac{\pi}{3}b}{b},$$

即

$$\frac{2X^1 - a}{-\sqrt{3}a} = \frac{2X^2 - \sqrt{3}a}{a} = \frac{3X^3 - \pi b}{3b}.$$

(2) 法面方程为

$$\left[X - \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \cdot \mathbf{x}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

即

$$\left(X^1 - \frac{a}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + \left(X^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\frac{a}{2} + \left(X^3 - \frac{\pi}{3}b\right) \cdot b = 0,$$

整理后得到

$$-3\sqrt{3}X^1 + 3aX^2 + 6bX^3 - 2\pi b^2 = 0. \quad \square$$

引理 1.1.4 $\mathbf{R}^n$ 中 C^1 向量函数 $\mathbf{x}(t)$, $t \in (a, b)$ 具有固定长度 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall t \in (a, b)$, 有 $\mathbf{x}'(t) \perp \mathbf{x}(t)$.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad |\mathbf{x}(t)| = \text{常数} &\Leftrightarrow \mathbf{x}^2(t) = |\mathbf{x}(t)|^2 = \text{常数} \\ &\Leftrightarrow [\mathbf{x}^2(t)]' = 2\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x}'(t) \perp \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad \square$$

定理 1.1.1 $\mathbf{R}^n$ 中 C^1 单位向量函数 $\mathbf{x}(t)$ (即 $|\mathbf{x}(t)| = 1$) 关于 t 的旋转速度 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right|$ 等于其导数向量 $\mathbf{x}'(t)$ 的模 $|\mathbf{x}'(t)|$, 即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right| = |\mathbf{x}'(t)|,$$

其中 $\Delta \varphi$ 表示由向量 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ 所夹的角, 而 $|\mathbf{x}'(t)|$ 正反映了该夹角对 Δt 的变化率.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \varphi|}{|\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)|} \cdot \frac{|\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)|}{|\Delta t|} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \varphi|}{\left| 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \right|} \cdot \frac{|\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)|}{\Delta t} \\ &= 1 \cdot |\mathbf{x}'(t)| \\ &= |\mathbf{x}'(t)|. \end{aligned}$$

注意: $\Delta\varphi=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. 因此, 如果有 $\Delta t_n \rightarrow 0$, 且 $\mathbf{x}(t+\Delta t_n) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, 则

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}'(t)| &= \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t_n) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t_n} \right| \\ &= \left| \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta t_n} \right| \\ &= \left| \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} 0 \right| \\ &= 0. \end{aligned}$$

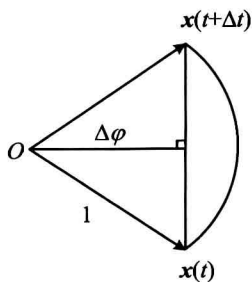


图 1.1.7

也有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi_n}{\Delta t_n} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{0}{\Delta t_n} \right| \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 = |\mathbf{x}'(t)|, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| &= |\mathbf{x}'(t)|. \end{aligned}$$

□

习 题

1.1.1 求悬链线 $\mathbf{x}(t) = (t, a \cosh \frac{t}{a}, 0)$ 的弧长 s , 并用弧长为参数表示该曲线, $a \neq 0$.

1.1.2 求曳物线 $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \ln(\sec t + \tan t) - a \sin t, 0)$ 的弧长 s , 其中 $a > 0$, 并用弧长为参数表示该曲线.

1.1.3 设圆柱螺线 $\mathbf{x}(s) = (r \cos \omega s, r \sin \omega s, h \omega s)$, $r > 0, h > 0, \omega = (r^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}}$. 证明: s 为其弧长参数.

1.1.4 用极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出曲线的弧长表达式, 其中 $r(\theta)$ 为 C^1 函数.

1.1.5 设 $\mathbf{x}(t)$ ($a < t < b$) 为 $\mathbf{R}^n$ 中 C^1 正则曲线, $\mathbf{x}(t_0)$ 为定点 P_0 到该曲线距离最近的点. 证明: 切向量 $\mathbf{x}'(t_0)$ 与 $\mathbf{x}(t_0) - P_0$ 垂直.

1.1.6 设 $\mathbf{x}(t)$ 为 C^1 参数曲线, $\mathbf{m}$ 为固定向量. 若对任何 t , $\mathbf{x}'(t)$ 正交于 $\mathbf{m}$, 且 $\mathbf{x}(0)$ 正交于 $\mathbf{m}$. 证明: 对任何 t , $\mathbf{x}(t)$ 正交于 $\mathbf{m}$.

1.1.7 设平面上 C^1 曲线 $\mathbf{x}(t)$ 在同一平面内直线 l 的同侧, 且与 l 只交于该曲线的正则点 P . 证明: 直线 l 是曲线 $\mathbf{x}(t)$ 在点 P 处的切线.

1.2 曲率、挠率

定义 1.2.1 设 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的 C^2 正则曲线, s 为弧长参数. 由引理 1.1.3 知, $\mathbf{V}_1(s)=\mathbf{x}'(s)$ 为沿 $\mathbf{x}(s)$ 的单位切向量场. 我们称

$$\kappa(s) = |\mathbf{V}_1'(s)| = |\mathbf{x}''(s)|$$

为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在点 s 的曲率. 而由定理 1.1.1,

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= |\mathbf{V}_1'(s)| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{V}_1(s+\Delta s) - \mathbf{V}_1(s)}{\Delta s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|\end{aligned}$$

度量了曲线上邻近两点 s 与 $s+\Delta s$ 的单位切向量 $\mathbf{V}_1(s)$ 与 $\mathbf{V}_1(s+\Delta s)$ 间的夹角 $\Delta \theta$ 对弧长的变化率(参阅定理 1.1.1), 它反映了曲线的弯曲程度.

当 $\kappa(s) \neq 0$ 时, 称 $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ 为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在点 s 的曲率半径.

如果 $\mathbf{x}''(s) \neq \mathbf{0}$, 即 $\kappa(s) = |\mathbf{V}_1'(s)| = |\mathbf{x}''(s)| \neq 0$, $\mathbf{V}_2(s) = \frac{\mathbf{V}_1'(s)}{|\mathbf{V}_1'(s)|} = \frac{\mathbf{x}''(s)}{|\mathbf{x}''(s)|}$ 为 $\mathbf{V}_1'(s)=\mathbf{x}''(s)$ 方向上的单位向量. 根据引理 1.1.4, $\mathbf{V}_1(s) \perp \mathbf{V}_1'(s)$, 从而 $\mathbf{V}_1(s) \perp \mathbf{V}_2(s)$. 我们称 $\mathbf{V}_2(s)$ 为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在点 s 处的主法向量. 于是

$$\mathbf{V}_1'(s) = |\mathbf{V}_1'(s)| \mathbf{V}_2(s) = \kappa(s) \mathbf{V}_2(s).$$

而 $\mathbf{V}_3(s) = \mathbf{V}_1(s) \times \mathbf{V}_2(s)$ 称为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在点 s 处的从法向量. $\{\mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), \mathbf{V}_3(s)\}$ 为 $\mathbf{x}(s)$ 点处的右旋单位正交基, 它是沿曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的自然活动标架, 有时记为 $\{\mathbf{x}(s); \mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), \mathbf{V}_3(s)\}$.

由 $\mathbf{V}_1(s)$ 与 $\mathbf{V}_2(s)$ 所张成的平面称为点 s (或 $\mathbf{x}(s)$) 处的密切平面.

由 $\mathbf{V}_1(s)$ 与 $\mathbf{V}_3(s)$ 所张成的平面称为点 s (或 $\mathbf{x}(s)$) 处的从切平面.

由 $\mathbf{V}_2(s)$ 与 $\mathbf{V}_3(s)$ 所张成的平面称为点 s (或 $\mathbf{x}(s)$) 处的法平面.

通过点 $\mathbf{x}(s)$, 分别以 $\mathbf{V}_1(s), \mathbf{V}_2(s), \mathbf{V}_3(s)$ 为方向的直线称为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 在 s (或 $\mathbf{x}(s)$) 处的切线, 主法线, 从法线(图 1.2.1).

如果 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ 为 C^3 正则曲线, 则

$$\begin{aligned}2\mathbf{V}_3'(s) \cdot \mathbf{V}_3(s) &= [\mathbf{V}_3(s) \cdot \mathbf{V}_3(s)]' = 1' = 0, \\ \mathbf{V}_3'(s) \cdot \mathbf{V}_1(s) &= \kappa \mathbf{V}_2(s) \cdot \mathbf{V}_3(s) + \mathbf{V}_1(s) \cdot \mathbf{V}_3'(s)\end{aligned}$$