高 等 数 学

下 册

清华大学应用数学系

1983.

下 册 目 录

第七章　无 穷 级 数

在前面各章中，我们已经叙述了数学分析中的主要内容：极限理论，微分学和积分学。本章所要讨论的无穷级数的理论，则是更深入地掌握数学分析的研究对象所不可缺少的一个重要工具，再由于它在大量实用科学中有着广泛的应用，更使得这个理论在现代数学方法中占有重要的地位.

这一章的主要内容是：数项级数的基本概念和判敛法则；函数项级数的一致收敛性；幂级数的基本理论，函数展成台劳级数及其应用；付氏级数及其应用.

§ 1. 常数项级数概念及基本性质

设有一数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，我们称

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

为无穷级数，或简称级数，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 u_n 称为级数的一般项.

这里的相加，仅仅是形式上的加法，这种加法是否具有“和数”呢？如果有“和数”，它的确切意义又是什么呢？为了回答这个问题，我们令

$$s_1 = u_1,\quad s_2 = u_1 + u_2,\quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\quad \cdots,$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \cdots$$

其中 s_n 称为级数（1）的第 n 部分和。这样对级数（1）就作出了一个部分和序列 $\{s_n\}$，即

$$s_1,\ s_2, \cdots, s_n,\ \cdots \tag{2}$$

反之，由这个数列 $\{s_n\}$ 也可以作出级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中 $u_1 = s_1$，$u_2 = s_2 - s_1, \cdots$，$u_n = s_n - s_{n-1}$，$\cdots$，显然，这个级数的部分和数列就是 $\{s_n\}$。

如此，我们可以给出无穷级数是否具有“和数”的下述意义.

定义. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛于有限值 s，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i = s.$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称 s 为级数的和，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

若 $n\to\infty$ 时，s_n 的极限不存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散(即级数没有和数)．当级数收敛时，又称

$$R_n = s - s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的第 n 项后之余和，简称级数的 n 项余和．

由此可见，收敛级数的求和问题，就是求部分和数列的极限问题．

例 1． 讨论几何级数（即等比级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性，如果收敛，并求其和。

解： 当 $r=1$ 时，$s_n = na \to \infty$，（$n\to\infty$），级数发散。

当 $r=-1$ 时，n 为奇数 $s_n = a$，n 为偶数 $s_n = 0$，s_n 的极限不存在，级数发散．

当 $|r| \neq 1$ 时，$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$．显然，$|r|<1$ 时，级数收敛，其和为 $\frac{a}{1-r}$；$|r|>1$ 时，级数发散．

归纳起来，当 $|r|<1$ 时，几何级数收敛，和为$\frac{a}{1-r}$；当 $|r|\geqslant 1$ 时，几何级数发散。

解毕．

例 2． 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$是否收敛，若收敛，并求其和。

解： 因为 $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$，由此可得．

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \quad (n\to\infty).$$

所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，且其和为 1．

一般情况，级数的第 n 部分和 s_n 的通式是难以写出的，因此，根据定义判断级数的收敛性以及求收敛级数的和是困难的。而判定一个级数的收敛或发散，显然是级数理论至为重要的问题，譬如，从求级数的和来看，欲求其和，首先需判定收敛，若判定了收敛，即使难以求精确和，也可以取足够多项的部分和作为和数相当好的近似值. 为了更深入地研究级数收敛性的判别（简称判敛）问题，我们先叙述级数的一些基本性质.

性质一. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a 为任一常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ 亦收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ 的第 n 部分和分别为 S_n 及 S_n'，显然有

$$S_n' = aS_n.$$

由假设知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，（$S$ 为有限数），则

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} aS_n = aS.$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

证毕.

性质二. 若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i+v_i)$ 也收敛，且

$$\sum_{i=1}^{\infty} (u_i+v_i) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i + \sum_{i=1}^{\infty} v_i$$

证：设 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \to S$，$\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \to \sigma$，$(n\to\infty)$.

于是

$$\sum_{i=1}^{\infty} (u_i+v_i) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} (u_i+v_i)\right] = \lim_{n\to\infty}(S_n+\sigma_n)$$

$$= S+\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} u_i + \sum_{i=1}^{\infty} v_i.$$

证毕.

读者必须注意：(i) 若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i$ 都发散，则级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i+v_i)$ 不一定发散。如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ 都发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}+\cos n\pi) = 0+0+\cdots+0+\cdots$ 收敛.(ii) 若两个级数一个收敛，另一个发散，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i+v_i)$ 一定发散.

性质三．将级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 任意去掉（或加进）有限项，并不影响其收敛或发散的性质．

证：对任意去掉有限项的情形进行证明．

设在 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 中任意去掉 m 项，u_{j1}，u_{j2}，$\cdots$，u_{jm}，不仿设 $j_1<j_2<\cdots<j_m<M$，当 $n>M$ 时，原级数的第 n 部分和 S_n 与新级数的第 $n-m$ 部分和 σ_{n-m} 满足关系

$$S_n=\sigma_{n-m}+\sum_{k=1}^{m} u_{jk}=\sigma_{n-m}+S_m'$$

其中 m 与 S_m' 皆为常数，因此，当 $n\to\infty$ 时，σ_{n-m} 和 S_n 的极限同时存在或同时不存在，而 σ_{n-m} 的极限又等于 σ_n 的极限，所以，原级数与任意去掉有限项的新级数有相同的敛散性．

性质四．对于一个收敛级数 $\sum_{i=1}^{n} u_i$，其中的项任加括弧后所成的级数仍收敛于原来的和．

证：设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，加括号后的级数的部分和数列为 $\{\sigma_m\}$ 则有

$$\sigma_1=(u_1+u_2+\cdots+u_{i_1})=S_{i_1}$$

$$\sigma_2=(u_1+\cdots+u_{i_1})+(u_{i_1+1}+u_{i_1+2}+\cdots+u_{i_2})=S_{i_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_m=S_{i_1}+S_{i_2}+\cdots+S_{i_{m-1}}+(u_{i_{m-1}+1}+\cdots+u_{i_m})=S_{i_m}$$

显然，$m<i_m$ 所以，$\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\lim\limits_{i_m\to\infty}S_{i_m}$，而 $\{S_{i_m}\}$ 是收敛数列 $\{S_n\}$ 的子数列，因此 $\{S_{i_m}\}$ 收敛，且有 $\lim\limits_{i_m\to\infty}S_{i_m}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

由此又可得，若加括号后的级数发散，则原级数也发散．不然的话，前者应收敛．但必须注意，对一个发散的级数，任加括号后的级数则不一定发散，如$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 是收敛的，而去掉括号的级数是发散的。因此，不能无条件地将有限项求和的结合律推广到无穷级数。

性质五（收敛的必要条件）．

定理．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $u_n\to 0$（$n\to\infty$）．

证：因为级数收敛，所以S_n，S_{n-1} 的极限存在且相等，由于

$$u_n=S_n-S_{n-1}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$$

证毕．

必须注意，级数的一般项 u_n 趋于零，只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件，例如级数

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{\text{共2项}}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{\text{共4项}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{\text{共 }2^n\text{ 项}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots$$

它的一般项 $u_n\to 0$ $(n\to\infty)$，但由性质四易证此级数是发散的。

由性质五又可知，u_n 不趋于零是级数发散的充分条件。因此，判定一个级数是否收敛时，首先应该考察一般项 u_n 是否趋于零．若 u_n 不趋于零，可立即判定级数发散；若 u_n 趋于零，再用以后讲的判敛定理，判定其收敛性．

例 3． 判断级数 (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}$， (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 的收敛性．

解： (i) $u_n=\frac{n}{100n+1}\to\frac{1}{100}\neq 0$, $(n\to\infty)$，级数发散．

(ii) 因为 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}=e^{-\frac{\ln x}{x}}\to 1$ $(x\to+\infty)$，所以 $u_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\to 1\neq 0$

$(n\to+\infty)$，级数发散。

在以下的两节中，将给出几个常用的，比较方便而有效的级数判敛方法，以解决相当广泛的级数的判敛问题。

§1 习 题

1． 已给级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n$，

① 写出此级数的前四项 u_1，u_2，u_3，u_4；

② 计算部分和 S_1，S_2，S_3，S_4；

③ 计算第 n 部分和 S_n；

④ 用收敛的定义验证这个级数是收敛的，并求其和．

2． 已给级数 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$，

① 写出此级数的一般项 u_n；

② 计算第 n 部分和 S_n，

计算第 $2n+1$ 部分和 S_{2n+1}；

③ 判断此级数是否收敛？

3． 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$ 是否收敛？

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 部分和 $S_n=\frac{2n}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

① 求此级数的一般项 u_n，并写出 u_1，u_2，u_3；

② 判断此级数的收敛性.

5. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和.

6. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和.

7. 写出下列已给级数的前四项.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}$；

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$；

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$；

④ $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}$.

8. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}$ 的和.

9. 已知级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots(u_n>0)$ 收敛，证明级数 $u_1+u_3+u_5+\cdots+u_{2n+1}+\cdots$ 也收敛.

10. 已给级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n>0)$，且其第 $3n$ 部分和 $S_{3n}\to a$，第 $3n+1$ 部分和 $S_{3n+1}\to a$ 又有 $u_{3n+2}\to0$（当 $n\to+\infty$），证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=a$.

11. 利用级数的性质与级数收敛的必要条件判断下列级数的收敛性.

① $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n=0.001,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$；

② $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{2n-2}$；

③ $\sum_{n=1}^{\infty}100\left(\frac{1}{2}\right)^n$

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$；

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2n^2+n}$

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$；

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$

12. 已知级数（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，（B）$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$，（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+V_n)$

① 若（A），（B）中一个收敛，一个发散，问（C）收敛还是发散？

② 若（A），（B）均发散，问（C）收敛还是发散？

举例说明．

13. 设（A）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．

分别就（A），（B）两种情况讨论下列级数是否收敛？

① $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)$；　② $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$；　③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$．

14. 判别下列级数的收敛性．

① $-\frac{7}{10}+\frac{7^2}{10^2}-\frac{7^3}{10^3}+\cdots$；

② $\frac{\ln 3}{3}+\frac{(\ln 3)^2}{3^2}+\frac{(\ln 3)^3}{3^3}+\cdots$；

③ $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\right)+\cdots$；

④ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots$；

⑤ $\left(\frac{1}{10000}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{10000\times 2}+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10000\times n}+\frac{1}{2^n}\right)+\cdots$；

⑥ $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$．

§ 2. 正项级数收敛性的判别法

每项都非负（即 $u_n\geqslant 0$）的级数称为正项级数．正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 是递增的，根据“单调数列有界，必有极限”的定理判定正项级数是否收敛，只要看部

分和数列是否有上界就行了．如果对一切 n，有 $S_n<M$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，否则就发散，而且这时必有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=+\infty$．但是一般情况下，部分和的计算相当困难，所以，时常将级数与已知收敛性的另一个级数（例如等比级数）相比较，以确定其部分和数列是否有上界，从而判定级数的收敛性．

I. 比较判别法

定理一．设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，且存在常数 $C>0$，使 $u_n\leqslant Cv_n\cdot(n=1,2,3,\cdots)$，则

（i） 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

（ii） 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散

证：记 $S_n=\sum_{i=1}^{n} u_i$，$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} v_i$．

（i） 设 $\sigma_n\to\sigma(n\to\infty)$，因为 σ_n 是递增的，所以对一切 n 有 $\sigma_n\leqslant\sigma$，由已知条件，对一切 n 又有 $S_n\leqslant C\sigma_n\leqslant C\sigma$，所以部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增有上界，因此，必有极限，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．

（ii） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，由（i）的结论知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，这与已知条件矛盾．故 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

下面给出比较判别法的极限形式，它应用起来更方便．

定理二．设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，（$v_n\neq 0$）及 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=A$．

（i） 若 A 是 $\geqslant 0$ 的常数， 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛， 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛．

（ii） 若 $0<A\leqslant+\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散， 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散．

证：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=A$，故任给 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$A-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<A+\varepsilon.$$

（i） 当 $n>N$ 时，$u_n<(A+\varepsilon)v_n$， （$A\geqslant 0$，$A+\varepsilon>0$）

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，根据 §1 中性质一、三，得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_n$ 收敛，根据定理一，可知 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 收敛，再根据 §1 性质三，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(ii) 取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$，当 $n>N$ 时，$u_n>\frac{A}{2}v_n$（$A>0$）

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，根据 §1 性质一，三及定理一，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $A=+\infty$ 时，也容易证得所要的结果. 证毕.

例 1. 讨论 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的收敛性.

解：当 $p<0$ 时，$\frac{1}{n^p}\to+\infty$，级数发散.

当 $p=1$ 时，把$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$中的项加括号如下

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\text{共 2 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{\text{共 4 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{\text{共 8 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right)}_{\text{共 16 项}}+\cdots$$

其中每个括号的数值皆大于$\frac{1}{2}$。而级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$发散，根据定理一，上述加括号的级数发散，再由 §1 性质四，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

当 $0\leqslant p<1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，级数发散.

当 $p>1$ 时，顺次地把 p-级数的一项、二项、四项、八项、……括在一起，得

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots \quad ①$$

再作一个级数

$$1+\underbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)}_{\text{共 2 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)}_{\text{共 4 项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)}_{\text{共 8 项}}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots \quad ③$$

显然，级数①的各项等于或小于级数②的对应项，而级数②是公比为$\frac{1}{2^{p-1}}<1$ 的几何级数，故收敛，根据比较法定理，级数①收敛。又因为正项级数加括号收敛，则去括号后也收敛[注]. 所以 $p>1$ 的 p-级数收敛.

归纳起来：p-级数，当 $p\leqslant 1$ 时，发散；当 $p>1$ 时，收敛.

用比较判别法判定级数的敛散性时， 我们常常用几何级数和 p-级数作为比较的标准，读者必须熟记它们的敛散性的结论。

例 2. 判定下列级数的敛散性：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3+n}}$,　　(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n-n}$,　　(iv) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

解：(i) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3+n}}\Big/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$，又 $p=\frac{3}{2}$ 的 p- 级数收敛， 根据定理二，此级数收敛.

(ii) $n\to\infty$ 时，$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$是与$\frac{1}{n}$等价的无穷小量，所以此级数发散.

(iii) $n\to\infty$ 时，$\frac{4}{2^n-n}$与$\frac{1}{2^n}$是同阶的无穷小量，其比的极限为 4 ，又公比为$\frac{1}{2}$的几何级数收敛，所以此级数收敛.

(iv) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{n^p}}=\begin{cases}0, & p\leqslant 1\\ +\infty, & p>1\end{cases}$$

不能用定理二判定此级数的收敛性. 同样，与几何级数相比也不能确定其敛散性. 此级数用以后讲的积分判别法容易判定是发散的.

取几何级数作比较标准，可得到两个新形式的判别法：比率法和根值法. 由于这两种方法，都是从级数自身的项的特性来判定敛散性，不需要另找一级数与之比较，而且判敛的公式简单，所以它们常被用来地判定相当广泛的一类级数的敛散性.

II. 比率判别法（达朗贝尔准则）

定理三. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\neq 1$. 则 (i) 当 $\rho<1$ 时，级数收敛. (ii) 当 $\rho>1$ 时，级数发散.

[注] 级数①的部分和数列 $\{\sigma_m\}$ 是 p- 级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列，由于 $\{S_n\}$ 是递增数列，因此其子数列 $\{\sigma_m\}$ 有极限时， $\{S_n\}$ 自身也必有极限.

证：（i） 若 $\rho<1$，由极限定义，取正数 ε 并使 $r=\rho+\varepsilon<1$，必存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r<1 \text{ 即 } u_{n+1}<ru_n$$

因此有

$$u_{N+2}<ru_{N+1}$$

$$u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{N+P}<ru_{N+P-1}<\cdots<r^{P-1}u_{N+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而 $ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+\cdots+r^{P-1}u_{N+1}+\cdots$ 是收敛的几何级数，根据定理一，级数

$$u_{N+2}+u_{N+3}+\cdots+u_{N+P}+\cdots$$

也收敛，它再加进 $N+1$ 项，u_1，u_2，…，u_{N+1}，就是原级数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．

（ii） 若 $\rho>1$，由极限定义，取 $\varepsilon>0$，使 $\rho-\varepsilon>1$，必存在正整数 M，当 $n>M$ 时，恒有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\varepsilon, \text{ 即 } \quad u_{n+1}>(\rho-\varepsilon)u_n>u_n$$

所以 $n>M$ 时，u_n 是递增的．因此，当 $n\to\infty$ 时，u_n 不可能趋于 0．故级数发散．

当 $\rho=+\infty$ 时，级数显然更是发散的．但当 $\rho=1$ 时，比率法不能给出肯定的答案。如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（$p$ 为常数）由达朗贝尔准则得：p 为任何常数时，ρ 都等于 1， 而 p—级数当 p 取不同的值时，有时收敛，有时发散．

例 3．判定下列级数的敛散性：

（i） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$，　　（ii） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$，　　（iii） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$．

解：（i） 因为 $\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}\Big/\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}<1$ （$n\to\infty$）

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 收敛．

（ii） 这时 $\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\Big/\frac{n!}{10^n}=\frac{n+1}{10}\to+\infty(n\to\infty)$ 所以原级数发散。

（iii） 由于 $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!}{n^n}=\frac{n^n\cdot(n+1)}{(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}\to e^{-1}<1 \quad (n\to\infty)$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛　　　　解毕.

这里顺便提一下，在判定了级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛后，根据级数收敛的必要条件，立即可得，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

因此，通过级数的判敛，也可求某些数列的极限.

例 4. 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$（$x$是任何不等于0的实数）的收敛性.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2}}{\dfrac{x^{2n}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}x^2=x^2$$

当$|x|<1$时，级数收敛；当$|x|>1$时，级数发散. 当$|x|=1$时，由比率法不能判定级数的敛散性，但这时是$p=2$的p—级数，所以级数收敛。

III. 根值判别法（柯西判别法）

定理四. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$. 则：（i）当$\rho<1$时，级数收敛；（ii）当$\rho>1$时，级数发散；（iii）当$\rho=1$时，级数可能发散，也可能收敛.

定理四的证明类似于定理三，我们把它留给读者作为练习.

例 5. 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$的收敛性.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$$

故此级数收敛。　　　　解毕.

IV. 积分判别法（柯西积分准则）

定理五. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，若连续函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递减，且$u_n=f(n)$，（$n=1,2,3,\cdots$），则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$有相同的敛散性。

证：利用几何图形（图 7.1）来说明，既简便又明显。

图中实线所示的台阶形面积为

$$u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=S_{n-1},$$

虚线所示的台阶形面积为

$$u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n=S_n-S_1,$$

由于 $f(x)$ 单调递减，显然有

$$S_n-u_1<\text{曲边梯形面积}\int_1^n f(x)dx$$

$$<S_{n-1}<S_n$$

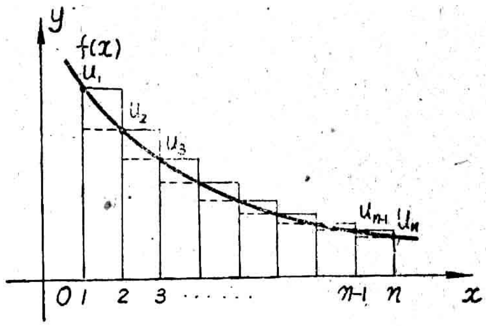

图 7.1

或写成
$$\int_1^n f(x)dx<S_n<u_1+\int_1^n f(x)dx$$

若广义积分收敛于 I，则 $S_n<u_1+I$，单调递增数列 $\{S_n\}$ 有极限，故级数收敛．

若广义积分发散，即 $\int_1^{+\infty} f(x)dx=+\infty$，则 $S_n\to+\infty$，故级数发散．

用积分判别法讨论 p— 级数的敛散性是十分简便的，读者不防练习一下．

例 6．判定级数（i）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$、（ii）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$的敛散性．

解：(i) 取 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$，此函数在 $[2,+\infty)$ 上满足定理五的条件。又

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty.$$

故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散．

(ii) 因为 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$，广义积分收敛．故级数 (ii) 收敛．

最后附带说一下，对于每项都非正的负项级数的判敛问题，可以化为正项级数来讨论．

§ 2 习　　题

1．用比较判别法判断下列级数的敛散性

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n+3}$；　　② $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+4)}$；

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$；　　④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$；

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$；

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4n}$；

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{3n}\right)$；

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$；

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ （$a>0$ 为常数）；

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$；

⑪ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$；

⑫ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$；

⑬ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2. 设$\frac{a_{n+1}}{a^n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$ （$n=1，2，\cdots，a_n>0, b_n>0$）

证明 ① 若$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

② 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

3. 用比率法（达朗贝尔准则）判断下列级数的敛散性.

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$；

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)!}$；

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$；

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$；

⑦ $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$；

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4n}$；

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$.

4. 能否用比率法来判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$的敛散性？若不能，应如何判别其敛散性？

5. 试说明下列命题是否成立.

① 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散（$u_n>0$）；