高等院校网络教育精品教材
——基础类

高等数学(Ⅰ)

GAODENG SHUXUE（Ⅰ）

陈滋利　陈金喜
张红玲　冯　颖　编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

高等院校网络教育精品教材—— 基础类

高等数学

（Ⅰ册）

陈滋利　陈金喜
张红玲　冯　颖　编

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书共计11章，分Ⅰ、Ⅱ两册，Ⅰ册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程；Ⅱ册内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分、曲线积分与格林公式、无穷级数. 全书取材着眼于微积分中的基本概念、基本原理、基本方法及应用，突出了数学思想和数学方法，内容处理比较新颖，覆盖面广，深入浅出，通俗易懂.

本书既可作为高等职业院校，远程、函授等成人教育的高等数学通用教材，也可作为自学考试的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 1 / 陈滋利等编. —成都：西南交通大学出版社，2012.5（2012.9重印）

高等院校网络教育精品教材. 基础类

ISBN 978-7-5643-1565-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第084693号

高等院校网络教育精品教材——基础类

高等数学

（Ⅰ册）

陈滋利 陈金喜 张红玲 冯 颖 编

*

责任编辑 张宝华

封面设计 墨创文化

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段111号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564)

http: //press.swjtu.edu.cn

成都勤德印务有限公司印刷

*

成品尺寸：185 mm × 260 mm 印张：9.375

字数：233千字

2012年5月第1版 2012年9月第2次印刷

ISBN 978-7-5643-1565-8

定价：17.80元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

前　言

现代远程教育也称网络教育，即运用网络技术与环境开展的教育，是现代信息技术应用于教育后产生的新概念. 通过网络，教师与学员即使相隔万里也可以开展教学活动，而学员也可以随时随地进行学习，真正打破了时间和空间的限制. 对于工作繁忙、学习时间不固定的自学者而言，网络远程教育是最方便不过的学习方式.

本书是高等学校网络教育学院和广播电视大学专科学历教育“高等数学”公共课教材，也可供高职、高专的学生使用. 全书分为Ⅰ、Ⅱ两册，Ⅰ册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程；Ⅱ册内容为空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分、曲线积分与格林公式、无穷级数. 本书每节附有足够数量的习题以便学生扎实、准确地掌握本书内容.

网络教育高等数学课程的教学内容充分体现了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以“掌握概念，强化应用能力”为出发点，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，加强对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养. 本书多位作者长期为网络教育学院学生讲授高等数学，深知他们数学基础薄弱，了解他们学习高等数学课程时的疑难与困惑，因此，全书取材着眼于微积分中的基本概念、基本原理、基本方法及应用，突出了数学思想和数学方法. 本书例题丰富，图形直观，富有启发性，便于自学.

由于时间和水平方面的原因，本教材的不足之处在所难免，诚恳地希望广大师生能把使用时发现的问题告诉我们，以便日后修订完善. 若有建设性意见，亦望赐教，在此表示衷心的感谢!

编　者

2012.1

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象主要是常量，而高等数学的研究对象则是变量，而且着重研究变量之间的依赖关系，即函数关系，并讨论当某个变量变化时，与之相关变量的变化趋势. 这就是所谓的极限理论. 本章内容是学习高等数学的基础.

第一节　集合与函数

一、集　合

1. 集合的概念及表示

在数学中，我们把具有某种特定性质的事物的总体称为一个**集合**，组成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$ 或 $a \overline{\in} A$. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**.

集合的表示方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来. 例如，由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\};$$

自然数集 $\mathbf{N}$ 可以表示成

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

正整数集 $\mathbf{N}^+$ 可以表示成

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M = \{x \mid x\text{所具有的性质}P\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集，就可表示成

$$B = \{1, -1\} = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}.$$

设 A, B 是两个集合，如果集合 A 和集合 B 的元素完全相同，则称 A 和 B **相等**，记作 $A = B$；

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$（读作 B 包含 A）.

不含任何元素的集合称为**空集**. 例如，集合

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{且} x^2 = -1\}$$

是空集. 空集记作 $\varnothing$，且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$.

2. 区　间

如果一个集合的元素都是实数,我们称之为**数集**. 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 区间是用得较多的一类数集，常用的区间如表 1.1 所定义. 表中 a 和 b 都是实数，分别称为区间的**左端点**和**右端点**. $+\infty$, $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”. 在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间时，我们就简单地称它为“区间”，常用 I 表示.

表 1.1

名称	记号	定义
开区间	(a,b)	$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$
闭区间	$[a,b]$	$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
左闭右开区间	$[a,b)$	$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$
左开右闭区间	$(a,b]$	$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$
无穷区间	$(a,+\infty)$	$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$
	$[a,+\infty)$	$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$
	$(-\infty,a)$	$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\}$
	$(-\infty,a]$	$(-\infty,a]=\{x \mid x \leqslant a\}$
	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\text{为实数}\}=\mathbf{R}$

在高等数学中，我们经常会用到一种特殊的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，称之为点 a 的 **δ 邻域**，简称为点 **a 的邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

通常，δ 是较小的正实数，所以点 a 的 δ 邻域表示与点 a 邻近的点，如图 1.1 所示. 有时，我们只考虑与点 a 邻近的点，而不考虑点 a 本身，即只考虑点集

$$\{x \mid a-\delta<x<a+\delta \text{且} x \neq a\}.$$

我们称这个点集为点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，如图 1.2 所示.

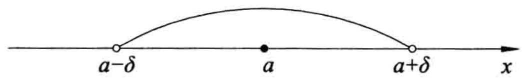

图 1.1

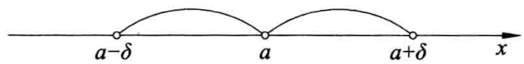

图 1.2

二、函　数

1．函数概念

在数学中，许多计算公式实际上就是一个变量与另一个变量之间的关系，如半径为 r 的圆的面积公式为

$$A=\pi r^2\ ;$$

而半径为 r 的球的体积和表面积公式为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3\ ,\quad S=4\pi r^2\ .$$

这些其实就是所谓的函数.

定义 1　设 D 是实数的一个非空子集，如果存在一个法则 f，使得对 D 中每个实数 x，按照法则 f，存在唯一实数 $f(x)$ 与之对应，则称 f 为 D 上的**函数**，记作

$$f:D\to\mathbf{R}\ .$$

这里 D 称为函数 f 的**定义域**；集合

$$R(f)=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**. 有时可简单地称

$$y=f(x)$$

为函数.

定义 2　如下平面点集

$$G(f)=\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**，它通常是一条平面曲线.

例 1　式子

$$y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$$

是一个函数，其定义域 $D=[-2,2]$，值域 $R(f)=[0,2]$，图形是半径为 2 的上半圆周.

习惯上，当一个函数是由一个式子给出时，其定义域就是使得该式有意义的全体实数.

2. 函数的例子

例 2　常值函数：函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)[0,+\infty)$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.3 所示.

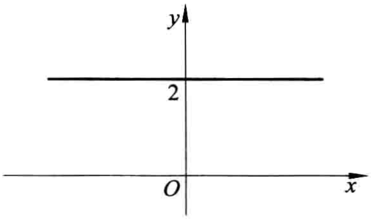

图 1.3

例 3　绝对值函数：函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=[0,+\infty)$，它的图形如图 1.4 所示.

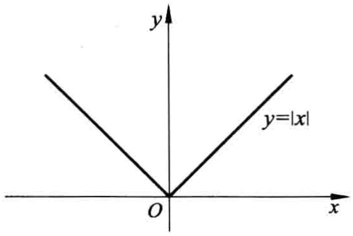

图 1.4

在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**.

例 4　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,+\infty)$．当 $x\in[0,1]$ 时，对应的函数值

$$f(x)=\sqrt{x}\ ;$$

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，

$$f(x)=1+x\ .$$

例如，$f(1)=1$，$f(3)=1+3=4$．这个函数的图形如图 1.5 所示.

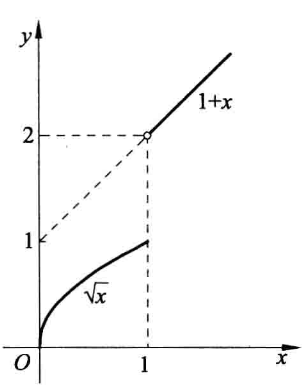

图 1.5

三、函数的几种特性

1．函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对所有 $x \in D$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**．否则，就称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

如果存在数 M_1，使得

$$f(x) \leqslant M_1$$

对所有 $x \in D$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**上界**，而 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

如果存在数 M_2，使得

$$f(x) \geqslant M_2$$

对所有 $x \in D$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**下界**，而 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

容易验证，函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是它既有上界，又有下界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，数 1 是它的一个上界，而数 -1 则是它的一个下界．又

$$|\sin x| \leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，这里 $M=1$，当然也可取大于 1 的任何数作为 M.

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无上界，但有下界．例如，1 就是它的一个下界．因此函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的.

2．函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为区间 I，若对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的（见图 1.6）；如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的（见图 1.7）．单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

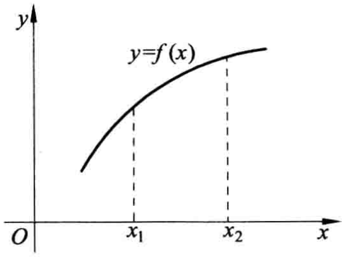

图 1.6

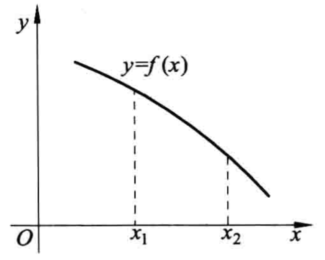

图 1.7

单调增加函数的图像是沿 x 轴的正向上升的曲线，而单调减少函数的图像则是沿 x 轴的正向下降的曲线.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的（见图 1.8）.

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的（见图 1.9）.

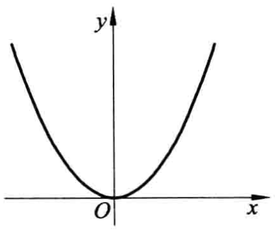

图 1.8

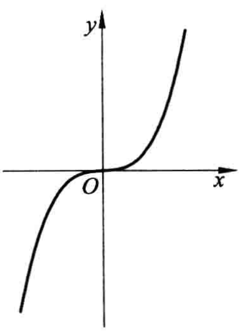

图 1.9

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，即若 $x\in D$，则 $-x\in D$. 如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，因为

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

而 $f(x)=x^3$ 是奇函数，因为

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

同理容易验证，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x$ 是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的. 因为若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，所以如果 $A(x,f(x))$ 是图形上的点，则与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x,f(x))$ 也在图形上（见图 1.10）.

奇函数的图形关于原点是对称的. 因为若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，所以如果 $A(x,f(x))$ 是图形上的点，则与它关于原点对称的点 $A''(-x,-f(x))$ 也在图形上（见图 1.11）.

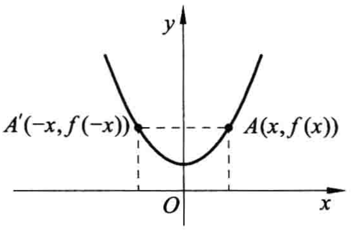

图 1.10

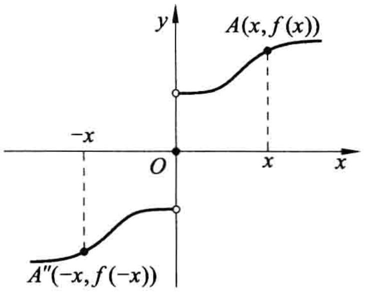

图 1.11

例 5　讨论函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　由于

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期，通常我们说周期函数的周期是指**正周期**，有时指**最小正周期**（若存在最小正周期）.

例如，函数 $\sin x,\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而函数 $\tan x,\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

图 1.12 表示一个周期为 π 的周期函数. 在每个长度为 π 的区间上，函数图形有相同的形状.

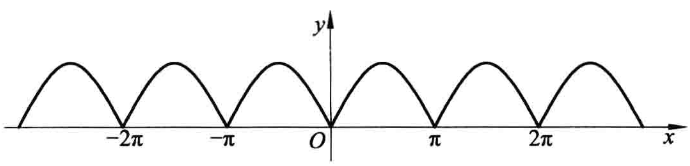

图 1.12

四、反函数与复合函数

1．反函数

设函数 $f:D \to f(D)$ 满足：当 $x_1 \neq x_2$ 有

$$f(x_1) \neq f(x_2),$$

则对任意 $y \in f(D)$，存在唯一 $x \in D$ 与之对应，称此对应为函数 f 的反函数，用 f^{-1}: $f(D) \to D$ 来表示.

按此定义，对每个 $y \in f(D)$，有唯一的 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，于是有

$$f^{-1}(y) = x.$$

这就是说，反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

例如，函数 $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ 的反函数存在，其反函数为

$$x = y^{\frac{1}{3}},\ y \in \mathbf{R}.$$

由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，于是 $y = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ 的反函数通常写作

$$y = x^{\frac{1}{3}},\ x \in \mathbf{R}.$$

一般地，$y = f(x)$, $x \in D$ 的反函数记作

$$y = f^{-1}(x),\ x \in f(D).$$

若 f 是定义在 D 上的单调函数，则 f 的反函数 f^{-1} 必定存在，而且容易证明 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数，且 f^{-1} 与 f 有相同的单调性.

把 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，那么这两个图形是关于直线 $y = x$ 对称的（见图 1.13）.

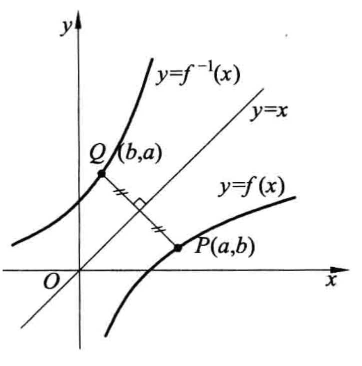

图 1.13

2．复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 $D(g)$，且其值域 $R(g) \subset D(f)$，则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D(g)$$

称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 $D(g)$，变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 可构成复合函数，即按“先 g 后 f ”的次序复合，通常记作 $f \circ g$，

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

g 与 f 能构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是：函数 g 的值域 $R(g)$ 必须含在函数 f 的定义域 $D(f)$ 内，即 $R(g) \subset D(f)$. 否则，不能构成复合函数. 例如，$y = f(u) = \sqrt{u}$ 的定义域为 $D(f) = [0, +\infty)$，$u = g(x) = x^3$ 的值域为 $(-\infty, +\infty)$，故 g 与 f 不能构成复合函数. 但是，如果将函数 g 限制在它的定义域的一个子集 $D = [0, +\infty)$ 内，那么它们可以复合，其复合函数为

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3}, \quad x \in D.$$

为了简便起见，习惯上仍称函数 $\sqrt{x^3}$ 是由函数

$$u = x^3 \quad 与 \quad y = \sqrt{u}$$

构成的复合函数. 这里函数 $u = x^3$ 应理解成：

$$u = x^3, x \in D.$$

很容易把函数的复合推广到多个函数的情形，只要它们顺次满足构成复合函数的条件. 例如，函数 $y = \mathrm{e}^u, u = \sin v, v = 2x + 1$ 可构成复合函数

$$y = \mathrm{e}^{\sin(2x+1)}.$$

五、函数的运算与初等函数

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域依次为 D_1, D_2，$D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

和（差）$f \pm g$：$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$；

积 $f \cdot g$：$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$；

商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, x \in D$ 且 $g(x) \neq 0$.

例如，$\sin x + 3x^2$ 是函数 $\sin x$ 与 $3x^2$ 的和，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 是 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的商.

在初等数学中已经讲过下面几类函数：

幂函数：$y = x^\mu$（μ 是常数）；

指数函数：$y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$），特别地，$y = \mathrm{e}^x$ 称为自然指数函数；

对数函数：$y = \log_a x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$），特别当 $a = \mathrm{e}$ 时，记为 $y = \ln x$，称为自然对数；

三角函数：$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$；

反三角函数：$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arc\,cot} x$.

以上这五类函数统称为**基本初等函数**.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 例如，

$$y=\sqrt{1+\sin x}\ ,\quad y=\mathrm{e}^{\sin x}\ ,\quad y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的自然定义域：

（1）$y=\sqrt{4x-2}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

（3）$y=\tan(x+1)$；　　（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$；

（5）$y=\arctan \mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x+1}$；　　（6）$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

（7）$y=\ln(x+1)$；　　（8）$y=\mathrm{e}^{\tan x}$.

2. 下列各题中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

（1）$f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；

（2）$f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

（4）$f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

3. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

（1）$y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；

（2）$y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

5. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的，证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

6. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

（1）$y=x^2(1-x^2)$；　　（2）$y=3x^2-x^3$；

（3）$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　　（4）$y=\dfrac{\sin x}{x}$；

（5）$y=\sin x+\cos x$；　　（6）$y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

7. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

（1） $y=\cos(x-2)$；　　（2） $y=\sin x+\cos x$；

（3） $y=1+\cos 2x$；　　（4） $y=x\sin x$；

（5） $y=\sin^2 x$.

8. 求下列函数的反函数：

（1） $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　（2） $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$；

（3） $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(ad-bc\neq 0)$；　　（4） $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

9. 指出下列函数是由哪几个简单函数复合而成的：

（1） $y=\arccos\sqrt{x}$；　　（2） $y=\ln\sin^2 x$；

（3） $y=e^{e^x}$；　　（4） $y=\ln\ln x$.

第二节　数列与函数的极限

一、数列极限的概念

极限概念源于对某些实际问题的精确解答，它研究的是在自变量的某个变化过程中，函数的变化趋势. 下面就函数在自变量不同变化过程中的变化趋势问题分别加以讨论，先来看数一看列极限的概念.

我们把按照一定顺序排列起来的无穷多个数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为**数列**，简记为数列 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的**项**，第 n 项 x_n 叫做数列的**通项**或**一般项**.

例如：

（1） $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$；

（2） $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$；

（3） $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$；

（4） $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1},\quad \frac{1}{2^n},\quad (-1)^{n+1},\quad \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

数列 $\{x_n\}$ 也可以看做是定义在正整数集 $\mathbf{N}^+$ 上的函数. 即对每个 $n\in\mathbf{N}^+$，对应着一个确定