東北行政委員會教育部規定

高中臨時教材
專科學校適用

代　數　學

上　冊

虞明禮著
榮方舟改

東北新華書店印行

1949

代數學上册

目　　錄

第一章　總　　論

第二章　整式四則

第三章　因子分解

第四章 最高公因式最低公倍式

第五章 分式

第六章 對稱式，待定係數法，分項分式

第七章　比及比例，變數法

第八章　開　　方

第九章 根 式

第十章 指 數 論

第十一章 對 數

第十二章　一元一次方程式

第十三章　不定方程式及矛盾方程式

第十四章 聯立一次方程式

第十五章 一元二次方程式

第十六章　多元二次方程式

第十七章　函數的圖表　方程式之圖解法

第十八章 不等式

第十九章 簡易級數及其求和法

代 數 學

上 册

第 一 章

總 論

§1. **代數之目的** 初等算學大別爲二類，一類論形，一類論數，論形者爲幾何；論數者則爲算術及代數，算術之目的，在於研究數量的運算；代數之目的乃繼續算術，對於數量之運算作進一步的探求，代數的方法比算術巧，代數的範圍比算術廣，英人牛頓曰『代數者，廣義之算術也，』其言洵有至理。

§2. **代數之方法** 代數中如何能將算術的範圍推廣？端賴下列兩種方法。

第一法 用文字表數，使（a）運算的形式簡明，（b）答數的範圍加廣，（c）解題的工具銳利，今依次舉例明之。

【例一】 設有問題：『大小二數之和爲 140，自小數

3倍減去大數2倍，所得之差爲30求此二數。」

算術解法　因小數＋大數是140，

所以2倍小數＋2倍大數是280，

又因3倍小數－2倍大數是30。

所以2倍小數＋2倍大數＋3倍小數－2倍大數是280＋30。

所以5倍小數是310。

所以小數是310÷5＝62。大數是140－62＝78。

代數解法　設x＝小數，y＝大數，則

$$\begin{cases} x+y=140 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-2y=30 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

2×(1)得　$2x+2y=280 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

(1)＋(2)得　$5x=310$

$$\therefore x=62=\text{小數}$$

代入(1)得　$y=140-62=78=$大數。

學者試觀代數解法比之算術解法何等簡明！

【例二】　仍就前例來說，在算術，依四則解法能解例一之問題，得其答數爲：

$$(A)\begin{cases} \text{小數}=62 \\ \text{大數}=78 \end{cases}$$

在代數，應用文字代表已知數，則可解範圍更廣之問題：『大小兩數之和爲a；自小數m倍減去大數n倍，所得之差爲b.，求此二數，』依代數解法，得其答數爲：

$$(B)\begin{cases}小數=\dfrac{na+b}{m+n}\\[2ex]大數=\dfrac{ma-b}{m+n}\end{cases}$$

學者注意(B)式所表答數比(A)式範圍加廣矣！蓋在此類問題中，任設m, n, a, b爲何值，所求大小二數皆可由(B)式求得之，故(B)式代表一類問題之答數；至於(A)式，則僅表單獨一個問題之答數，二者適用的範圍自有廣狹之不同也。

【例三】　設有問題：『某數7倍與其平方之和爲198，求該數，』此問題，在算術無法解決；在代數則由方程式$x^2+7x=198$可立得其答數爲11或-18.代數之解法，不亦神妙乎哉！

第二法　創造新數以濟運算之窮，算術上的運算往往有相當限制；逾此限制，算法便不通行，例如，在算術減法中，減數如大於被減數，則此減法便不通；代數上創造負數，減法乃無不可行，又如在算術開方中，被開方數如不

爲完全整方，則此不盡根數精確之眞值便無法求得，其性質因亦不能明瞭；代數上引用無理數，此類根式的性質及算法乃能全部了然。不特如此，即在代數開方中，倘所論之數只限於實數，則當被開方數爲負數，而開方次數爲偶數次時，此開方算法亦不能通行，故又創立虛數以濟其窮，自有虛數，開方算法乃毫無限制矣。

§3. 代數之數系 如上（第二法）所述，代數上爲濟算法之窮計，當創立新數以求其通，故代數上所論之數比算術上所論者範圍加廣，各類新數皆由適應算法的需要而來，茲將代數的數系，列表如下：

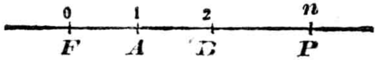
$$\left.\begin{array}{l}\text{正數}\\\text{負數}\end{array}\right\}\text{代數數}\left\{\begin{array}{l}\text{實數}\left\{\begin{array}{l}\text{有理數}\left\{\begin{array}{l}\text{整數}\\\text{分數}\end{array}\right.\\\text{無理數}\end{array}\right.\\\text{虛數}\end{array}\right.$$

算術中只論有理數即整數或分數，代數中添出無理數，不盡根數即無理數之一種，有理數及無理數總稱之曰實數，實數之外代數中又添出虛數，負數之平方根是也，算術中只論正數，代數中於各種數皆分爲正負二類，故凡一切代數數之數值包括絕對值及正負號二事。

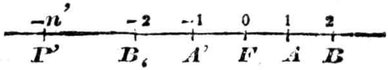
§4. 代數數之圖形表示 代數系中任何一數，皆可用

平面上之一點表之，略陳其說如下：

(1)　正實數　在一直線上取定點F表零，定長FA爲單位1，則無論n爲有理數抑爲無理數，由幾何作圖法恒可得$FP=nFA=n$。故任何數n可以適當之一點表之。



(2)　負實數　在上述直線上F之左側取P使$FP=-nFA=-n$，則此P'點便可代表$-n$



(3)　虛數　詳見第十八章。

§5.　**代數之基礎**　代數上一切運算之基礎全在幾條假設，此類假設是否真確，理論上無法證明，不過按之實際，無往不符，所以算學家乃將此類假設認爲公理或公律，代數上所有公律可分爲兩類：

第一類　關於數之運算者名曰運算公律，列舉於下：—

(1)　在加法有對易律：$a+b=b+a$

結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

$=(a+c)+b$。

(2)　在乘法有對易律：$ab=ba$

結合律：$(ab)c=a(bc)=(ac)b$。

配分律：$a(b+c)=ab+ac$。

(3) 在冪法有指數律：1. $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$。

2. $(a^m)^n=a^{mn}$。

3. $(ab)^n=a^nb^n$。

各律中的a,b爲任何數，指數律中的m,n爲整正數，以上諸律，乃代數中各數運算之基本公律，此類公律的來源，最初是由正整數算法的啓示，其後乃假定此三律爲天經地義，凡由舊算所生之一切新數，其算法須經適當的規定（新數既然是新的，其算法照理可以隨便規定；但爲符合上述三律起見，此規定便已不能隨便），務使此三律仍能完全符合。

例如，在初中代數，吾人已知下列幾種算法：

I. $a+(-b)=a-b$　　II. $a-(-b)=a+b$。

III. $a(-b)=-ab$　　IV. $(-a)(-b)=ab$。

何以知上列算法果爲正確乎？無他，以其能合前述三律之故也，試就算法 III, IV 考之。

(a) 先驗乘法對易律能否符合？

依 IV，$(-a)(-b)=ab$，$(-b)(-a)=ba$。

但a,b俱爲正數，其乘算服從對易律；$ab=ba$。

$$\therefore (-a)(-b)=(-b)(-a).$$

(b) 次驗乘法結合律能否符合?

依IV, $(-a)(-b)=ab$

所以$[(-a)(-b)](-c)=ab(-c)=-abc$ 〔依III.〕

又依IV. $(-b)(-c)=bc$

所以$(-a)[(-b)(-c)]=(-a)bc=-abc$ 〔依III.〕

同樣$[(-a)(-c)](-b)=-abc$

$\therefore [(-a)(-b)](-c)=(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-c)](-b).$

(c) 再驗乘法配分律能否符合?

因$(-a)[(-b)+(-c)]=(-a)[-(b+c)]=a(b+c)$

$=ab+ac$

又$(-a)(-b)+(-a)(-c)=ab+ac$

$\therefore (-a)[(-b)+(-c)]=(-a)(-b)+(-a)(-c).$

同樣,依上述 I, II, III, IV 幾條算法,加法中對易結合兩律亦均能適合,學者試自驗之。

第二類 關於等式之推演者名曰等式推演公律,推演公律共有四條。

若$a=b, c=d$, 則$a+c=b+d$.