

東北行政委員會教育部規定

高中臨時教材
專科學校適用

代 數 學

上 冊

虞 明 禮 著
榮 方 舟 改

東北新華書店印行

1 9 4 9

代 數 學 上 冊

目 錄

第一章 總 論

1. 代數之目的..... 1	4. 代數數之圖形 表示..... 4
2. 代數之方法..... 1	
3. 代數之數系..... 4	5. 代數之基礎..... 5

第二章 整 式 四 則

6. 定義..... 9	9. 分離係數法.....18
7. 正負數算法.....11	10. 待定係數法.....21
8. 整式四則之複習...13	11. 綜合除法.....23

第三章 因 子 分 解

12. 引論.....26	14. 餘數定理.....35
13. 因子分解之初 步範式.....26	15. 因子定理一.....36
	16. 因子定理二.....37

- | | |
|---|--|
| 17. $a^3 + b^3 + c^3$
$-3abc$ 之因子.....40 | 18. $a^m \pm b^m$ 之因子...41
19. 因子分解之通則...42 |
|---|--|

第四章 最高公因式最低公倍式

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 20. 引論.....45 | 之二.....47 |
| 21. $H.C.F.$ 求法
之一.....45 | 24. $H.C.F.$ 求法
之三.....49 |
| 22. $L.C.M.$ 求法
之一.....46 | 25. $L.C.M.$ 求法
之二.....54 |
| 23. $H.C.F.$ 求法 | |

第五章 分 式

- | | |
|------------------|-------------------|
| 26. 引論.....57 | 31. 分式加減法.....61 |
| 27. 分式符號之變化...57 | 32. 分式乘法.....63 |
| 28. 分式變形之原理...58 | 33. 分式除法.....64 |
| 29. 約分.....59 | 34. 疊分式之化簡.....66 |
| 30. 通分.....60 | |

第六章 對稱式，待定係數法，分項分式

- | | |
|----------------|----------------|
| 35. 齊次式.....71 | 36. 對稱式.....71 |
|----------------|----------------|

37. 簡號 Σ72	42. 定理(恒等式).....79
38. 非對稱之對稱式...72	43. 定理(恒等式
39. 對稱式之應用.....73	係數).....80
40. 簡號 $f(x)$78	44. 分項分式.....84
41. 因子定理的擴張...79	

第七章 比及比例，變數法

45. 引論.....88	51. 倒變.....97
46. 比之重要定理.....88	52. 正變，倒變與
47. 比例之重要定理...93	比例之關係.....97
48. 比例問題解法	53. 聯變.....98
舉例.....93	54. 變數法問題解
49. 常數，變數.....96	法舉例.....99
50. 正變.....97	

第八章 開 方

55. 引論..... 103	58. 開立方之通法... 108
56. 用因子分解法	59. 開四方開六方
開方..... 104	之通法..... 111
57. 開平方之通法... 104	

第九章 根 式

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 60. 引論..... 113 | 67. 同次根式..... 122 |
| 61. 根式何以會不盡 114 | 68. 不盡根式之乘法 122 |
| 62. 不盡根式之真
值與近似值..... 115 | 69. 有理化因式..... 125 |
| 63. 根式變形之原理 116 | 70. 不盡根式之除法 127 |
| 64. 不盡根式之化簡 117 | 71. 兩個重要定理
(根式問題)..... 129 |
| 65. 同類根式..... 119 | 72. 兩項二次根式
之平方根..... 131 |
| 66. 不盡根式之加
減法..... 120 | |

第十章 指 數 論

- | | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| 73. 正整指數三大
定律..... 133 | 77. 負指數的意義... 136 |
| 74. 指數意義之推廣 134 | 78. 證負指數分指
數零指數是否亦
適合於指數定律 137 |
| 75. 分指數的意義... 135 | 79. 關於指數之結論 141 |
| 76. 零指數的意義... 136 | |

第十一章 對 數

80. 對數之需要..... 146	86. 常用對數表..... 158
81. 對數之意義..... 146	87. 由真數求對數... 158
82. 對數三大定律... 149	88. 由對數求真數... 161
83. 常用對數真數... 153	89. 對數在計算上 之應用..... 165
84. 定位部與定值部 153	90. 複利息問題..... 168
85. 定位定值兩部 之特性..... 154	91. 非常用對數..... 171

第十二章 一元一次方程式

92. 引論..... 173	96. 分式方程之解法 180
93. 一元一次方程式 之解法..... 175	97. 根式方程式之 解法..... 184
94. 根之增減..... 177	98. 指數方程之解法 185
95. 同根方程式..... 178	99. 應用問題之解法 186

第十三章 不定方程式及矛盾方程式

100. 引論..... 192	之矛盾與不定... 193
101. 一元一次方程式 之矛盾與不定... 193	103. 不定方程式與 恒等式之區別... 194
102. 兩元一次方程式	104. 不定方程式之

正整根..... 195

根之又一求法... 198

105. 不定方程式正整

第十四章 聯立一次方程式

106. 引論..... 201

107. 兩元一次方程組

之解法..... 202

108. 前節解法之間

題，同根方程組 205

109. 前節問題之解答 207

110. 兩元方程組之

特殊解法..... 208

111. 兩元一次方程

組之通解..... 210

112. 前節解答之討論 211

113. 兩元三方程..... 213

114. 三元三方程式

之解法..... 216

115. 前節解法之原理 217

116. 三元三方程式

之通解..... 218

117. 方程組(III)

性質之討論..... 219

118. 三元兩方程或

三元一方程..... 221

119. 四元四方程式

問題..... 225

第十五章 一元二次方程式

120. 高次方程式解

法原理..... 227

121. 二次方程式解法 228

122. 二次方程式之

通解..... 230	判別式..... 239
123. 虛數之性質及 其簡易運算..... 231	126. 二次三項式的 符號..... 241
124. 可化爲二次形 式的方程式..... 236	127. 極大極小問題... 244
125. 根之性質.	128. 根與係數之關係 246

第十六章 多元二次方程式

129. 總論..... 252	組中，兩個方程 式俱爲二次時的 特殊解法..... 257
130. 二次方程組解 法原理..... 253	133. 多元二次或二 元高次方程組的 特殊解法..... 261
131. 兩元二次方程 組中，一個方程 式爲一次時的普 徧解法..... 255	134. 方程式的個數 多於未知數者... 263
132. 兩元二次方程	

第十七章 函數的圖表 方程式之圖解法

135. 引論..... 267	137. 函數之圖表法... 268
136. 函數..... 267	138. 圖表的基礎：

座標制..... 269	144. 三次函數 $y = a$
139. 一次函數 $y = a$	$x^3 + bx^2 + cx + d$
$x + b$ 之圖線..... 270	之圖線..... 281
140. 二元一次方程	145. 三次方程式之
組之圖解法..... 272	圖解法..... 283
141. 二次函數 $y = a$	146. 三次方程式之
$x^2 + bx + c$ 的圖線..... 275	特別圖解法..... 283
142. 二次方程式之	147. 其他重要曲線... 285
圖解法..... 278	148. 二元二次方程
143. 二次方程式之	組之圖解法..... 289
特殊圖解法..... 279	

第十八章 不 等 式

149. 引論..... 291	154. 絕對不等式之
150. 大小的定義..... 291	證明..... 294
151. 基本定理..... 291	155. 條件不等式之
152. 其他重要定理... 292	解法..... 296
153. 不等式之類別... 293	

第十九章 簡易級數及其求和法

156. 級數定義.....	301
157. 等差級數.....	302
158. 等差級數 n 項 之和.....	303
159. 等比級數.....	304
160. 等比級數 n 項 之和.....	305
161. 無盡等比級數 之和.....	307
162. 調和級數.....	309

163. 簡號 Σ 用法之 擴張.....	311
164. 特殊級數： Σn^k	311
165. 特殊級數： Σ $n(n+1)\cdots(n+k)$	313
166. 特殊級數： Σ $\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+l)}$	313
167. 特殊級數： Σ $[a + (n-1)d]r^{n-1}$	315

代 數 學

上 冊

第 一 章

總 論

§ 1. 代數之目的 初等算學大別爲二類，一類論形，一類論數，論形者爲幾何；論數者則爲算術及代數，算術之目的，在於研究數量的運算；代數之目的乃繼續算術，對於數量之運算作進一步的探求，代數的方法比算術巧，代數的範圍比算術廣，英人牛頓曰『代數者，廣義之算術也，』其言洵有至理。

§ 2. 代數之方法 代數中如何能將算術的範圍推廣？端賴下列兩種方法。

第一法 用文字表數，使 (a) 運算的形式簡明，(b) 答數的範圍加廣，(c) 解題的工具銳利，今依次舉例明之。

【例一】 設有問題：『大小二數之和爲 140，自小數

3倍減去大數2倍，所得之差爲30求此二數。】

算術解法 因小數+大數是140，

所以2倍小數+2倍大數是280，

又因3倍小數-2倍大數是30。

所以2倍小數+2倍大數+3倍小數-2倍大數是280+30。

所以5倍小數是310。

所以小數是 $310 \div 5 = 62$ 。大數是 $140 - 62 = 78$ 。

代數解法 設 x =小數， y =大數，則

$$\begin{cases} x + y = 140 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - 2y = 30 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$2 \times (1) \text{ 得 } 2x + 2y = 280 \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) + (2) \text{ 得 } 5x = 310$$

$$\therefore x = 62 = \text{小數}$$

$$\text{代入}(1) \text{ 得 } y = 140 - 62 = 78 = \text{大數} \circ$$

學者試觀代數解法比之算術解法何等簡明！

【例二】 仍就前例來說，在算術，依四則解法能解例一之問題，得其答數爲：

$$(A) \begin{cases} \text{小數} = 62 \\ \text{大數} = 78 \end{cases}$$

在代數，應用文字代表已知數，則可解範圍更廣之問題：『大小兩數之和爲 a ；自小數 m 倍減去大數 n 倍，所得之差爲 b ，求此二數，』依代數解法，得其答數爲：

$$(B) \begin{cases} \text{小數} = \frac{na + b}{m + n} \\ \text{大數} = \frac{ma - b}{m + n} \end{cases}$$

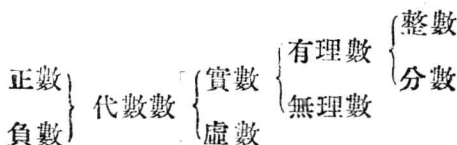
學者注意(B)式所表答數比(A)式範圍加廣矣！蓋在此類問題中，任設 m, n, a, b 爲何值，所求大小二數皆可由(B)式求得之，故(B)式代表一類問題之答數；至於(A)式，則僅表單獨一個問題之答數，二者適用的範圍自有廣狹之不同也。

【例三】設有問題：『某數7倍與其平方之和爲198，求該數，』此問題，在算術無法解決；在代數則由方程式 $x^2 + 7x = 198$ 可立得其答數爲11或-18。代數之解法，不亦神妙乎哉！

第二法 創造新數以濟運算之窮，算術上的運算往往有相當限制；逾此限制，算法便不通行，例如，在算術減法中，減數如大於被減數，則此減法便不通；代數上創造負數，減法乃無不可行，又如在算術開方中，被開方數如不

爲完全整方，則此不盡根數精確之真值便無法求得，其性質因亦不能明瞭；代數上引用無理數，此類根式的性質及算法乃能全部了然。不特如此，即在代數開方中，倘所論之數只限於實數，則當被開方數爲負數，而開方次數爲偶數次時，此開方算法亦不能通行，故又創立虛數以濟其窮，自有虛數，開方算法乃毫無限制矣。

§ 3. 代數之數系 如上（第二法）所述，代數上爲濟算法之窮計，常創立新數以求其通，故代數上所論之數比算術上所論者範圍加廣，各類新數皆由適應算法的需要而來，茲將代數的數系，列表如下：

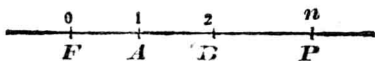


算術中只論有理數即整數或分數，代數中添出無理數，不盡根數即無理數之一種，有理數及無理數總稱之曰實數，實數之外代數中又添出虛數，負數之平方根是也，算術中只論正數，代數中於各種數皆分爲正負二類，故凡一切代數數之數值包括絕對值及正負號二事。

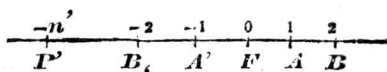
§ 4. 代數數之圖形表示 代數系中任何一數，皆可用

平面上之一點表之，略陳其說如下：

(1) 正實數 在一直線上取定點 F 表零，定長 FA 爲單位1，則無論 n 爲有理數抑爲無理數，由幾何作圖法恒可得 $FP = nFA = n$ 。故任何數 n 可以適當之點表之。



(2) 負實數 在上述直線上 F 之左側取 P' 使 $FP' = -nFA = -n$ ，則此 P' 點便可代表 $-n$



(3) 虛數 詳見第十八章。

§ 5. 代數之基礎 代數上一切運算之基礎全在幾條假設，此類假設是否真確，理論上無法證明，不過按之實際，無往不符，所以算學家乃將此類假設認爲公理或公律，代數上所有公律可分爲兩類：

第一類 關於數之運算者名曰運算公律，列舉於下：一

(1) 在加法有對易律： $a + b = b + a$

$$\begin{aligned} \text{結合律：} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ &= (a + c) + b. \end{aligned}$$

(2) 在乘法有對易律： $ab = ba$

$$\text{結合律：} (ab)c = a(bc) = (ac)b.$$

配分律： $a(b+c)=ab+ac$ 。

(3) 在冪法有指數律： $1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 。

$$2. (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$3. (ab)^n = a^n b^n.$$

各律中的 a, b 爲任何數，指數律中的 m, n 爲整正數，以上諸律，乃代數中各數運算之基本公律，此類公律的來源，最初是由正整數算法的啓示，其後乃假定此三律爲天經地義，凡由舊算所生之一切新數，其算法須經適當的規定（新數既然是新的，其算法照理可以隨便規定；但爲符合上述三律起見，此規定便已不能隨便），務使此三律仍能完全符合。

例如，在初中代數，吾人已知下列幾種算法：

$$I. a + (-b) = a - b \quad II. a - (-b) = a + b.$$

$$III. a(-b) = -ab \quad IV. (-a)(-b) = ab.$$

何以知上列算法果爲正確乎？無他，以其能合前述三律之故也，試就算法 III, IV 考之。

(a) 先驗乘法對易律能否符合？

依 IV, $(-a)(-b) = ab$, $(-b)(-a) = ba$ 。

但 a, b 俱爲正數，其乘算服從對易律： $ab = ba$ 。

$$\therefore \underline{(-a)(-b) = (-b)(-a)}.$$

(b) 次驗乘法結合律能否符合？

依IV, $(-a)(-b) = ab$

所以 $[(-a)(-b)](-c) = ab(-c) = -abc$ [依III.]

又依IV, $(-b)(-c) = bc$

所以 $(-a)[(-b)(-c)] = (-a)bc = -abc$ [依III.]

同樣 $[(-a)(-c)](-b) = -abc$

$$\therefore \underline{[(-a)(-b)](-c) = (-a)[(-b)(-c)] = [(-a)(-c)](-b)}.$$

(c) 再驗乘法配分律能否符合？

$$\begin{aligned} \text{因 } (-a)[(-b) + (-c)] &= (-a)[-(b+c)] = a(b+c) \\ &= ab + ac \end{aligned}$$

又 $(-a)(-b) + (-a)(-c) = ab + ac$

$$\therefore \underline{(-a)[(-b) + (-c)] = (-a)(-b) + (-a)(-c)}.$$

同樣，依上述 I, II, III, IV 幾條算法，加法中對易結合兩律亦均能適合，學者試自驗之。

第二類 關於等式之推演者名曰等式推演公律，推演公律共有四條。

$$\text{若 } a = b, c = d, \quad \text{則 } a + c = b + d.$$