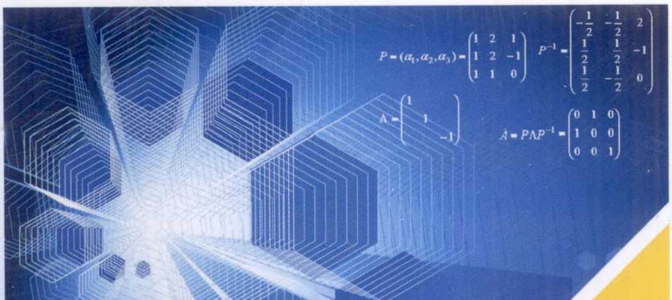
普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

◎李俊华　王文丽　主编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育"十二五"

线性代数

主　编　李俊华　王文丽

副主编　李连喜

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

《线性代数》是根据工科类本科数学基础课程教学要求，总结多年教学经验编写而成的。全书内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换等基本知识与基本理论。本书突出线性代数的计算和方法，取材得当，结构合理，每节配有习题，每章配有学习指导、练习题。另外，每节配有较多的例题，以供读者学习。

《线性代数》可作为高等院校学生和其他相关读者学习的教材。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李俊华，王文丽主编．—北京：北京理工大学出版社，2012，8

ISBN 978-7-5640-6498-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材

Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 186759 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮　　编 / 100081

电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)

网　　址 / http: // www.bitpress.com.cn

经　　销 / 全国各地新华书店

印　　刷 / 北京地质印刷厂

开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16

印　　张 / 13

字　　数 / 298 千字

版　　次 / 2012 年 8 月第 1 版　　2012 年 8 月第 1 次印刷

印　　数 / 1～4000 册

定　　价 / 28.00 元

责任编辑 / 安耀东

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 王美丽

Preface 前言

线性代数是高等学校理工科各专业的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，已成为自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具。在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出，高等院校计算机、信息工程、自动控制等专业对线性代数的教学内容从广度和深度上的要求不断提高。

本书参照教育部颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求，在总结多年的教学实践经验的基础上编写而成的。

线性代数是高校理工科和经济管理等专业的一门重要基础课程。随着互联网和计算机技术的迅速发展，科学计算在工程技术中的基础地位日益突出，用矩阵方法解决实际问题已渗透到众多领域，其中笔算根本没有用处。因此，提高大学生用计算机解决线性代数问题的实践能力，是后续现代化的迫切要求。但传统的线性代数教学内容和方法注重自身的理论体系，强调线性代数的的基本定义、定理及其证明，对线性代数的方法和应用重视不够，几乎不涉及数值计算，结果是后续课程中该用线性代数的地方都尽量避而不用，多数工科的学生在大学本科阶段没有任何一门课用过线性代数，基础课成了纯粹的“考研课”。

本书在编写上，逻辑严谨，内容取舍得当，简化或略去过深的理论推导和证明；在章节中，选取了较多的例题，便于读者自学和复习巩固。

本书是由李俊华、王文丽任主编，李连喜任副主编。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎广大师生及同行专家批评指正。

编　者
2012 年 6 月

Contents 目 录

第 1 章
n 阶行列式

本章学习指导

(1)了解行列式的定义.
(2)理解行列式的性质.
(3)掌握用按行或列展开公式计算行列式的方法.
(4)掌握二阶、三阶行列式的计算法,会计算四阶、五阶数字行列式的值.
(5)会计算简单的 n 阶行列式.
(6)掌握克莱姆法则及相关结论.
(7) 知道拉普拉斯定理及行列式的乘法规则.

§1.1 n 阶行列式

1.1.1 全排列及其逆序数

本节考虑由 $1,2,3,\cdots,n$ 这 n 个数排成的不重复数字的全排列,不同的全排列共有 $n!$ 个. 以后对这种全排列简称排列.

例如,由 1,2,3 这三个数有以下 $3!=6$ 个排列:

$$123,132,213,231,312,321.$$

定义 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,考察其中任意两个数,如果大的数排在小的数之前,就说有一个逆序. 所有逆序的总数称为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,记作$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

【例 1】 计算由 1,2,3 排成的六个排列的逆序数.

[解] 排列 123 没有逆序,逆序数 $\tau(123)=0$.

排列 132 中,仅有 3 在 2 之前一个逆序,$\tau(132)=1$.

排列 213 中，仅有 2 在 1 之前一个逆序，$\tau(213)=1$.

排列 231 中，2 在 1 之前，3 在 1 前，$\tau(231)=1+1=2$.

排列 312 中，3 在 1，2 之前，$\tau(312)=2$.

排列 321 中，3 在 2，1 之前，又 2 在 1 前，$\tau(321)=2+1=3$.

其中 132，213，321 为奇排列，123，231，312 为偶排列.

【例 2】 求 $\tau(42315)$ 及 $\tau(54321)$.

[解] $\tau(42315)=3+1+1=5$，$\tau(54321)=4+3+2+1=10$.

性质 1 交换排列中的两个数，排列的奇偶性改变.

[证] 先讨论交换相邻两数的情形. 设排列为

$$p_1\cdots p_S a\ b\ p_{S+1}\cdots p_m, \tag{1}$$

交换 a 与 b，得排列

$$p_1\cdots p_S b a p_{S+1}\cdots p_m. \tag{2}$$

任意一个 p_i 与 a 或 b 的大小关系在(1)与(2)两个排列中是一样的. 所以当 $a>b$ 时，排列(2)的逆序数比排列(1)的逆序数减少 1，当 $a<b$ 时，排列(2)的逆序数比排列(1)的逆序数增加 1. 因此，当(1)为奇排列时，(2)为偶排列；当(1)为偶排列时，(2)为奇排列. 即排列(1)与(2)有不同的奇偶性.

再讨论交换不相邻两个数的情形. 设排列为

$$p_1\cdots p_S a c_1\cdots c_k b p_{S+1}\cdots p_m, \tag{3}$$

交换 a 与 b，得排列

$$p_1\cdots p_S b c_1\cdots c_k a p_{S+1}\cdots p_m. \tag{4}$$

我们也可以对排列(3)中的 a 依次与 $c_1,\cdots,c_k$ 进行 k 次相邻的交换，得到排列

$$p_1\cdots p_S c_1\cdots c_k a b p_{S+1}\cdots p_m,$$

再对这个排列中的 b 依次与 $a,c_k,\cdots,c_1$ 进行 $k+1$ 次相邻的交换，就得到排列(4). 因此，经过 $2k+1$(奇数)次相邻的交换可以由(3)得到(4). 由前面已证明的结论可知，进行奇数次相邻的交换，排列的奇偶性要改变，所以排列(3)与排列(4)有不同的奇偶性.

(证毕)

性质 2 由 $1,2,\cdots,n(n>1)$ 所组成的 $n!$ 个排列中，奇排列与偶排列各占一半.

[证] 设奇排列有 s 个，偶排列有 t 个. 对每一个奇排列都交换 1 与 2，就得到 s 个不同的偶排列. 因此，$s\leqslant t$. 同理可证 $t\leqslant s$，故 $s=t$.

下面来看一个例子.

引例 用 1，2，3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

[解] 这个问题相当于把三个数字分别放在百位、十位与个位上，求有几种不同的放法.

显然，百位上可以从 1，2，3 三个数字中任选一个，所以有 3 种放法；十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有两种放法；个位上只能放最后剩下的一个数字，所以只有 1 种放法. 因此，共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这六个不同的三位数是：

123，132，213，231，312，321.

在数学中，把考察的对象，如上例中的数字 1，2，3 叫做元素. 上述问题就是：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法?

对于 n 个不同的元素，也可以提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列，简称**排列**.

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示. 由引例的结果可知 $P_3=3\times2\times1=6$.

为了得出计算 P_n 的公式，可以仿照引例进行讨论：

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；

这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!.$$

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面我们来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

即是这个排列的逆序数.

【例 3】 求排列 32514 的逆序数.

[解] 在排列 32514 中，

3 排在首位逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数只有一个“3”，故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有三个“3，2，5”，故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数只有一个“5”，故逆序数为 1.

于是排列的逆序数为 $t=0+1+0+3+1=5.$

1.1.2 n 阶行列式的定义

将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 个横行及 n 个竖列的方形表格，两边再用竖线围起，就得到 n 阶行列式的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中，每个数 a_{ij} 称为行列式的元素，它有两个下标，第一个下标表示该元素所在的行数，第二个下标表示所在的列数，a_{ij} 就是 i 行 j 列的元素. 行列式的行数是从上到下依次为第一

行，第二行，……，第 n 行. 列数是从左到右依次为第一列，第二列，……，第 n 列. 行列式有两条对角线，由左上到右下那条对角线称为主对角线，在主对角线上的元素为 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$. 由右上到左下的对角线有时称为副对角线.

n 阶行列式是由代数和组成的一个数，其定义如下.

定义 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{P_1 P_2 \cdots P_n} (-1)^{\tau(P_1 P_2 \cdots P_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中，$\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 是列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{P_1 P_2 \cdots P_n}$ 表示对所有 $n!$ 个排列求和.

上述定义说明 n 阶行列式是含有 $n!$ 项的代数和，其中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积，当把这 n 个元素按行标从小到大的顺序排列时，其列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 若为偶数，这项冠以"+"号，若为奇数，这项冠以"−"号.

根据行列式的定义，一、二、三阶行列式可以计算如下：

一阶行列式：$|a_{11}| = (-1)^0 a_{11} = a_{11}$；

二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21};$$

三阶行列式：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} + \\ &\quad (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}. \end{aligned} \tag{1}$$

容易看出：

①(1)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此，(1)式右端的任意项除正负号外可以写成 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$. 这里第一下标(称行标)排成标准排列 123，而第二个下标(称列标)排成 $p_1 p_2 p_3$，它是 1，2，3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种，对应(1)式右端共含 6 项.

② 各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123，231，312；

带负号的三项列标排列是：132，213，321.

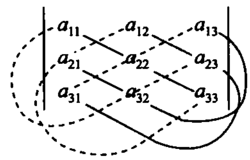
经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

即如果在三阶行列式中，将冠以"+"号的项的三个数用实线加以连接，将冠以"－"号的项的三个数用虚线加以连接，就可以得到如下图形：



利用这个图形，很容易写出三阶行列式的六项代数和.

【例 1】 计算以下两个行列式：

$$(1)D_1=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix};\quad (2)D_2=\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&0&5\\2&-3&4\end{vmatrix}.$$

［解］ $(1)D_1=1\times4-2\times3=4-6=-2$;

$$(2)D_2=3\times0\times4+2\times5\times2+(-1)\times1\times(-3)-(-1)\times0\times2-3\times5\times(-3)-2\times1\times4$$
$$=0+20+3-0+45-8=60.$$

四阶行列式有 4！=24 项，要写出并计算这 24 个乘积的代数和是很麻烦的. 对于三阶以上的高阶行列式，一般要利用下节要介绍的行列式的性质进行计算. 不过，像下面例 2 的几个特殊的高阶行列式，却可以用定义直接得到它的值.

【例 2】 利用行列式的定义计算下列的行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\qquad D_4=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2n-1}&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn-1}&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

［解］ 行列式 D_1 在主对角线之上的元素全为 0，这种行列式称为下三角行列式. 根据定义，行列式是不同行、不同列元素乘积的代数和，因为含 0 元素的项必为 0，只要考察不含 0 元素的项. 设这种项为

$$(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

因为 D_1 的第一行除了 a_{11} 之外全为 0，所以必有 $a_{1p_1}=a_{11}$，D_1 的第二行除了 a_{21}，a_{22} 之外都为 0，但 a_{21} 与 a_{11} 位于同一列，与 a_{11} 不同列的只有 a_{22}，所以 $a_{2p_2}=a_{22}$，依次类推，可知 D_1 中不含 0 元素的项只有如下一项：

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

因此，$D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

D_2 的主对角线之下的元素都是 0，这种行列式称为上三角行列式. 依次讨论第 n 行，第 $n-1$行，…，第 1 行，可知 D_2 中不含 0 元素的项与 D_1 相同，所以

$$D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角与下三角行列式统称为三角行列式. 行列式 D_3 中除对角线上的元素之外，其他元素都是 0，这种行列式称为对角行列式，它是三角行列式的特例，因此

$$D_3=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

以上说明三角行列式及对角行列式的值都等于主对角线上元素的乘积.

D_4 在副对角线上方的元素为 0，它不是三角行列式. 类似于前面的讨论可知 D_4 中不含 0 元素的项只有 $(-1)^{\tau(nn-1\cdots21)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$，因为

$$\tau(nn-1\cdots21)=(n-1)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

所以
$$D_4=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}.$$

即 D_4 等于副对角线上元素的乘积再乘以 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

【例 3】 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$其中各元素 $a_{ij}(x)$ 都是可导函数.

试证

$$f'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\cdots+$$
$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

（即对行列式求导，等于对各行求一次导的 n 个行列式的和）

［证］ 根据行列式定义，有

$$\begin{aligned} f'(x)&=\Big[\sum_{P_1\cdots P_n}(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}a_{1P_1}(x)a_{2P_2}(x)\cdots a_{nP_n}(x)\Big]' \\ &=\sum_{P_1\cdots P_n}(-1)^{\tau(P_1\cdots P_n)}\big[a_{1P_1}(x)a_{2P_2}(x)\cdots a_{nP_n}(x)\big]' \\ &=\sum_{P_1\cdots P_n}(-1)^{\tau(P_1\cdots P_n)}a'_{1P_1}(x)a_{2P_2}(x)\cdots a_{nP_n}(x)+ \\ &\quad\sum_{P_1\cdots P_n}(-1)^{\tau(P_1\cdots P_n)}a_{1P_1}(x)a'_{2P_2}(x)\cdots a_{nP_n}(x)+\cdots+ \\ &\quad\sum_{P_1\cdots P_n}(-1)^{\tau(P_1\cdots P_n)}a_{1P_1}(x)a_{2P_2}(x)\cdots a'_{nP_n}(x) \end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\cdots+$$
$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

下面的定理是对行列式定义的另一种说法.

定理 对于上述行列式定义中的任意一项

$$(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}a_{1P_1}a_{1P_2}\cdots a_{1P_n},$$

若对乘积 $a_{1P_2}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$ 的因子顺序进行若干次交换,变为乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,则有

$$(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}a_{1P_1}a_{1P_2}\cdots a_{nP_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

换句话说,如果行列式各项的乘积 $a_{1P_2}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$ 的因子不是按行标从小到大的自然顺序排列,而是任意排列成 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,则这项应冠以符号 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

[证] 因为 $a_{1P_2}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}=a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,所以只要证明

$$(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

设 $a_{1P_2}\ a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$ 的因子经过 k 次交换,成为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$,则行标排列 $1\ 2\cdots n$ 经过 k 次交换,成为排列 $i_1i_2\cdots i_n$. 列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过 k 次交换,成为排列 $j_1j_2\cdots j_n$,根据 1.1.1 之性质 1,若 k 为奇数,则行标排列与列标排列都同时改变奇偶性,因而

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}=-(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)},(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}=-(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

若 k 为偶数,则行标排列与列标排列的奇偶性都不变,因而有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)},(-1)^{\tau(P_1P_2\cdots P_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

不论 k 是哪一种情况,都有

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

因为 $\tau(12\cdots n)=0$,所以要证的等式成立.

【例 4】 证明对角线行列式(其中对角线上的元素都是 λ_i,未写出的元素都是 0).

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

[证] 第一式是显然的,下面证第二式.

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$,则依行列式定义,

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,故

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角行列式,它的值与对角行列式一样.

【例 5】 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

[证] 由于当 $j>i$ 时,$a_{ij}=0$,故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i},其下标应有 $p_i\leqslant i$,即 $p_1\leqslant 1,p_2\leqslant 2,\cdots,p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$,所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【例 6】 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

请证明:$D=D_1D_2$.

[证] 记 $D=\det(d_{ij})$,其中

$$d_{ij}=a_{ij}\,(i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,k),$$
$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}\,(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n).$$

考察 D 的一般项

$$(-1)^t d_{1r_1}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_k+1}\cdots d_{k+n,r_k+n},$$

由于当 $i\leqslant k,j>k$ 时,$d_{ij}=0$,因此 $r_1,\cdots,r_k$ 只有在 $1,\cdots,k$ 中选取时,该项才可能不为零.

而当 $r_1,\cdots,r_k$ 在 $1,\cdots,k$ 中选取时,$r_{k+1},\cdots,r_{k+n}$只能在 $k+1,\cdots,k+n$ 中选取. 于是 D 中可能不为零的项可以记作

$$(-1)^l a_{1p_1}\cdots a_{kp_k} b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}.$$

这里,$p_i=r_i$,$q_i=r_{k+i}-k$,而 l 为排列 $p_1\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$的逆序数. 以 t,s 分别表示排列 $p_1\cdots p_k$ 及 $q_1\cdots q_n$ 的逆序数,应有 $l=t+s$. 于是

$$\begin{aligned}D&=\sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{t+s}a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\\&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\Big[\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^s b_{1q_1}\cdots b_{nq_n}\Big]\\&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}D_2\\&=\Big[\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{kp_k}\Big]D_2\\&=D_1D_2.\end{aligned}$$

1.1.3 对　换

为了研究 n 阶行列式的性质,我们先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种作出新排列的方法叫做对换. 将相邻两个元素对换,叫做相邻对换.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

[证]　先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,对换 a 与 b,变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然,$a_1\cdots a_l$;$b_1\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,而 a,b 两元素的逆序数改变为:当 $a<b$ 时,经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$,把它作 m 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$,再作 $m+1$ 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之,经过 $2m+1$ 次相邻对换,排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

[证]　由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性变化的次数,而标准排列是偶排列(逆序数是 0),因此得知推论成立.

利用定理 1,我们来讨论行列式定义的另一种表示法.

对于行列式的任一项 $(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$,其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数,对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时,这一项的值不变,而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 t_1,则

$(-1)^{t_1}=-(-1)^t$.　故　　$(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$,

于是　　$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作出了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经过一次对换如此，经过多次对换还是如此. 于是，经过若干次对换，使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为 0）.

行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

又，若 $p_i=j$，则 $q_j=i$（即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_j j}$）. 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可得：

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

［**证**］ 按行列式定义有

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n},$$

记

$$D_1=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}a_{p_3 3}\cdots a_{p_n n}.$$

按上面讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}a_{q_3 3}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}a_{p_3 3}\cdots a_{p_n n}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项一一对应并相等，从而 $D=D_1$.

习题 § 1.1

一、填空题.

1. $\begin{vmatrix}2&5\\3&7\end{vmatrix}=$ ________；

2. $\begin{vmatrix}a&a^2\\b&b^2\end{vmatrix}=$ ________；

3. $\begin{vmatrix}1&2&5\\0&3&1\\0&0&2\end{vmatrix}=$ ________；

4. $\begin{vmatrix}0&0&x\\0&2&x\\x&-1&3\end{vmatrix}=$ ________.

5. 六阶行列式中，$a_{13}a_{25}a_{36}a_{41}a_{54}a_{62}$ 的符号为________.

6. 排列 5371246 的逆序数为________.

7. 排列 $1,3,\cdots,(2n-1),2,4,\cdots,2n$ 的逆序数为________.

二、计算题.

1. $\begin{vmatrix}-1&2&4\\0&3&1\\-1&4&2\end{vmatrix}$；

2. $\begin{vmatrix}1&x&x\\x&2&x\\x&x&3\end{vmatrix}$；