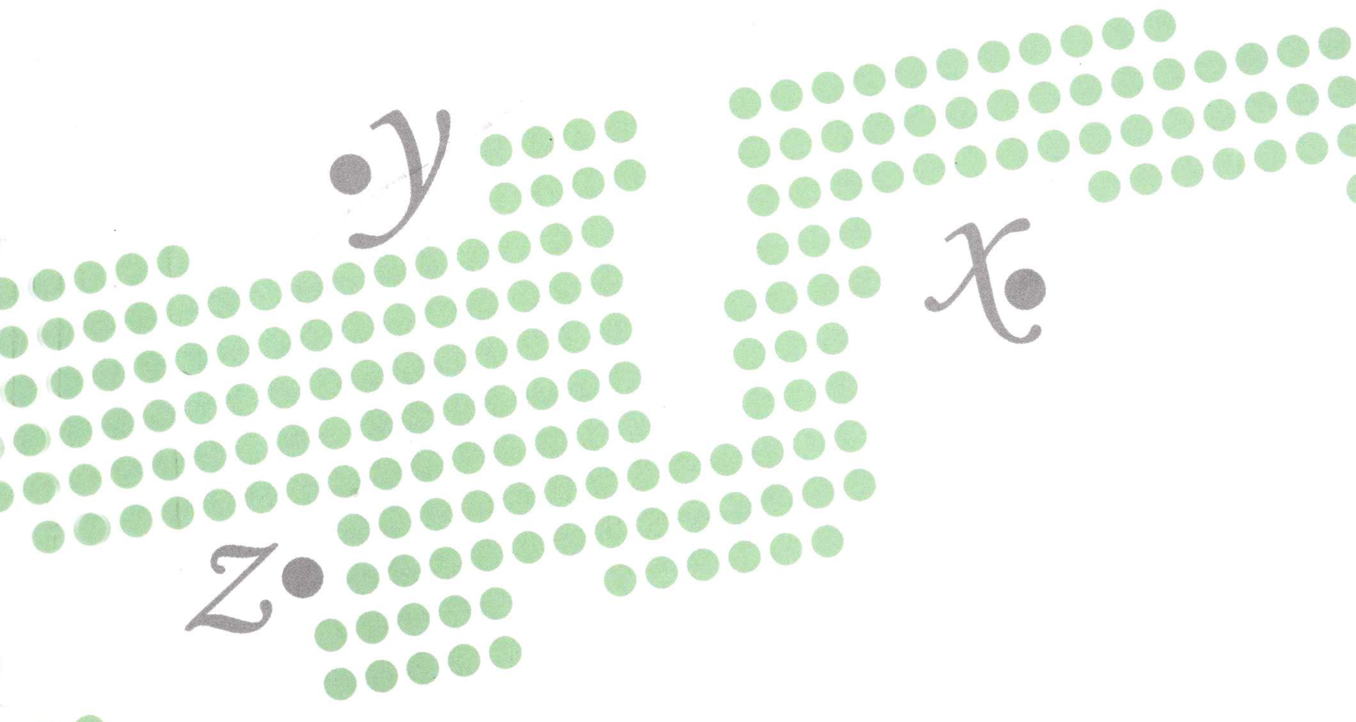
大学数学应用与提高丛书

丛书主编　蔡光兴　李子强

线性代数——应用与提高

（第二版）

郑　列　耿　亮　主编



科　学　出　版　社

大学数学应用与提高丛书

丛书主编　蔡光兴　李子强

线性代数应用与提高

（第二版）

郑　列　耿　亮　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为《大学数学应用与提高丛书》之一，是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试高等数学大纲要求编写的，是与普通高等教育"十二五"规划教材、21世纪大学数学精品教材《线性代数》(蔡光兴、李逢高主编)同步的辅助教材. 全书共八章，除第八章外每章含有教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测题，第八章为数学实验. 书末附有习题参考答案与提示.

本书可作为高等院校本、专科学生的线性代数课程辅助教材，也可供成人教育与自学线性代数的学生学习使用，对报考硕士研究生的考生来说，无疑具有重要的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数应用与提高/郑列，耿亮主编. —2版. —北京：科学出版社，2012.8
大学数学应用与提高丛书
ISBN 978-7-03-035418-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①郑… ②耿… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第200708号

责任编辑：曾 莉 冯桂层 / 责任校对：董艳辉 董 丽
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：787×1092 1/16
2012年8月第 二 版 印张：14
2012年8月第一次印刷 字数：314 000

定价：25.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《大学数学应用与提高丛书》编委会

前　　言

《线性代数应用与提高》自出版以来，深受广大师生喜爱. 读者们反映，本书的体系结构科学合理、例题经典丰富，既适合初学者巩固提高，也适合考研学子使用.

本次再版，依照新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和研究生入学考试大纲对内容提要进行了部分重写；对典型例题、应用与提高部分的例题进行了少量更新和补充；对练习题、自测题作了部分调整；《线性代数应用与提高》为高等学校本、专科学生的线性代数课程辅助教材，也可供成人教育和自学线性代数的学生学习使用，对报考硕士研究生的考生来说，《线性代数应用与提高》无疑具有重要的参考价值.

本书由郑列、耿亮主编，王志华、曾宇任副主编. 各章编写人员如下：董秀明、郑列（第一章），常涛、朱莹（第二章），曾宇、陈洁（第三章），李翰芳、王志华（第四章），万祥兰、曾莹（第五章），左玲、程池（第六章），蔡振锋、黄毅（第七章），耿亮、吕辉（第八章）. 此外张凯凡、费锡仙、李家雄、方瑛、肖岸纯、胡二琴、熊淑艳、张水坤、周宁琳、闻卉、贺方超、巴娜、彭峰集对本书进行了校对和整理工作. 本书由郑列、耿亮统稿. 蔡光兴教授审阅了本书.

由于本书编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请广大读者批评、建议，以便将来予以修订.

编　　者

2012 年 6 月

目　录

第一章 行列式

一、教学基本要求

(1) 了解行列式的定义，理解行列式的性质.

(2) 掌握二、三阶行列式的计算法.

(3) 会用行列式的性质及行列式按行(列)展开定理计算行列式.

(4) 掌握克拉默法则及相关结论.

二、内容提要

(一) 排列及逆序数

定义 1 由 1, 2, …, n 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列. n 阶排列的总数是 $n!$ 个.

定义 2 在一个 n 阶排列中，若较大的数排在较小数的前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定义 3 在排列中，交换任意两数 i 和 j 的位置，称为一次对换.

定理 1 任意两个 n 阶排列总可以通过一系列对换互变.

定理 2 对换改变排列的奇偶性.

定理 3 当 $n \geqslant 2$ 时，n 阶排列中奇排列与偶排列个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

(二) n 阶行列式的定义

定义 4 由 n^2 个数排成 n 行 n 列的表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所表示的数 D 即为一个 n 阶行列式，且

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1, 2, …, n 的一个排列, $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数, $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 阶排列求和.

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

也可记为 $\det(a_{ij})$, 而 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 则称为 n 阶行列式的展开式.

(三) 行列式的性质

性质 1 行列式与其转置行列式相等.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 若行列式有两行(列)完全相同,则行列式等于零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

推论 1 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式等于零.

推论 3 若行列式有两行(列)元素对应成比例,则行列式等于零.

性质 4 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

（四）行列式按行（列）展开

定义 5　在 n 阶行列式中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下的 $n-1$ 阶行列式叫 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫 a_{ij} 的代数余子式.

定理 4　n 阶行列式等于它的任一行（列）的各元素与其代数余子式的乘积之和，即有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

推论　n 阶行列式中任一行（列）的各元素乘以另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\quad(k\neq i),$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0\quad(k\neq j).$$

（五）特殊行列式的值

(1) 上（下）三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 对角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

(六) 克拉默法则

含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有且仅有一个解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 D_j 是系数行列式中的第 j 列元素对应换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 而得到的 n 阶行列式.

推论 1 若线性方程组(1)无解或有两个不同的解,则它的系数行列式 $D = 0$.

推论 2 若线性方程组(1)对应的齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则此齐次线性方程组有唯一解即零解.

推论 3 若线性方程组(1)对应的齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式 $D = 0$.

三、典 型 例 题

(一) 排列的逆序数

例 1 求下列排列的逆序数,并确定其奇偶性.

(1) $n\ (n-1)\cdots 2\ 1$;

(2) $1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

解 (1) 因为 1 与其他数构成 $n-1$ 个逆序,2 与其他数构成 $n-2$ 个逆序,以此类推,$n-1$ 与其他数构成 1 个逆序,所以

$$\begin{aligned} \tau(n(n-1)\cdots 2\ 1) &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

当 $n=4k,\ 4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，排列为偶排列；

当 $n=4k+2,\ 4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为奇数，排列为奇排列.

(2) 显然，此排列中 $1,\ 3,\ \cdots,\ (2n-1),\ (2n)$ 的逆序数均为 0. 与 $2n-2$ 构成逆序的数有 $2n-1,\ 2n$，共 2 个；与 $2n-4$ 构成逆序的数有 $2n-3,\ 2n-2,\ 2n-1,\ 2n$，共 4 个……与 2 构成逆序的数有 $3,\ 4,\ \cdots,\ (2n-1),\ 2n$，共 $2n-2$ 个. 从而排列的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2) &= 2+4+\cdots+(2n-2)\\ &= n(n-1).\end{aligned}$$

该排列为偶排列.

例 2　如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

解　$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中任意两个不同的 $x_i,\ x_j$ 必在且仅在 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 之一中构成一个逆序，同时这两个排列的逆序总数为

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

因此排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.

(二) 行列式的计算及证明

1. 利用行列式的定义

例 3　(1) 在 6 阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带什么符号？

(2) 写出 4 阶行列式中，带负号且包含 a_{23} 和 a_{31} 的项.

(3) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0\\ 1 & x & 2 & 3\\ 2 & 3 & x & 2\\ 1 & 1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中，求 x^3 的系数.

解　(1) 调整该项中元素的位置，使元素行指标按自然排列，变为

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

则列指标的排列为 431265，其逆序数

$$\tau(431265)=6,$$

故该项带正号.

(2) 由行列式定义知，含 a_{23} 和 a_{31} 的项为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，其列指标排列的逆序数分别为

$$\tau(2314)=2 \quad 和 \quad \tau(4312)=5.$$

故带负号且含 a_{23} 和 a_{31} 的项为 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

(3) 由行列式定义,仅当 a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44} 四个元素相乘时才会出现 x^3 项. 该项列指标排列的逆序数为

$$\tau(2134)=1,$$

故含 x^3 项的系数为 -1.

例 4 计算下列行列式:

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$, $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$.

解 (1) 在 D_n 中只有 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 这 n 个元素不为零,且恰处于 n 个不同行不同列,故 D_n 中不为零的项只有一项,即 $a_1a_2\cdots a_n$. 这一项行指标自然排列,列指标构成的排列为

$$(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n,$$

这个排列的逆序数

$$\begin{aligned}\tau((n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n)&=1+2+\cdots+(n-2)\\&=\frac{(n-1)(n-2)}{2},\end{aligned}$$

从而

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

(2) 由行列式的定义,行列式展开后的每一项都是取自不同行不同列的 4 个元素的乘积,因此,除去有零的项外,只有两项,即 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$,于是

$$\begin{aligned}D&=(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}\\&=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}.\end{aligned}$$

2. 将行列式化为上(下)三角行列式法

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&-2&0&-1\\0&1&3&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&-4&-3\\0&0&5&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\0&0&-4&-3\\0&0&0&-\frac{7}{4}\end{vmatrix}=-7.$$

例 6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

解 将第 2, 3, …, n 列都加到第 1 列,得

$$D=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a+(n-1)b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 7 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$,其中 $x_i \neq a_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$.

解
$$D_n \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a_1} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i} \prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{x_i-a_i} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right).$$

3. n 阶行列式按行(列)展开(降阶法)

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 将行列式按第一列展开得

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

例 9 计算行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

解 各行加到第 1 行得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 行}} (-1)^{1+(n+1)}\begin{vmatrix} -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2}(-1)^n = 1.$$

4. 递推法

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$