高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

胡 月 许梅生 主编

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

胡　月　许梅生　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

概率论与数理统计是高等院校一门重要的涉及随机数学的课程. 本书根据近年来工科数学改革的新成果，结合高等应用型本科院校的实际特点，以培养卓越工程师为目标，对传统的教学内容进行了优化，对相关的历史进行了陈述，并对新的思想方法进行了介绍.

本书着眼于介绍概率论与数理统计中的基本概念、基本原理和基本方法；强调直观性，注重可读性，突出基本思想与方法. 本书内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、MATLAB 软件与应用实例.

本书可供高等应用型本科院校非数学专业的学生使用，也可满足其他高等院校工科专业或多层次办学的院校概率论与数理统计课程不同学时的教学需要.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/胡月，许梅生主编. —北京：科学出版社，2012
（高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-035214-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①胡… ②许… Ⅲ.①数理统计-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 172062 号

责任编辑：张振华 / 责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京鑫丰华彩印有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 8 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2012 年 8 月第一次印刷　印张：16 1/2
字数：380 000

定价：30.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈鑫丰华〉）
销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　言

本书根据近年来工科数学改革的新成果，结合高等应用型本科院校的实际特点，以教育部培养卓越工程师计划为目标，对传统的教学内容进行了优化，以介绍概率论与数理统计的基本知识和方法为主，并注意它的直观背景和实际意义，力求做到理论联系实际，突出各种概率统计方法在各类实际问题中的应用，同时也介绍如何利用数学软件解决概率统计的实际应用问题. 此外，对相关的历史背景进行了陈述，并对新的思想方法进行了介绍. 本书中标有 * 号的内容为选学内容.

教材是体现课程目标和内容的重要载体，是学生学习和教师教学的工具. 本书所阐述的基本理念、课程目标和内容标准都在各章中得到体现. 本书将处理好以下几个关系：

(1) 理论与应用——以应用为主，体现实践性、实际性.

(2) 深度与广度——广度优先，拓宽知识面，增加信息量.

(3) 传统与创新——反映新知识和新方法.

(4) 宜教与利学——便于教师介绍内容，有利于学生自学.

(5) 课内必学内容与课外选学内容——合理安排以使课程体系和内容得以完备.

本书由胡月、许梅生担任主编. 参加编写的人员还有陶祥兴、叶耀军、吴阿林、雷建光、孙莉萍(按编写章排序). 其中，第 1,6 章由胡月编写，第 2 章由陶祥兴编写，第 3 章由叶耀军编写，第 4 章由吴阿林编写，第 5 章由雷建光编写，第 7,8 章由许梅生编写，第 9 章由孙莉萍编写.

本书的编写自始至终得到浙江科技学院教务处、理学院及各位数学教师的关怀与大力支持，在此表示衷心的感谢.

由于编者的水平所限，错误和缺点在所难免，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

于杭州

目　录

第 1 章　随机事件与概率

用概率来度量不确定性和可变性已经有数百年的历史了，而今概率论已应用到很多的领域，如军事、医药、天气预报和法律等. 概率论与许多实际和理想的实验相联系，或结合一些生活现象，从而使其获得了实用的价值和直观的意义.

概率论是数学的一个分支，它研究的是随机现象的数量规律. 一方面，它有自己独特的概念和方法；另一方面，它与其他数学分支又有紧密的联系，是现代数学的重要组成部分. 概率论的广泛应用几乎遍及所有的科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门.

概率论是研究随机现象规律性的一门数学学科.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象

在自然界和人类社会中存在着多种现象，大多属于两类现象，确定性现象和随机现象.

第一类，在一定条件下某种现象必定发生或必定不会发生，这类现象称为**确定性现象**(**deterministic phenomenon**). 例如，在一个标准大气压下，水加热到 100℃，必然会沸腾；每天早晨，太阳都从东方升起，等等.

另一类，在一定条件下，某种现象可能发生也可能不发生，称这类现象为**随机现象**(**random phenomenon**). 如抛一枚硬币或者掷一颗骰子等.

这种偶然性和不确定性的概念像人类文明本身一样古老，人们为了生存不得不应付天气、食物供应和环境中其他方面的不确定性，并且为减少这种不确定性及其影响而奋斗. 即便是赌博的思想也有很长的历史，考古发现大约在公元 3500 年前，在古埃及等地已经出现利用骨制物体做具有偶然性的赌博，它是掷骰子的先驱. 尽管对这种现象进行个别试验或观察时其结果具有偶然性和不确定性，但是在大量的重复试验中其结果又具有一定的统计规律. 概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

1.1.2　随机事件

为了对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为**试验**(**experiment**). 若一个试验具有以下三个特点：

(1) 在基本相同的条件下，可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以知道试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前出现哪一种结果是无法预见的，这种试验称为**随机试验**(**ran-**

dom experiment)，简称**试验**，用 E 表示.

例 1.1.1 随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：将一枚硬币抛三次，观察出现正面的次数.

E_3：掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_4：记录车站售票处一天内售出的车票数.

E_5：某射手向某一目标射击，直到命中为止.

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预先知道试验的结果，但试验的一切可能的结果是已知的，我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**(**sampling space**)，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**(**sampling point**). 记为 ω.

例 1.1.2 写出例 1.1.1 中各随机试验的样本空间.

$\Omega_1=\{H,T\}$；

$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$\Omega_5=\{k:k\in \mathbf{N}\}$，($k$ 为射手射击的次数).

$\Omega_6=\{t:t\geqslant 0\}$，$t$ 表示灯泡的寿命；

$\Omega_7=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$；这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度. 并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

在随机试验中，可能出现也可能不出现的一类结果称为**随机事件**(**random event**)，简称为**事件**.

在一个随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件，称为**基本事件**(**element**). 事实上，样本点就是基本事件.

随机事件可表述为样本空间中样本点的某个集合，一般记为 A,B,C 等. 所谓“事件 A 发生”，是指在一次试验中，当且仅当 A 中包含的某个样本点出现. 随机事件 A 是样本空间 Ω 的一个子集.

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**(**certain event**). 样本空间 Ω 也是本身的一个子集，可以把它称作一个事件，样本空间 Ω 包含了所有的样本点 ω，每次试验它必然发生，因此它是一个必然事件. 必然事件用 Ω 表示.

在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**(**impossible event**). 用 $\varnothing$ 表示，$\varnothing$ 中不包含样本点，也是 Ω 的一个子集.

可以看出，必然事件与不可能事件虽已无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便. 用集合论的观点和方法描述和定义概率论问题是基本的方法.

1.1.3 事件的关系及其运算

因为事件是一个集合，因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的. 下面给出这些关系和运算在概率中的提法. 并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率中的含义.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集，即随机事件.

1. 事件的包含与相等(inclusion and equivalent relation)

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，即 $\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

2. 事件的和(union of events)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生，即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

事件的和可以推广到任意有限多个事件和可列个事件间的情形.

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

设有事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，定义它们的和事件为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$.

3. 事件的积(product of events)

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$，也简记为 AB. 事件 $A\cap B$(或 AB)发生意味着：事件 A 发生且事件 B 也发生，即 $AB=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

类似地，事件的积可以推广到任意有限多个事件和可列个事件间的情形.

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的积事件为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 每一个均发生$\}$，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\prod\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1A_2\cdots A_n$.

设有事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，定义它们的积事件为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$每一个均发生$\}$，记为 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$或 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1A_2\cdots A_n\cdots$.

4. 事件的差(difference of events)

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$，即 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$.

5. 互不相容事件(互斥事件)(incompatible events)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B **互斥**,或称它们**互不相容**.

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件都互斥,则称这个事件组**两两互斥**.

若事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中的任意两个事件都互斥,则称这个事件列**两两互斥**.

基本事件组(列)是两两互斥的.

6. 对立事件(opposite events)

A 不发生的事件称为事件 A 的**对立事件**,**或逆事件**. 记为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\Omega-A$ 或者$A=\Omega-\overline{A}$. A 和 $\overline{A}$ 满足:$A\cup\overline{A}=\Omega$,$A\overline{A}=\varnothing$,$\overline{\overline{A}}=A$.

可以看出:$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

7. 完备事件组(complete set of disjoint events)

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组,若 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$. 换句话说,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$(有限个或可数个)两两不相容,并且"所有事件的和"是必然事件,则称它们构成**完备事件组**,或称 **Ω 的一个划分(a partition of Ω)**.

8. 文氏(Venn)图

事件的关系和运算可以用文氏图形象地表示出来,如图 1-1-1 所示,题中的矩形表示必然事件 Ω.

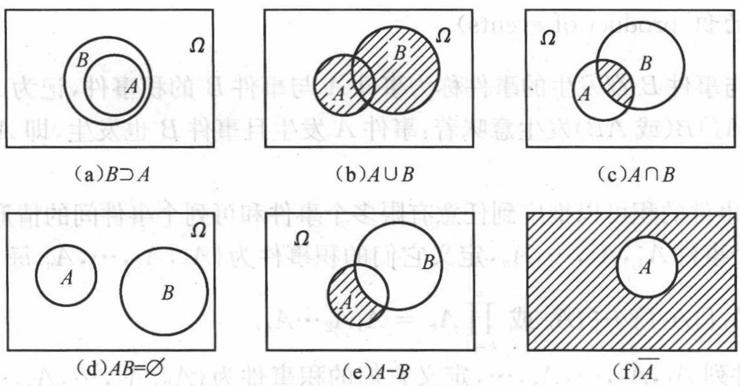

图 1-1-1　文氏图

9. 事件的运算律

设有事件 A,B,C,则有以下运算律:

(1) **交换律(exchange law)**：$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$.

(2) **结合律(combination law)**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(AB)C=A(BC)$.

(3) **分配律(distributive law)**：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$；$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) **对偶律(dual law)**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1.3　某射手向指定目标射击三枪，观察射中目标的情况.用 A_1,A_2,A_3 分别表示事件"第1,2,3枪击中目标"，试用 A_1,A_2,A_3 表示以下各事件：

(1) 只击中第一枪；

(2) 只击中一枪；

(3) 三枪都没击中；

(4) 至少击中一枪.

解　(1) 事件"只击中第一枪"，意味着第二枪不中，第三枪也不中.所以，可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) 事件"只击中一枪"，并不指定哪一枪击中.三个事件"只击中第一枪"、"只击中第二枪"、"只击中第三枪"中，任意一个发生，都意味着事件"只击中一枪"发生.同时，因为上述三个事件互不相容，所以，可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(3) 事件"三枪都没击中"，就是事件"第一、二、三枪都未击中"，所以，可以表示成 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(4) 事件"至少击中一枪"，就是事件"第一、二、三枪至少有一次击中"，所以，可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

例 1.1.4　设 A,B,C,D 是四个事件，用 A,B,C,D 以及事件之间的关系和运算的符号表示下列事件.

(1) A,B,C,D 中仅有 A 发生；

(2) A,B,C,D 中恰有一个发生；

(3) A,B 中至少有一个发生，而 C,D 均不发生；

(4) A,B,C 中不多于一个发生，而 D 发生；

(5) A,B 中至少有一个发生，C,D 中至少有一个不发生；

(6) A,B,C 中至少有一个不发生，D 发生；

(7) 将 $A\cup B\cup C\cup D$ 表示成两两互不相容事件的和事件.

解　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$(注意不是 A)；

(2) $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\cup\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$；

(3) $(A\cup B)\overline{C}\,\overline{D}$；

(4) $(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})D=(\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C})D$；

(5) $(A\cup B)(C\overline{D}\cup\overline{C}D\cup\overline{C}\,\overline{D})=(A\cup B)(\overline{C}\cup\overline{D})=(A\cup B)\overline{CD}$；

(6) $(\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})D$

$=(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})D=\overline{ABC}D$；

(7) $A\cup(B-A)\cup(C-A-B)\cup(D-A-B-C)$

$=A\cup B\overline{A}\cup C\overline{A}\,\overline{B}\cup C\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

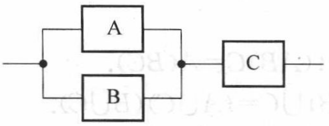

图 1-1-2

例 1.1.5　一系统由元件 A 与 B 并联所得的线路再与元件 C 串联而成，如图 1-1-2 所示. 若以 A,B,C 表示相应元件能正常工作的事件，用 A,B,C 表示系统能正常工作.

解　{系统能正常工作}={元件 A 与 B 至少一个能正常工作并且 C 能正常工作}

$$=(A\cup B)C=AC\cup BC.$$

习题 1.1

1. 抛一枚硬币 50 次，依次写出全部结果.

2. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 抛三枚硬币，观察朝上面；

(2) 抛三枚硬币，观察出现正面的硬币数；

(3) 连续抛一枚硬币，直到出现正面为止；

(4) 掷两颗骰子，观察出现的点数；

(5) 某城市一天内的用电量.

3. 请指出以下事件 A 与 B 之间的关系：

(1) 检查两件产品，记事件 $A=$ {至少有一件不合格品}，$B=$ {两次检查结果不同}.

(2) 设 T 表示轴承寿命，记事件 $A=\{T>5000\text{h}\}$，$B=\{T>8000\text{h}\}$.

4. 以下命题正确的是(　　).

A. $(AB)\cup(A\overline{B})=A$　　　　B. 若 $A\subset B$，则 $AB=A$

C. 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$　　　　D. 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$

5. 某学生做了三道题，以 A_i 表示事件“第 i 题做对了”($i=1,2,3$)，则该学生至少做对了两道题的事件可表示为(　　).

A. $\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$　　　　B. $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$

C. $\overline{A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1}$　　　　D. $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$

6. A,B,C 为三个事件，说明下述运算关系的含义.

(1) A；　(2) $\overline{B}\overline{C}$；　(3) $A\overline{B}\overline{C}$；　(4) $\overline{ABC}$；　(5) $A\cup B\cup C$；　(6) $\overline{ABC}$.

7. 一个工人生产了三个零件，以 A_i 与 $\overline{A}_i$($i=1,2,3$)分别表示他生产的第 i 个零件为正品、次品的事件. 试用 A_i 与 $\overline{A}_i$($i=1,2,3$)表示以下事件：

(1) 全是正品；(2) 至少有一个零件是次品；(3) 恰有一个零件是次品；(4) 至少有两个零件是次品.

1.2　随机事件的概率

在一次随机试验中，某个事件可能发生也可能不发生，但这个事件发生的可能性的大小却是客观存在的，本节我们将讨论随机事件的数量规律性.

1.2.1　概率的统计定义

定义 1.2.1　设 E 为任一随机试验，A 为其中任一事件，在相同条件下，把 E 独立的重复做 n 次，n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为**频数**)，比值 $f_n(A)=n_A/n$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率(frequency)**.

频率具有下述三个性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots,k$ 且 $i\neq j$，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i). \tag{1.2.1}$$

历史上曾有人做过试验，如表 1-2-1 所示，试图证明抛掷均匀硬币时出现正反面的机会均等，发现随抛掷次数的增加，出现正面的频率呈现出稳定性，总是在 1/2 附近摆动.

表 1-2-1

试验者	掷硬币次数 n	出现正面次数(n_A)	频率($f_n(A)$)
德・摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
杰万斯	20480	10379	0.5068
维尼	30000	14994	0.4998
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

人们在实践中发现：在相同条件下重复进行同一试验，当试验次数 n 很大时，某事件 A 发生的频率具有一定的“稳定性”，就是说其值在某确定的数值上下摆动. 一般来说，试验次数 n 越大，事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值. 因此事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来描述.

定义 1.2.2　设 E 为任一随机试验，A 为其中任一事件，在相同条件下，把 E 独立地重复做 n 次，n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数，若试验次数 n 无限增大时，频率 $f_n(A)=n_A/n$ 稳定地在某个常数 p 的附近摆动，且随着试验次数 n 的增大，摆动的幅度越来越小，则称数 p 为事件 A 的**概率(probability)**. 概率的这种定义称为**统计定义(the statistic definition of probability)**，记为 $P(A)=p$.

由定义，显然有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1,\quad P(\Omega)=1,\quad P(\varnothing)=0.$$

应该指出，随机事件的频率是与我们已进行的试验有关的，而随机事件的概率却是完全客观地存在着的. 在实际进行的试验中，随机事件的频率可以看作是它的概率的随机表现. 随机事件的概率表明，试验中的综合条件与随机事件之间有完全确定的特殊的联系，

它从数量上说明了必然性与偶然性的辩证统一.

还应该指出,随机事件的概率反映了大量现象中的某种客观属性,这种客观属性是与我们认识主体无关的. 不应该把概率看作认识主体对于个别现象的信念程度. 有时,一个人说某事件"可能发生"或"很少可能发生",仅表示说话的人对该事件发生的可能性的一个判断而已. 因为个别现象不是发生,就是不发生,所以就个别现象来谈概率是没有任何现实意义的.

1.2.2　概率的公理化定义

对概率的统计或经验观点主要是由冯·米泽斯(R. von Mises)和费歇尔(R. A. Fisher)发展的. 样本空间的概念是由冯·米泽斯引入的. 这个概念使得有可能把概率论的严格的数学理论建立在测度论上. 20 世纪 20 年代中,在许多作者的影响下,概率论的测度论方法逐渐形成. 现代概率的公理化处理,是由科尔莫戈罗夫(A. Kolmogorov)于 1933 年给出的.

定义 1.2.3　设随机试验 E 所对应的样本空间为 Ω,按照某种法则,对 E 中的每一事件 A 均赋予一实数 $P(A)$,若集函数 $P(\cdot)$满足条件:

(1) 非负性:$P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性:$P(\Omega)=1$;

(3) 可列(完全)可加性:若事件列 $A_1,A_2,\cdots$两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots;i\neq j)$,且有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,\tag{1.2.2}$$

则称实数 $P(A)$为**事件 A 的概率**.

由概率的定义,可以推导得概率的如下一些重要性质.

性质 1.2.1　不可能事件的概率为零,即 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2.2　有限可加性:若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing$ $(i,j=1,2,\cdots n;i\neq j)$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\tag{1.2.3}$$

证明　因为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots,$$

所以由概率的可列可加性及性质 1.2.1,易得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 1.2.3　设事件 A,B,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(A)\leqslant P(B).$$

证明　因为 $B=A\cup(B-A)$,A 与 $B-A$ 互不相容,从而

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

所以

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

由概率的非负性，知

$$P(B)\leqslant P(A).$$

性质 1.2.4　对于任一事件 A，$P(A)\leqslant 1$.

性质 1.2.5(逆事件的概率)　对于任一事件 A，均有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 1.2.6(加法公式)　对于任意两事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.2.4}$$

证明　因为 $A\cup B=A\cup(B-A)=A\cup B\overline{A}$，且 A 与 $B-A$ 互不相容，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A),$$

又 $B-A=B-AB$，且 $AB\subset B$，由性质 1.2.3，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 1.2.6 可以推广到多个事件的情况. 如 A,B,C 是任意三个事件，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

更一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可以用归纳法证明得到

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant<i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1.2.5}$$

例 1.2.1　设事件 A,B 互不相容，已知 $P(A)=p$，$P(B)=q$，求 $P(A\cup B)$，$P(\overline{A}\cup B)$，$P(\overline{A}B)$，$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解　由于 $AB=\varnothing$，$\overline{A}B=B-A=B-AB$，而 $AB\subset B$，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q,$$
$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)=q,$$
$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-p.$$

由对偶律

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-p-q.$$

例 1.2.2　设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$. 在下列三种情况下分别求 $P(B\overline{A})$ 的值：

(1) A 与 B 互斥；

(2) $A\subset B$；

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　由性质 1.2.3，知 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$.

(1) 因为 A 与 B 互斥，所以 $AB=\varnothing$，$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$；

(2) 因为 $A\subset B$，所以 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；

(3) $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

例 1.2.3　某地发行 A，B，C 三种报纸，订每种报纸的数量占全体市民人数的 30%，