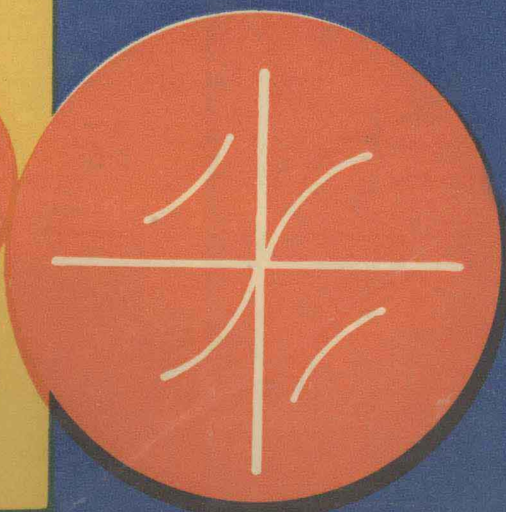
初中数学专题讲座精编

主编 余致甫

副主编 陈权 赵国伟 包于正

华东理工大学出版社



$3(x+y)^2-48(x-y)^2$

$\lg12-2\lg2-\lg3$

初中数学专题讲座精编

主　编　余致甫

副主编　陈　权　赵国伟　包于正

华东理工大学出版社出版

（沪）新登字 208 号

初中数学专题讲座精编

主　编　余致甫
副主编　陈　权　赵国伟　包于正

华东理工大学出版社出版发行
上海市梅陇路 130 号
邮政编码：200237
新华书店上海发行所发行经销
上海东方印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 14.625　字数 435 千字
1995 年 12 月第 1 版　199[illegible] 年 3 月第 2 次印刷
印数　5001 8000 册

ISBN7—5628—0633—0/G·109　定价 16.00 元

前　言

《初中数学专题讲座精编》经过作者一年多共同努力，终于与大家见面了。

1994年10月，在上海市中学数学高级教师培训班关于初中数学教学研讨会上，与会同志一致认为提高初中教学质量、提高初中学生学习水平是培养跨世纪人才的关键，抓好初中教育具有重大的战略意义。为配合上海市课程教材改革，开展初中学生的课外活动，拓宽初中学生的知识面，发展智力，培养能力，切实提高初中学生数学学习水平，我们决定试编一本初中学生课外读物，为初中开设课外活动讲座，提供一份有质量、有新意、又有实效的的崭新资料。

1995年1月，大家深入讨论了初中数学教学大纲的要求，分析了初中数学教学现状与当前学生的实际水平，结合现代数学教学理论、原则、方法进行了反复研究，并对专题讲座作了分工。在同年2月写出初稿后，在自己所在学校进行了实践、试验、修改，5月汇总集中修改。在这基础上，于1995年八、九月间举行了审稿、定稿会议，会上再次对书稿中存在的问题进行深入讨论，集思广益，并提出了修订意见。

对本书讨论、编写、审定工作，是由部分经验丰富的中学特级教师、高级教师与骨干教师，上海市一、二、三届中学数学高级教师培训班学员参加。

本书是按照专题讲座形式编写，全书共三十讲，分成三大部分：Ⅰ、代数部分(由第一讲到第十五讲)；Ⅱ、几何部分(由第十六讲到第二十五讲)；Ⅲ、综合部分(由第二十六讲到第三十讲)。附录是95年数学中考的试题与解答。

每讲内容都从知识内容的地位作用、内容内在联系、解题技能技巧和教与学的重、难点的点拨等几个方面作出分析；每讲专题都分成若干小问题，并举例说明，每个例题都作出分析与思考，探求解题途径，思维策略方法转化与解决。每例解答后都写了说明这一个环节，使得所研究的问题从理论上有所上升，从根本上来提高学生的数学素质与学习数学水平，使学生学习数学上有质的提高，为升入高中打好扎实的基础。

每一讲后面都配备了(A)、(B)、(C)三种类型的习题,(A)为基本题;(B)为技能技巧题;(C)为提高题,供不同程度学生或不同教学阶段进行训练。本书增加了一些定理、公式或技能、技巧的介绍,目的是为了提高学生学习质量。

当然,这本书也为教师进修提供了一份资料,也可供家长们阅读参考,用来辅导自己孩子学习。

本书力求成为广大中学师生的"良师益友",为初中数学教与学作一点贡献,愿我们的书能真正使广大教师、学生从中获得更大的收获与帮助。欢迎大家在课外活动中使用本书,搞些试点,把课外活动搞得丰富多彩,越办越好。书上的一个专题,根据学生特点和程度,可以分几次完成,不一定一次完成,习题也可选用。

参加本书审定工作并担任本书编委工作的有部分区、县教研员、市区重点中学老师:(按姓氏笔划排列)

丁琴华、包于正、叶锦义、刘　寅、刘继祖、孙海杰、朱　欣、朱正元、朱淳生、李道州、李惠通、许三宝、张舜发、张九令、张志兴、陆利忠、陈权、陈贤达、沈建荣、吴景鸾、吴传发、林胜英、赵国礼、赵国伟、席与冰、姚国超、俞安初、唐家麟、眭维和、徐美琴、章其昌、彭根贵、谢锡林、滕　瑛、瞿洵均、魏颂盟等。

章其昌、张舜发、孙海杰为本书责任编委。

陈　权、赵国伟、包于正为本书副主编。

余致甫任本书主编,本书审定、统稿、最后完稿工作也都有余致甫负责。

在编写过程中,曾参阅了大量有关书籍与文章,书名与文题恕不一一列出,这里谨向有关作者致谢。

本书编写、出版,得到了出版社袁明辉同志、朱兆祥同志大力支持与帮助,云　法同志为本书作图等,在这完稿付印之时,一并表示感谢。由于数学教学改革不断地发展与完善,许多问题都有待于深入进行讨论、研究,加上时间比较紧,书中定会存在不少问题,望读者能不吝指正。

余致甫　　上海师大数学系　95.9.

目　录

第一讲　有理数的认识与深化

上海市复兴中学　　刘　寅

在本讲中，先复习有理数的基本概念；有理数的运算技巧；有理数的绝对值等内容，以巩固和加强我们已经学习过的知识. 然后将深入一步地揭示有理数的某些本质特点，介绍有理数的稠密性、可数性以及不连续性. 这些名词听上去很深奥，但只要我们耐心地看下去，还是容易理解并且很有趣味的. 我们会发现自己对有理数还知道得很少，从中将会学到一些解决数学问题的方法，这对今后的学习也会有帮助的.

一、有理数的基本概念

有理数包含正整数、负整数、正分数、负分数和零五类基本数. 通常可按正数、负数、零或者整数、分数来分类.

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\qquad \text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

【例 1】 (1) 为什么可以说"有理数的全体就是循环小数的全体".

(2) 比较 $0.\dot{9}$ 与 1 的大小.

思考与分析　(1) 这里要抓住有理数的全体，循环小数的全体与分数的全体是同一个概念，这样问题就可解决. (2) 循环小数可以化为分数，这个分数的分母全部由 9 组成，其中 9 的个数等于原纯循环小数一个循环节的位数，分子是原纯循环小数的一个循环节. 比如 $0.\dot{3}1\dot{4}=\frac{314}{999}$，将循环小数化为分数后再比较大小.

解　(1) 整数和分数统称为有理数. 因此，一切有理数总可以表示

成$\frac{m}{n}$(其中 m 为整数,n 为自然数)的形式.特别的,当 $n=1$ 时,$\frac{m}{n}$ 就是整数.可以说,有理数的全体就是分数的全体.

另外,真分数可以表示为有限小数或者无限循环小数.特别的,如果把整数、有限小数看成是循环节为零的循环小数,那么,循环小数的全体就是分数的全体.

因此,可以说,有理数的全体就是循环小数的全体.

(2) $0.\dot{9}=\frac{9}{9}=1$.

说明 (1) 通过这个命题的研究,使我们对有理数的特征有了更深一步的理解,关于有理数总可以表示为$\frac{m}{n}$(其中 m 为整数,n 为自然数)这一点,在今后的学习中将会用到.

(2) 既然 $0.\dot{9}$ 与 1 相等,那么它们一点差别也没有,匆匆下结论:$0.\dot{9}<1$ 显然是错的.但是要更深刻理解这个结论,就要涉及到一个"极限"的概念.

二、有理数的运算

有理数混合运算的法则是:

对于加、减、乘、除、乘方、开方(开偶次方时,要求被开方数非负)六种运算,加、减为第一级运算;乘、除为第二级运算;乘方、开方为第三级运算.在混合运算中,若有括号,则先进行括号里面的计算,若无括号,则先进行高一级的运算,再进行低一级的运算.同级运算应当从左向右依次进行.

【例 2】 试计算(1)$(-10800)\div 6\times(-\frac{1}{6})+960\div\{(-2)^3-2^3\times[0.609-(-3.391)]\}$;

(2) $\dfrac{(-\frac{1}{2})^3\times(-1)^2-(-428)\times12\times0+\frac{1}{4}\div[-(\frac{1}{2})^2]}{0.25\times4+[1-3^2\times(-2)]}$.

思考与分析 (1) 括号里乘方运算先做,算出中括号内的值后,再做乘法运算,减法运算放在最后,括号外除乘一起出现,且除在先,乘在后,所以先做除法后做乘法,严格按照顺序进行

(2) 分子和分母分别按照法则进行，应注意到连乘中有零这一项，则不用计算，结果为零，还应注意：$-(\frac{1}{2})^2 \neq (-\frac{1}{2})^2$

解 (1)原式$=(-1800)\times(-\frac{1}{6})+960\div\{-8-8\times4\}$

$=300+960\div(-40)=300-24=276$；

(2)原式$=\dfrac{(-\frac{1}{8})-0+\frac{1}{4}\div[-\frac{1}{4}]}{1+[1-(-18)]}=\dfrac{-\frac{1}{8}-1}{1+19}=\dfrac{-\frac{9}{8}}{20}=-\dfrac{9}{160}$.

说明 通过本例运算，可使我们正确地掌握混合运算的顺序，乘方运算的特点，提高基本运算的能力.

【例 3】 已知a、b为有理数，我们规定两种运算$\oplus$和$\otimes$，使得$a\oplus b=a+b-1$，$a\otimes b=a\times b+2$.（等式右边是通常的加、减、乘运算）

(1) 求$4\otimes[(6\oplus8)\oplus(3\otimes5)]$的值；

(2) 题中所规定的运算$\oplus$和$\otimes$，是否满足交换律$a\oplus b=b\oplus a$，$a\otimes b=b\otimes a$；

(3) 若规定$a\oplus b=a-b-1$，交换律$a\oplus b=b\oplus a$是否满足？

思考与分析 这里规定的两种运算$\oplus$和$\otimes$，并非我们所熟悉的$+$、$\times$运算，但条件告诉我们，a与b通过运算$\oplus$后的结果，应是a加上b再减去1，a与b通过运算$\otimes$后的结果，应是a乘以b再加上2，把运算$\oplus\otimes$转化为通常的加、乘运算，问题就可以得到解决.

解 (1) 原式$=4\otimes[(6+8-1)\oplus(3\times5+2)]=4\otimes[13\oplus17]=4\otimes[13+17-1]=4\otimes29=4\times29+2=118$

(2) 按照规定，$a\oplus b=a+b-1$，$b\oplus a=b+a-1$，所以$a\oplus b=b\oplus a$. 满足交换律.

$a\otimes b=a\times b+2$，$b\otimes a=b\times a+2$，所以$a\otimes b=b\otimes a$，满足交换律.

(3) 因为$a\oplus b=a-b-1$，$b\oplus a=b-a-1$，当$a\neq b$时，$a\oplus b\neq b\oplus a$，交换律不成立.

说明 我们所学过的运算、运算律，是在数之间给出了运算符号，并且规定了在这个符号下的结果，于是加减乘除等运算在这种规定下满足某些运算律，运算律是否成立，完全取决于规定. 但是，并非有运算

便一定有运算律.比如在(3)的规定下,交换律就不成立.

【例 4】 计算:(1) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{99\times101}$;

(2) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+99+100}$.

思考与分析 (1)直接通分,运算将非常复杂,但注意到$\frac{1}{1\times3}=(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3\times5}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})\times\frac{1}{2}\cdots$,$\frac{1}{99\times101}=(\frac{1}{99}-\frac{1}{101})\times\frac{1}{2}$,可以将每一项拆成两项,相加后除了首尾两项外,中间各项前后抵消,问题可获解决.

(2) 探索后可发现如下规律 $1=(1-\frac{1}{2})\times2$,$\frac{1}{1+2}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\times2$,$\frac{1}{1+2+3}=(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\times2$ …,于是$\frac{1}{1+2+3+\cdots+99+100}=(\frac{1}{100}-\frac{1}{101})\times2$,也是相加后前后各项抵消,只剩首尾两项.

解 (1)原式$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{101})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{101})=\frac{50}{101}$;

(2) 原式$=2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{100}-\frac{1}{101})]$

$=2[1-\frac{1}{101}]=\frac{200}{101}$.

说明 这种求和的方法,称为拆项法,一般地$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$,(1)中的$k=2$,而(2)中的拆项方法,可以通过连续$n$个自然数的求和公式得到$\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$.最后一步也是用的拆项的方法,这里$k=1$.

【例 5】 若n是整数,则$M=\frac{1}{16}[1-(-1)^n](n^2-1)$的值 ( )

(A)一定是零; (B)一定是偶数;

（C）不一定是整数；　　　　（D）是整数，但不一定是偶数.

思考与分析　题设中的 n 是整数，因此 $(-1)^n$ 会有两种不同的结果，要把 n 分成 $2k$ 和 $2k+1$（k 是整数）分别讨论，M 的值才能确定，问题可获解决.

解　设 k 是整数，那么当 $n=2k$ 为偶数时，

$M=\frac{1}{16}[1-(-1)^{2k}][(2k)^2-1]=\frac{1}{16}(1-1)[(2k)^2-1]=0$；

当 $n=2k+1$，为奇数时，$M=\frac{1}{16}[1-(-1)^{2k+1}][(2k+1)^2-1]$

$=\frac{1}{16}(1+1)(4k^2+4k)=\frac{k^2+k}{2}=\frac{k(k+1)}{2}$.

由于 k 为整数，所以不论 k 为奇数还是偶数，$k(k+1)$ 一定是偶数，$\frac{k(k+1)}{2}$ 一定是整数，但不一定是偶数. 故结论应是 D.

说明　求含有整数 n 的式子，若直接用 n 不便于计算，则可把 n 分成偶数 $2k$ 和奇数 $2k+1$ 两类（k 仍为整数）用讨论的方法分别求值，另外，记住以下结论是必要的：

$(-1)^{2k}=1$，$(-1)^{2k+1}=-1$，$k(k+1)$ 必是偶数，偶数 $k(k+1)$ 可以表示为 2 与一个整数的积，而这个整数可能是偶数，也可能是奇数. 比如 $6\times7=42=2\times21$，$7\times8=56=2\times28$，如果 m，n 都是整数，那么 $(m+n)$ 与 $(m-n)$ 同是奇数或同是偶数，这些结论在做有关整数的题时常要用到.

三、有理数的绝对值

如果用字母 a 表示任意的有理数，则定义 $|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$

初学者会认为 $-a$ 是负数，事实上当 a 为负数时（$a<0$），$-a$ 是正数，所以，有理数的绝对值一定非负.

从数轴上看，一个有理数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离，既然是“距离”，那么，一个有理数的绝对值非负也就容易解释了.

【例 6】 (1) 有理数 a,b,c 在数轴上的位置如图所示，化简式子 $|a|+|b|+|a+b|+|b-c|+|ab|$.

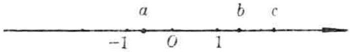


图 1－1

(2) 已知 $|a|=m\quad(m>1)$，则一定成立的关系式是 ( )

(A) $|a|-(a+0.1)>0$； (B) $a-|a|>0$；

(C) $|a|+a>0$； (D) $|a|+\dfrac{1}{a}>0$.

思考与分析 (1) 有理数的绝对值的定义不但是一种数学描述，同时也是告诉我们如何去掉绝对值符号，因为在含有绝对值符号的运算中，我们往往首先考虑如何去掉绝对值符号，本题中必须根据图示，讨论 $a,b,a+b,b-c,ab$ 的正负，然后决定去掉绝对值符号后的情况.

(2) 的题设中并没有说明 a 的正负，事实上，由于 $|a|=m$，那么 $a=m$ 或 $a=-m$，需要分别讨论.

解 (1) 由图示可见 $a<0$，故 $|a|=-a$，因为 $b>0$，故 $|b|=b$，因为 $a+1>0,b-1>0$，所以 $a+b=(a+1)+(b-1)>0$ 可知 $|a+b|=a+b$.

因为 $c>b$ 故 $b-c<0$，可知 $|b-c|=-(b-c)=c-b$，

由 $a<0,b>0$，可得 $ab<0$，故 $|ab|=-ab$.

综上所述 有 $|a|+|b|+|a+b|+|b-c|+|ab|=$ $-a+b+a+b+c-b-ab=b+c-ab$.

(2) 当 $a=m$ 时，由 $m>1>0$，$|a|-(a+0.1)=m-(m+0.1)=-0.1<0$，排除(A). $a-|a|=m-|m|=m-m=0$，排除(B)，当 $a=-m$ 时，$|a|+a=m-m=0$，排除(C).

故结论应为 (D).

事实上，当 $|a|=m$，因为 $m>1$，总有 $|a|+\dfrac{1}{a}=m\pm\dfrac{1}{m}>0$.

说明 当绝对值符号内有两个数进行加、减运算时，可以交换位置，其值不变. 如：$|b-c|=|c-b|$，也可以根据需要，去掉或添上一个负号. 如 $|a|=|-a|$. (2) 的解法，称为排除法. 这是做选择题常用

的一种方法.

【例 7】 已知有理数 x、y、a 满足 $|x+2|+2(y-1)^2+\frac{1}{3}|x+y-a|=0$，求 $a^{1995}+a^{1994}+\cdots+a^2+a$ 的值.

思考与分析 本例涉及到一个非负数的概念，即：若 a 为有理数，则 $|a|$ 非负，a^{an} 非负，非负数有如下重要的性质和运算法则：

法则 若 A_1，A_2 非负，则

(1) A_1+A_2 非负；(2) $A_1 \cdot A_2$ 非负；(3) 如果 $A_1+A_2=0 \Rightarrow A_1=A_2=0$；(4) 最小的非负数是零，非负数大于一切负数.

以上结论可以推广到有限多个非负数.

解 题设三个加项均为非负数，由法则(3)的推广，$x+2=0 \Rightarrow x=-2$，$y-1=0 \Rightarrow y=1$，$x+y-a=0 \Rightarrow -2+1-a=0$.

故 $a=-1$.

则 $a^{1995}+a^{1994}+\cdots+a^2+a=(-1)^{1995}+(-1)^{1994}+\cdots+(-1)^2+(-1)=-1$.

说明 学完根式后，还有一个非负数 $\sqrt[2n]{a}$ $(a>0)$ 所以若 $|A|+B^{2n}+\sqrt[2n]{C}=0$，则 $A=B=C=0$.

下面，我们将深入一步地揭示有理数的某些特性，即有理数的稠密性、可数性及不连续性，内容已超出教材范围，供有兴趣的读者阅读.

四、有理数的稠密性

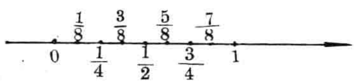


图 1－2

如图 1－2 所示，数轴上两个有理点；0、1 之间的中点 $\frac{1}{2}$ 也是有理点；0、$\frac{1}{2}$ 的中点 $\frac{1}{4}$；0、$\frac{1}{4}$ 的中点 $\frac{1}{8}$；$\frac{1}{2}$、1 之间的中点 $\frac{3}{4}$；$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{2}$ 的中点是 $\frac{5}{8}$；… 也都是有理点. 可以看出，两个有理点 0、1 之间存在无限多个有 理点，用这种取中点的办法可以知道，任意两个有理点之间，存在无

限多个有理点，有理点是密密麻麻地分布在整个数轴上的.

有理数的稠密性可叙述为：任意两个相异的有理数 a、b 之间，存在着无限多个有理数. 具体地说，无论 a、b 是怎样的两个相异的有理数，不妨设 $a<b$，则一定存在另一个有理数 c，使得 $a<c<b$，这是一个存在性命题.

【例 8】 (1) 若 a,b,c,d 均为正数，且 $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ 证明 $\frac{a+c}{b+d}$ 介于 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 之间；

(2) 用上面的结论，找出 $\frac{3}{16}$，$\frac{4}{7}$ 之间按顺序的三个有理数.

思考与分析 由(1)的题设，不论 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的大小关系如何，要证 $\frac{a+c}{b+d}$ 介于 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 之间，只要证 $\left(\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}\right)$ 与 $\left(\frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}\right)$ 异号，即要证这两项的乘积为负.

(2) 用(1)结论，构造出三个数，问题就可解决.

证(1) $\left(\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ab+cb-ab-ad}{b(b+d)}\right)\cdot\left(\frac{ad+cd-cb-cd}{d(b+d)}\right)=\frac{(cb-ad)}{b(b+d)}\cdot\frac{(ad-cb)}{d(b+d)}=\frac{-(cb-ad)^2}{bd(b+d)^2}$.

因为 $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$，所以 $cb\neq ad$.

即 $cb-ad\neq 0$. 因为 $bd(b+d)^2>0$，$(cb-ad)^2>0$. 所以 $\frac{-(cb-ad)^2}{bd(b+d)^2}<0$.

解(2) 根据(1)的结论，$\frac{3}{16}$ 和 $\frac{4}{7}$ 之间的有理数为 $\frac{3+4}{16+7}=\frac{7}{23}$，$\frac{3}{16}$ 和 $\frac{7}{23}$ 之间的有理数为 $\frac{3+7}{16+23}=\frac{10}{39}$，$\frac{7}{23}$ 和 $\frac{4}{7}$ 之间的有理数为 $\frac{7+4}{23+7}=\frac{11}{30}$，故三个有理数依次为 $\frac{10}{39}$，$\frac{7}{23}$，$\frac{11}{30}$.

说明 由上面的结论，在两个相异的正有理数之间找有理数，只需将分子和分母分别相加作为分子和分母即可.

事实上，这个结论可以推广到任意两个相异的有理数，只是要保证

两个有理数的分母 b、d 同号即可，这一点，可以从证明的最后表达式 $\dfrac{-(cb-ad)^2}{bd(b+d)^2}<0$ 得到. 利用这种方法，我们可以在任意两个有理数之间，找到无限多个有理数，并非一定要用取中点的办法.

五、有理数的可数性

如果问有理数和自然数的个数哪一个多？有人立即会说：自然数是有理数的一部分，当然是有理数个数多！

先举这样一个例子，如果问某教室中桌子多还是椅子多？一种方法是数出桌子、椅子的数目，然后比较多少. 另一种方法是一个桌子配一把椅子，这样一一对应，答案很快就能得出.

由于有理数和自然数都是无限多个，因此，上述第一种方法显然无法得到结果，采用第二种方法，就是看全体有理数能否和全体自然数做到一一对应.

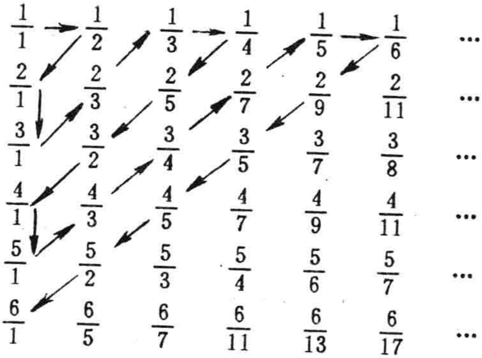
下面我们要来证明一个事实：有理数和自然数的个数“一样多”.

因为有理数总可以写成分数的形式，我们可以按分母大小，先将正有理数排成下面的方块：

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \frac{5}{6} & \cdots \\[6pt]
\frac{6}{1} & \frac{6}{2} & \frac{6}{3} & \frac{6}{4} & \frac{6}{5} & \frac{6}{6} & \cdots
\end{array}$$

方块中被圈掉的是有重复的数，如 $\frac{2}{2}$、$\frac{3}{3}$ 等（已有 $\frac{1}{1}$），$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$ 等（已有 $\frac{1}{2}$），…

再在每个横列中，用后面…号中的数字按规律及上述做法依次序补上，得下表



再按表中箭头的顺序将正有理数一一排列，这样，所有的正有理数都将无重复无遗漏地被排入下述横列.

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{1}\ \frac{5}{1}\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{2}{9}\ \frac{3}{5}\cdots$$

按照规律，上述横列中任意一个有理数，都可以和它所处的“位置数”(即自然数)对应，例如$\frac{4}{3}$排在第 12 位，也就是有理数$\frac{4}{3}$与自然数 12 对应，$\frac{2}{9}$排在第 17 位，有理数$\frac{2}{9}$与自然数 17 对应…….

如果再考虑符号，在排队时先排 0，然后在每个正有理数后面，排上它的相反数，这样，每个有理数都可以有它自己的“位置数”，即每个有理数都能与自然数对应.

因此，我们可以说，有理数与自然数的个数“一样多”.

有理数的这个特性，称为有理数的可数性，也称有理数是“可数的”，这里补充一句：无理数就不具备可数性.

【例 9】 有一数列$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{1},\frac{4}{2},\frac{3}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{5},\cdots$，

求：第 100 项数，第 120 项数，并比较这两数的大小.

思考与分析 仔细观察这个数列的特点，发现可以把它隔成有规律的节，$(\frac{1}{1})$、$(\frac{2}{1},\frac{1}{2})$、$(\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3})$、$(\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4})$、$(\frac{5}{1},\frac{4}{2},\frac{3}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{5})$，…每一节中数的个数又按连续自然数递增，再利用［例 4］(2) 中介