大　学　数　学　教　程

微积分 2

第二版

山东大学数学学院

刘建亚　吴臻　主编

张天德　蒋晓芸　许闻天　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大　学　数　学　教　程

微积分 2

Weijifen 2

第二版

山东大学数学学院

刘建亚　吴臻　主编

张天德　蒋晓芸　许闻天　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书主要内容包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、场论简介. 为适应分层次教学的需要，每节配有难度适宜的课后习题，带“*”号的内容可供对数学要求较高的专业选学. 书末附有习题参考答案.

本书注重培养学生从实际问题建立数学模型的意识以及使用数学软件的能力，因此在每章的最后都配有解决本章问题的 MATLAB 程序和例题演示.

本书可供高等学校非数学类专业学生使用，也可供科技工作者学习参考. 读者可登录 http://202.194.15.128/wjf 浏览和下载国家精品课程教学资源.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学教程. 微积分. 2 / 刘建亚，吴臻主编 ; 张天德，蒋晓芸，许闻天编. -- 2版. -- 北京 : 高等教育出版社，2011.6
ISBN 978-7-04-033806-5

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①刘… ②吴… ③张… ④蒋… ⑤许… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材 Ⅳ. ①013②0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第249067号

策划编辑 于丽娜　　责任编辑 于丽娜　　封面设计 张志奇　　版式设计 马敬茹
插图绘制 黄建英　　责任校对 杨凤玲　　责任印制 尤　静

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787 mm×960 mm　1/16		
印　　张	17.5	版　　次	2003年1月第1版
字　　数	320千字		2011年6月第2版
购书热线	010-58581118	印　　次	2011年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	24.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有　侵权必究
物 料 号　33806-00

大学数学教程

编委会

主　编　刘建亚　吴　臻

编　委（按姓氏笔画排列）

刁在筠　包芳勋　叶　宏　吕　同

许闻天　张天德　张光明　郑修才

金　辉　胡发胜　秦　静　傅国华

蒋晓芸

目　　录

第 6 章　无穷级数 …… 1

§6.1　常数项级数的概念和性质 …… 1

1. 常数项级数的概念 …… 1

2. 收敛级数的基本性质 …… 4

习题 6.1 …… 6

§6.2　正项级数的审敛法 …… 7

习题 6.2 …… 14

§6.3　交错级数和任意项级数的审敛法 …… 16

1. 交错级数 …… 16

2. 任意项级数的绝对收敛和条件收敛 …… 17

*3. 绝对收敛级数的性质 …… 18

习题 6.3 …… 19

§6.4　幂级数 …… 19

1. 函数项级数及其收敛域 …… 19

2. 幂级数及其收敛性 …… 21

3. 幂级数的四则运算 …… 25

4. 幂级数和函数的性质 …… 26

习题 6.4 …… 28

§6.5　函数展开成幂级数 …… 29

1. 泰勒级数 …… 29

2. 函数展开成幂级数 …… 32

习题 6.5 …… 37

* §6.6　幂级数的简单应用 …… 38

1. 函数值的近似计算 …… 38

*2. 用幂级数表示积分及求定积分的近似值 …… 41

习题 6.6 …… 42

* §6.7　反常积分的审敛法和 Γ - 函数 …… 42

1. 反常积分的审敛法 …… 43

2. Γ - 函数 …… 46

习题 6.7 …… 48

* §6.8　傅里叶级数 …… 49

1. 三角函数系的正交性 …… 49

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

2. 函数展开为傅里叶级数 …… 50
习题 6.8 …… 55
* §6.9　正弦级数、余弦级数和一般区间上的傅里叶级数 …… 56
1. 奇函数和偶函数的傅里叶级数 …… 56
2. 函数展开成正弦级数或余弦级数 …… 58
3. 一般区间上的傅里叶级数 …… 60
习题 6.9 …… 63
** §6.10　复数形式的傅里叶级数 …… 64
§6.11　用 MATLAB 计算级数问题 …… 65
1. 级数求和 …… 65
2. 泰勒级数展开 …… 66
3. 傅里叶级数展开 …… 67
第 7 章　向量代数与空间解析几何 …… 70
§7.1　向量及其运算 …… 70
1. 空间直角坐标系 …… 70
2. 两点间的距离 …… 71
3. 向量的概念 …… 72
4. 向量的线性运算 …… 72
5. 向量的坐标 …… 74
6. 两向量的数量积和方向余弦 …… 75
7. 向量的向量积和混合积 …… 78
习题 7.1 …… 80
§7.2　空间的平面和直线 …… 81
1. 空间的平面方程 …… 82
2. 空间的直线方程 …… 85
习题 7.2 …… 89
§7.3　空间的曲面和曲线 …… 90
1. 空间曲面 …… 90
2. 空间曲线 …… 93
3. 二次曲面 …… 96
习题 7.3 …… 100
§7.4　用 MATLAB 画空间曲线 …… 101
第 8 章　多元函数微分学及其应用 …… 103
§8.1　多元函数的概念及其极限和连续 …… 103
1. 多元函数的概念 …… 103
2. 二元函数的极限和连续 …… 106
习题 8.1 …… 109

§8.2 偏导数与全微分 …… 110
1. 偏导数 …… 110
2. 高阶偏导数 …… 112
3. 全微分 …… 113
习题 8.2 …… 117
§8.3 多元复合函数和隐函数的微分法 …… 118
1. 多元复合函数的微分法 …… 118
2. 隐函数的微分法 …… 122
习题 8.3 …… 125
§8.4 微分法在几何上的应用 …… 127
1. 空间曲线的切线和法平面 …… 127
2. 空间曲面的切平面和法线 …… 131
习题 8.4 …… 133
§8.5 多元函数的极值与最值 …… 133
1. 多元函数的极值 …… 133
2. 最大值与最小值 …… 135
3. 条件极值 …… 136
习题 8.5 …… 139
§8.6 用 MATLAB 求偏导数 …… 140
第9章 重积分 …… 141
§9.1 二重积分的概念和性质 …… 141
1. 引入二重积分的两个实际问题 …… 141
2. 二重积分的定义 …… 142
3. 二重积分的性质 …… 143
习题 9.1 …… 144
§9.2 二重积分的计算 …… 145
1. 直角坐标系下二重积分的计算 …… 146
2. 极坐标系下二重积分的计算 …… 151
习题 9.2 …… 155
§9.3 三重积分的概念 …… 157
习题 9.3 …… 158
§9.4 三重积分的计算 …… 158
1. 在直角坐标系下的累次积分法 …… 158
2. 在柱面坐标系下的累次积分法 …… 163
3. 在球面坐标系下的累次积分法 …… 165
4. 重积分的一般变量代换 …… 167
习题 9.4 …… 169

§ 9.5　重积分的应用 …… 171
1. 曲面的面积 …… 171
2. 质心 …… 172
3. 转动惯量 …… 175
4. 引力 …… 176
习题 9.5 …… 178
§ 9.6　用 MATLAB 计算重积分 …… 179
第 10 章　曲线积分与曲面积分 …… 182
§ 10.1　对弧长的曲线积分 …… 182
1. 对弧长的曲线积分的概念与性质 …… 182
2. 对弧长的曲线积分的计算法 …… 184
习题 10.1 …… 186
§ 10.2　对坐标的曲线积分 …… 187
1. 对坐标的曲线积分的概念和性质 …… 187
2. 对坐标的曲线积分的计算法 …… 190
3. 两类曲线积分之间的关系 …… 192
习题 10.2 …… 194
§ 10.3　格林公式及其应用 …… 196
1. 格林公式 …… 196
2. 平面上曲线积分与路径无关的条件 …… 200
3. 二元函数的全微分求积、全微分方程 …… 204
习题 10.3 …… 207
§ 10.4　对面积的曲面积分 …… 209
1. 对面积的曲面积分的概念与性质 …… 209
2. 对面积的曲面积分的计算 …… 210
习题 10.4 …… 213
§ 10.5　对坐标的曲面积分 …… 214
1. 对坐标的(第二类)曲面积分的概念与性质 …… 214
2. 第二类曲面积分的计算法 …… 218
3. 两类曲面积分的关系 …… 220
习题 10.5 …… 222
§ 10.6　高斯公式和斯托克斯公式 …… 223
1. 高斯公式 …… 223
2. 斯托克斯公式 …… 228
习题 10.6 …… 231
*§ 10.7　场论简介 …… 232
1. 场的表示法 …… 232

2. 数量场的梯度 …… 233
3. 向量场的散度 …… 238
4. 向量场的旋度 …… 240
5. 有势场　无源场　调和场 …… 243
习题 10.7 …… 245
§10.8　用 MATLAB 计算曲线积分和曲面积分 …… 247
习题参考答案 …… 249

第6章 无穷级数

无穷级数是微积分理论的重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质，进行数值计算以及求解微积分方程等的重要工具. 本章先讨论常数项级数，介绍无穷级数的一些基本性质，然后讨论函数项级数，特别是将函数展开成幂级数与三角级数的问题，并将无穷级数的审敛法推广应用到反常积分上去，建立直接判断反常积分敛散性的审敛法.

§6.1 常数项级数的概念和性质

历史上，无穷级数是由于进行计算的需要而产生的. 为了计算一个较复杂的量，先以一列简单的值之和作为其近似值，如果要求不断地提高精度以至最后求出这个量的精确值，就需要计算无穷项的“和”，因而就出现了所谓无穷级数的问题. 而无穷级数的确切概念和理论，则是在极限概念精确化以后才形成的，并逐渐成为微积分理论的重要内容.

1. 常数项级数的概念

无穷级数的概念来自解决某些实际问题的需要，下面就是我国魏晋时代的刘徽用无穷级数概念来近似计算圆面积的例子.

例 6.1.1 设圆的半径为 r，求圆的面积 A(图 6.1.1).

解 作圆的内接正六边形，算出其面积，记为 a_1，得 A 的第一个近似值. 继而作内接正十二边形，算出六个弓形上六个等腰三角形面积之和，记为 a_2，a_1+a_2是 A 的比 a_1 更好的近似值. 继续再作内接二十四边形，算出 12 个小弓形上的 12 个等腰三角形面积之和 a_3，又得 A 的更好的近似值 $a_1+a_2+a_3$. 如此继续 n 次，得到 A 的第 n 个近似值 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，如果内接正多边形边数无限增多，即 n 无限增大，则和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 当 $n\to\infty$ 时的极限就是所要求的圆面积 A.

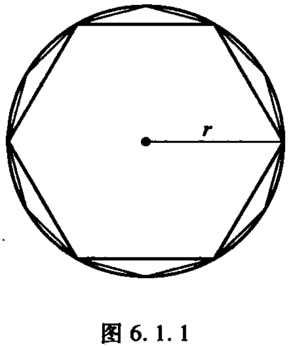

图 6.1.1

在上例中，和式中的项数无限增多，于是就出现了无穷多个数值依次相加的数学式子.

一般地，如果给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots,$$

则由此数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为(常数项)**无穷级数**，简称(常数项)**级数**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{6.1.1}$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项**或**通项**.

在上述级数定义中，无穷项相加暂时还没有运算上的意义，因为逐项相加对无穷多项来说是无法实现的. 为此，我们按照逼近法的思想，用"已知的简"，即有限项的和，去逼近"未知的繁"，即无穷多项的和.

把级数(6.1.1)的前 n 项的和记为 S_n，即

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

称 S_n 为级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的(前 n 项)**部分和**. 当 n 依次取 1，2，3，…时，由级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 就得到一个新的数列 $\{S_n\}$，称它为级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的**部分和数列**.

定义 6.1.1　若级数(6.1.1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时，存在极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数(6.1.1)收敛，并称 S 为级数的和，记为

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = S;$$

若 $\{S_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时，不存在极限，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 是发散的.

显然，当级数收敛时，其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值，它们的差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 第 n 项后的**余项**，用近似值 S_n 代替和 S 所产生的误差是余项的绝对值，即 $|r_n|$.

例 6.1.2　证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

收敛，并求其和.

解　因为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

于是

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+\cdots+u_n\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

故级数收敛且其和 $S=1$.

例 6.1.3 讨论等比级数(也称为几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots \tag{6.1.2}$$

的敛散性. 其中 $a\neq 0$, q 是级数的公比.

解 当 $q\neq 1$ 时, 其部分和为

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

若 $|q|<1$, 则因 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}$, 级数收敛且和为 $\frac{a}{1-q}$.

若 $|q|>1$, 则因 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, 级数发散.

当 $q=1$ 时, 级数成为 $a+a+\cdots+a+\cdots$, $S_n=na$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, 级数发散.

当 $q=-1$ 时,

$$S_n=\begin{cases}a, & n\text{ 为奇数},\\0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

从而 $\{S_n\}$ 的极限不存在, 此时级数(6.1.2)亦发散.

总之, 当 $|q|<1$ 时, 等比级数(6.1.2)收敛且其和 $S=\frac{a}{1-q}$, 当 $|q|\geqslant 1$ 时, 等比级数(6.1.2)发散.

例 6.1.4 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

证 因为 $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$, 于是

$$\begin{aligned}S_n&=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)\\&=\ln(n+1).\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

故级数发散.

2. 收敛级数的基本性质

根据无穷级数敛散性的定义以及和的概念，可以得出收敛级数的下列基本性质.

性质1　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 S，k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，其和为 kS，即对收敛级数有 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n = kS$.

证　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 和 σ_n，则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = kS_n,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} kS_n = k\lim_{n\to\infty} S_n = kS,$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，其和为 kS.

由关系式 $\sigma_n = kS_n$ 知，若 $\{S_n\}$ 没有极限且 $k\neq 0$，则 $\{\sigma_n\}$ 也没有极限，由此有如下结论：**级数的每一项同乘一个不为零的常数，其敛散性不变.**

性质2　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S 和 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $S\pm\sigma$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S \pm \sigma.$$

证明类似于性质1，从略.

这个性质也可叙述为：**两个收敛级数可以逐项相加或逐项相减.**

性质3　在级数的无穷多项中去掉或添加上有限项，不会改变级数的敛散性. 在原级数收敛时，仅可能改变级数的和.

证　不妨设将级数 $u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$ 的前 k 项去掉，则得级数

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots,$$

其部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = S_{k+n} - S_k,$$

其中 S_{k+n} 是原来级数的前 $k+n$ 项的和，由于 S_k 是常数，所以当 $n\to\infty$ 时，σ_n 与 S_{k+n} 或者同时具有极限，或者同时没有极限. 当它们存在极限时，有

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(S_{k+n}-S_k)=S-S_k,$$

其中 S 为原级数的和，σ 是新级数的和.

类似地，可以证明在级数前面添加上有限项，不会影响级数的敛散性.

由此性质还可推知：**改变级数的有限项也不改变级数的敛散性.**

性质 4　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对该级数的各项按原次序任意分组加括号后，所成的新级数仍收敛且其和不变.

证　设收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 分组加括号后所成级数是

$$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots. \tag{6.1.3}$$

以 S_n 表示级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和，级数(6.1.3)相应于前 k 项的部分和为 A_k，则

$$A_1=u_1+u_2+\cdots+u_{n_1}=S_{n_1},$$

$$A_2=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})=S_{n_2},$$

……

$$A_k=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})$$
$$=S_{n_k},$$

显然当 $k\to\infty$ 时，$n\to\infty$，因此

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

即加括号后所成的级数收敛且其和不变.

注意，性质 4 的逆不真，即如果加括号后所成级数收敛，则不能断定去括号后原来的级数也收敛，例如级数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但去括号后，级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

发散.

推论　如果加括号后所成的级数发散，则原来的级数也一定发散.

性质 5（级数收敛的必要条件）　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0\ .$$

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$，即 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

注意：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 不是级数收敛的充分条件，有些级数虽然一般项趋于零，但仍然是发散的，如例 6.1.5.

例 6.1.5 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{6.1.4}$$

虽然有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但却是发散的.

证 顺次将级数(6.1.4)的项按如下方式加括号，即按两项，四项，八项，…，2^m 项，…括在一起，得

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+$$
$$\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\right)+\cdots,$$

记此加括号级数前 $m+1$ 项的和为 S_{m+1}，则

$$S_{m+1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(m+1),$$

因此 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{m+1}=\infty$，故加括号后的级数发散. 由性质 4 推论知，调和级数(6.1.4)发散.

上述几何级数、调和级数都是常用级数，请读者务必熟记它们的敛散性.

与性质 5 等价的逆否命题是

推论(级数发散的充分条件) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

习 题 6.1

1. 利用级数收敛的定义判断下列级数的敛散性，如收敛则求其和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；

(5) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$；

*(6) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

2. 利用几何级数、调和级数以及收敛级数的性质，判定下列级数的敛散性：

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(3) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$;

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{6}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2}\right)+\left(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3}\right)+\cdots$;

(6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{30}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}\right)+\cdots$;

(7) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\cdots$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

§6.2　正项级数的审敛法

在级数的研究中，首先是要考察其敛散性，对于收敛的级数，有时还要求求出它的和. 而利用级数敛散性的定义直接判断级数是否收敛通常是困难的，因此需要寻求简便的方法，本节将讨论正项级数的审敛方法.

每项均非负的级数称为正项级数，它是一类常见而又重要的级数，而且也是研究其它级数收敛性问题的基础.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，则有 $u_n\geqslant0$，则其部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

组成一个单调增加的数列 $\{S_n\}$，因而有下面的

定理 6.2.1（基本定理）　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

证 若$\{S_n\}$有界，则存在$M>0$，使$S_n\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 又因为$\{S_n\}$是单调增加的数列，根据单调有界数列必有极限的准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

反之，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$存在，根据有极限的数列必有界的定理知，数列$\{S_n\}$有界.

由上面的定理可知，若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则其部分和必无限增大，即有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=+\infty$.

根据上述基本定理可以建立正项级数的一系列审敛法.

定理 6.2.2(比较审敛法)　设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，

(1) 若$u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

(2) 若$u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

证 (1) 设$u_n\leqslant v_n$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n\leqslant\sigma,$$

即$\{S_n\}$有界，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 用反证法，假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则由(1)知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也收敛，这与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散矛盾，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

这一判别法可以这样来记：比收敛级数“小”的级数仍收敛；比发散级数“大”的级数仍发散.

注意到级数各项乘以不为零的常数k以及去掉级数的有限项不会影响级数的敛散性，可得如下推论.

推论 1　设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，

(1) 若从某项起(如从第N项起)有$u_n\leqslant kv_n\quad(n\geqslant N,k>0)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com