2014精英书系

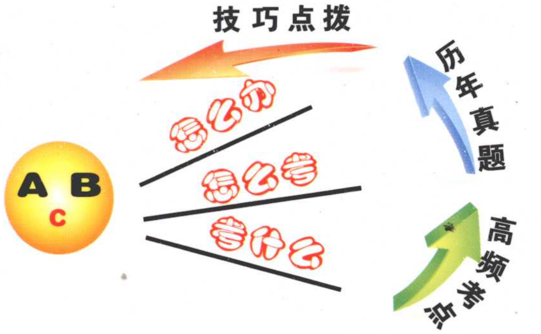
跨考教育
WWW.KUAKAO.COM

考研数学

精英计划

高等数学常考题型36问

总策划◎跨考考研数学研究院　主编◎徐兵　严守权



专属90后的考研备考"资料包"

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学

精英计划

高等数学常考题型36问

总策划◎跨考考研数学研究院　　主编◎徐兵　严守权

北京理工大学出版社
BEIJING ESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学精英计划高等数学常考题型36问 / 徐兵,严守权主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2013. 3

ISBN 978 - 7 - 5640 - 7459 - 3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①徐… ②严… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第036791号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷厂
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 18
字　　数 / 370千字
版　　次 / 2013年3月第1版　2013年3月第1次印刷
定　　价 / 29.80元

责任编辑/ 张慧峰
责任校对/ 杨　露
责任印制/ 边心超

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前　言

（一）

如何使考研数学的备考复习更加高效，又如何将复习的成果尽快转化为应试实战能力，这是每一位准备参加硕士研究生入学考试的朋友最为关心的问题。解决这个问题不是靠更多的资金投入，也不需要耗费更多的时间，而是靠对硕士研究生入学考试的内在规律和内容的把握，以及基于这种理解和把握下的对备考工作科学的规划和行之有效的方法。精英计划系列丛书的陆续出版，正是为广大考生朋友的备考工作提供了一种新思路、新途径和新方法。

《考研数学精英计划常考题型X问》是考研数学精英计划的一个重要组成部分，该系列丛书在综合考试大纲和历年考试分析的基础上，将考研数学最终归结为要集中解决的X个问题。这X问涵盖了实际考试中**最常见、最基本、也是最重要的内容，深刻回答了考研数学要考什么的问题。**与《考研数学精英计划最常考真假命题400条》相类似，《考研数学精英计划常考题型X问》也是目前市场上首次出现的将考研数学归纳为若干问题讲述的考研辅导书，书中体现了精英计划系列丛书所要强调的另外一个思想和理念：考研数学复习要突出重点、直达主题，提出问题、解决问题，带着问题学。这就为我们的备考复习提供了一个量化指标和努力的方向。如同打仗一样，踏踏实实地一个一个问题去复习，积小胜为大胜，攻城略地，最终达到全胜。还要说明的是，**《考研数学精英计划常考题型X问》不是简单的一题一问，而是一个综合类型，目的是引导大家学会综合运用所学知识，快速解决数学问题，这一点恰恰是我们备考复习必须要突破的关键点。**墩实基础，强化综合应用能力是我们精英计划系列丛书的两个基本点，既是出发点，又是着力点。《考研数学精英计划常考题型X问》和《考研数学精英计划最常考真假命题400条》相辅相承，共同构成一个更具针对性、更贴近实战和更加高效的考研数学备考复习体系。

将考研数学的内容归结为若干问题主要是基于以下几点的考虑：首先，基于考试科目（高等数学或微积分，线性代数和概率论与数理统计）的学科特点。它们作为数学基础学科，发展得已经十分成熟，体系和内容非常稳定，而且与时事无关。其次，全国硕士研究生入学考试数学考试开考以来，考试大纲历经多次变革已经到位，**从2011年开始，进入了卷库命题时代，出卷方式、考试类别、考试内容、考试要求和考卷的结构形式等都处在一个相对稳定的时期。**再次，近30年的考研真题说明，题型结构、风格特点等都很难有新的创意，可以预料，对以往试题的局部调整和重组，将是未来命题工作中的常态。最后，笔者从事考研辅导和辅导教材的编写工作20余年，熟悉全国硕士研究生入学考试数学考试的演变发展过程和背景，能准确把握考试的重点、难点、热点和变化趋势，因此也有能力对数学考试的内容进行科学的归纳总结，从而确保以问题带动备考复习方法的可靠性和有效性。

（二）

《考研数学精英计划常考题型X问》的**主要特色包括：**每一问的问题在整个考研数学中

的位置、趋势、难易度，以及对该问题的复习建议；问题的核心内容、重要内容和外延，及问题之间的相互关系；问题所涉及的重要知识点的归纳、梳理、诠释和必要的提示；重要题型的应对思路、算法和注意事项等。

在问题的分析和讨论上，我们主要通过精选典型例题来说明问题的内涵和外延、题型特点和难易度；在算法上，尽可能提供多种解法，对于重要方法和提示，以点拨方式列出。为了更贴近考研实际，选题尽可能以历年真题为主，同时也补充必要的题型以便更全面地诠释问题；在结构上，我们综合考研的命题趋势、题型的典型性、重要性、问题的外延和发展，将例题分为A、B、C三级。A、B级题更典型、更符合当前考研数学的命题趋势，当然也是大家复习的重点，C级通常是对题型可能出现的外延或扩展做最后的补充。在每个类型后都配以精妙的小结，进行综合点评。

（三）

根据我们多年的辅导、教学经验，我们发现：**对于每个参加数学考试的考生而言，数学基础固然重要，但考试成绩的好坏关键还在于后期的复习是否到位。**基础薄弱的考生只要踏实认真，同样可以厚积薄发，取得优异成绩。我们深信《考研数学精英计划常考题型X问》系列丛书的推出将会为你们的成功飞跃插上隐形的翅膀。

（四）

作者分析了近二十几年研究生入学考试数学试题，分析了各题目的考查知识点、解题思路、特殊解题技巧，研究了试题中怎样融入并引申概念与性质的内涵和外延且由此导出一些独特的解题技巧。分析了考生易犯的典型错误与原因，对照考试中心历年发布的题目难度系数，探讨提高考生成绩的途径。

本书对高等数学考研常考题型做了认真分析，依据试题性质，参考传统数学教学，为便于考生记忆，将常考题型进行了分类；为突出其特点，提出相应问题，以利于考生掌握。

对于数学一将高等数学常考题型分为36类；

对于数学二将高等数学常考题型分为28类。

本书是为数学一、数学二备考生提供的不可多得的复习用书。

作　者

目　录

注　1. 标*的数学二不做要求.

2. 数学一为36问;数学二为28问.

第 1 问　数列极限试题有哪些形式与特点?

一、概述

数列极限是考研中常考内容之一,其变化形式多样.考试内容包括数列极限的定义及其性质、极限的运算、极限存在的两个准则及重要极限公式.

对于定义与性质的内涵与外延常常由选择题形式给出.

对于运算中的基本问题常见于一些综合性的解答题中.

对于无穷多项和的极限或由递推公式给出通项的极限问题常常出现于解答题中,由极限存在准则等方法求解.这类题目多为中等难度题.

二、典型例题

1. 极限的概念与性质 (A 级)

例 1(99—2)　"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|<2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

(A)充分条件但非必要条件　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件也非必要条件

分析　***本题考查的知识点***　极限的定义.

对照极限的定义:"对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$,则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a."似乎命题的提法与定义相比要弱些.但认真分析两种提法,可知它们是等价的.由定义可知,对任意给定 $\varepsilon\in(0,1)$,必定存在 N_1,当 $n>N_1$ 时,总有

$$|x_n-a|<\varepsilon<2\varepsilon.$$

其逆也正确,任意给定 $\varepsilon_1>0$,取 $\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{3}$,对于此 ε,存在 N_2,当 $n>N_2$ 时,恒有 $|x_n-a|<2\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$.

因此选(C).

本题难度系数　0.380

例 2(03—1,2)　设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

分析　***本题考查的知识点***　极限的概念,极限的性质.

数列 $\{x_n\}$ 的极限描述当 $n\to\infty$ 时 x_n 的变化性态,与其前有限项值无关,因此排除(A),(B).

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nc_n)$ 为未定型,应排除(C).故选择(D).

例 3(08—1,2)　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　).

(A)若$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛　　(B)若$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛

(C)若$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛　　(D)若$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛

分析　本题考查的知识点　极限存在准则.

由于 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,当$\{x_n\}$单调时,$\{f(x_n)\}$必为单调有界数列,可知$\{f(x_n)\}$收敛,故选(B).

本题难度系数　数学一 0.456　数学二 0.537

说明　对于数列极限的选择题,基本上是考查其内涵与外延,这类题目完全可移植到函数相应的问题中.

2. 由递推公式给出通项的极限问题 (A级)

例 4(96—1)　设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　本题考查的知识点　"单调有界数列必有极限"准则的运用.

数列$\{x_n\}$是由递推公式形式表示的,判定其极限是否存在通常利用数列极限的存在准则:单调有界数列必有极限. 其要点为

判定数列$\{x_n\}$的单调性.若其单调增加,应判定其有上界;若其单调减少,则应判定其有下界.

判定数列$\{x_n\}$有界性与单调性的顺序可以随意.

由于 $x_1=10, x_2=\sqrt{6+10}=4$,可以猜测$\{x_n\}$为单调减少数列. 设 $x_k>x_{k+1}$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

由归纳法可知$\{x_n\}$为单调减少数列,又 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\geqslant 0$,可知$\{x_n\}$为单调减少有下界的数列. 由极限存在准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n},$$

从而 $A=\sqrt{6+A}$,可解得 $A=3$ 或 -2. 由 $x_n>0$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\geqslant 0$,故舍掉$-2$,可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

本题难度系数　0.530

说明　本题在命制时,曾考虑以下两个变式:

变式 1　设 $x_1=0, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

此变式较例 4 难在判断$\{x_n\}$有界.

变式 2　设 $x_1>-6, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

此变式的难度在于应该将 x_1 的初值分为几种情形讨论.

由于

$$x_2-x_1=\sqrt{6+x_1}-x_1=\frac{6+x_1-x_1^2}{\sqrt{6+x_1}+x_1}=\frac{(3-x_1)(2+x_1)}{\sqrt{6+x_1}+x_1},$$

可分为$-6<x_1<-2$,$-2<x_1<3$,$x_1>3$ 三种情形分别讨论$\{x_n\}$的单调性.

此变式较例 4 难度明显更大.

例 5(02－2)　设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$存在极限，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　本题考查的知识点　"单调有界数列必有极限"准则的应用.

所给问题也需利用"单调有界数列必有极限"的准则. 本题与例 4 不同之处是本题中 x_1 介于某个范围之内，与例 4 变式 2 相仿.

由于 $0<x_1<3$，可知 $3-x_1$ 为正数，从而

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}[x_1+(3-x_1)]=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1 \text{ 且 } k\in\mathbf{N}^+)$，则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}[x_k+(3-x_k)]=\frac{3}{2}.$$

由归纳法可知对任意正整数 $n>1$，总有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$，即$\{x_n\}$为有界数列.

当 $n>1$ 时，有

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})$$
$$\xlongequal{(*)}\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0,$$

可知$\{x_n\}$为单调增加数列.

由极限存在准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，可得 $A=\sqrt{A(3-A)}$，可解得 $A=\frac{3}{2}$或 0(舍掉)，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

本题难度系数　0.350

点拨　典型运算错误　在证明$\{x_n\}$有界时，相当多考生这样考虑：因 $0<x_1<3$，有 $0<3-x_1<3$，故 $0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}<3$，类似可证得对 $n>1$ 时，有 $0<x_n<3$. 对于有界性而言，证明正确. 但是在(＊)处，要分 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$ 与 $\frac{3}{2}<x_n<3$ 讨论，而导致证明单调性的错误.

这表明判定出数列有界可能还不够，如本例还需要判断出其"最精确"的上界. 这是本题得分率低的主要原因.

例 6(06－1,2)　设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n, n=1,2,\cdots$.

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(2)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析　本题考查的知识点　极限存在准则，幂指函数的极限，极限与子列极限的性质.

(1)与例 5 相仿，x_1 也是位于某个范围之内. 由题设可知 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n$，因此

$$x_2=\sin x_1>0, x_2=\sin x_1<x_1<\pi,$$

即
$$0<x_2<x_1<\pi.$$

设 $0<x_k<x_{k-1}<\pi$，则
$$x_{k+1}=\sin x_k>0,x_{k+1}=\sin x_k<x_k<\pi.$$

由数学归纳法可知数列 $\{x_n\}$ 为单调减少且有下界的数列，因此数列 $\{x_n\}$ 必定存在极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则
$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin x_n,$$
可知
$$A=\sin A.$$

由于 $0<x_n<\pi$，可知 $A=0$ 为唯一解，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}},$$
所求极限为幂指函数形式的极限.

设 $z=\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，则
$$\ln z=\frac{1}{x_n^2}(\ln\sin x_n-\ln x_n),$$
$$\lim_{n\to\infty}\ln z=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sin x_n-\ln x_n}{x_n^2}. \qquad ①$$

上式右端为“$\dfrac{0}{0}$”型极限，但是表达式为数列极限，不能利用洛必达法则求解. 考虑：
$$\begin{aligned}\lim_{y\to0}\frac{\ln\sin y-\ln y}{y^2}&=\lim_{y\to0}\frac{\dfrac{\cos y}{\sin y}-\dfrac{1}{y}}{2y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{y\cos y-\sin y}{2y^2\sin y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{y\cos y-\sin y}{2y^3} \qquad ②\\&=\lim_{y\to0}\frac{\cos y-y\sin y-\cos y}{6y^2}\\&=\lim_{y\to0}\frac{-y\sin y}{6y^2}=-\frac{1}{6},\end{aligned}$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\ln z=-\frac{1}{6},$$
即
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}. \qquad ③$$

本题难度系数　数学一 0.480　数学二 0.428

点拨　本题解题技巧　(1)在上述运算①处利用极限性质：若函数(或数列)存在极限，则其任一子列也存在极限，且子列极限等于函数(或数列)极限.

(2)本题难点有两个：一是利用对数性质转化幂指函数为初等函数的形式；二是要利用数列极限与子列极限的性质.

典型运算错误　(1)在上述运算①处，不作转化，直接利用洛必达法则求解，而导致错误.

(2)在②处不作无穷小代换，致使运算复杂，而出现错误.

(3)在③处忘记 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln z=-\dfrac{1}{6}$，错误地认为 $\lim\limits_{n\to\infty}z=-\dfrac{1}{6}$.

小结　对于通项由递推公式表示的极限问题，在往年研究生入学考试中多次出现. 其中利用单调有界数列必有极限准则时，证明数列单调性与证明数列有界性是两个独立得分点，通常不分先后次序. 往年题目中又常出现证明$\{x_n\}$存在极限，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中证明$\{x_n\}$存在极限与求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 也是两个独立得分点，也可以不分先后次序求之.

3. 无穷多项和式极限问题（B级）

对于无穷多项和式的极限问题通常可以考虑：利用夹逼准则将其转化为有限项极限问题，或利用定积分定义将其转化为定积分求解，或两种方法结合使用.

例 7(02－2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n}{n}\pi}\right)=$________.

分析　本题考查的知识点　利用定积分的定义求极限.

所给极限为无穷多项求和的极限问题. 这里不能利用夹逼定理，因此考虑利用定积分的定义.

记 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，意味着区间长度为 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n}{n}\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi},$$

因此若取第一个点 $\xi_1=\dfrac{1}{n}$，则区间左端点 $a=0$，右端点 $b=1$.

$$f(\xi_i)=\sqrt{1+\cos(\xi_i\pi)},\quad f(x)=\sqrt{1+\cos(\pi x)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n}{n}\pi}\right)$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\cos(\pi x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

本题难度系数　0.360

点拨　本题解题技巧　利用定积分的定义求无穷多项和的极限是常见的方法. 在上述运算中, Δx_i 的取法不唯一. 注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}$, 若取第一个点为 $\xi_1=\frac{\pi}{n}$, 那么应取 $\Delta x_i=\frac{\pi}{n}$, 这意味着区间长度为 π. 因此区间左端点 $a=0$, 右端点 $b=\pi$. 而

$$f(\xi_i)=\sqrt{1+\cos\xi_i},\quad f(x)=\sqrt{1+\cos x},$$

因此

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2}{n}\pi}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n}{n}\pi}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.\end{aligned}$$

例8(04—2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于(　　).

(A) $\int_1^2\ln^2x\,\mathrm{d}x$　(B) $2\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x$　(C) $2\int_1^2\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)\,\mathrm{d}x$

分析　本题考查的知识点　利用定积分的定义求极限.

与例7相仿,所给极限也属于无穷多项求和的极限. 但与例7不同的是式中没有出现 $\frac{1}{n}$. 可以先将求极限的表达式变形:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right).\end{aligned}$$

若取 $\xi_1=\frac{1}{n}$, 则取 $f(x)=\ln(1+x)$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, 区间左端点 $a=0$, 右端点 $b=1$, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=2\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

若取 $\xi_1=1+\frac{1}{n}$, 则取 $f(x)=\ln x$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, 区间左端点 $a=1$, 右端点 $b=2$, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=2\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x.$$

可知应选(B).

本题难度系数　0.427

点拨　本题解题技巧　为了将所给极限化为定积分定义的形式,需将所给求极限的表达式恒等变形,使其出现 $\frac{1}{n}$, 从而能找到 Δx_i.

例 9(98－1)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}$.

分析　**本题考查的知识点**　利用夹逼定理和定积分的定义两种方法综合使用求极限.

所给极限也为无穷多项和的极限问题，但本题不能只利用夹逼定理求解，也不能只利用定积分定义求解. 本题可以考虑将两种方法综合使用.

由于
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi,$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}>\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi,$$

且
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi\\&=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

由夹逼准则，可知
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}=\frac{2}{\pi}.$$

本题难度系数　0.080

点拨　本题为历年来研究生入学试题中难度值最高的题，满分 6 分，平均得分不到 1 分，得满分的约为 3%.

4. 基本运算（B 级）

例 10(06－3)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

分析　**本题考查的知识点**　利用数列的性质求极限.

令 $x_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$，当 $n=2k$ 为偶数时，
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{(-1)^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k}=1;$$

当 $n=2k-1$ 为奇数时，
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k-1+1}{2k-1}\right)^{(-1)^{2k-1}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=1,$$

可知$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=1$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1.$$

本题难度系数　0.871

点拨　本题利用数列极限的性质：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

例 11(02—3)　设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

分析　**本题考查的知识点**　等价无穷小代换简化极限运算.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n&=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\\&=\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\overset{(*)}{=\!=}\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.\end{aligned}$$

本题难度系数　0.610

点拨　在(*)处利用等价无穷小代换简化运算. 本题也可以利用连续函数性质、重要极限公式求解.

例 12(98—3)　设函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________.

分析　**本题考查的知识点**　连续函数求极限的性质、极限公式.

当 $b_0\neq0$ 时.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n,\\0, & m>n,\\\infty, & m<n.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(a\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\ln a\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}.\end{aligned}$$

本题难度系数　0.780

例 13(08—4)　设 $0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=($　　$)$.

(A)a　　(B)a^{-1}　　(C)b　　(D)b^{-1}

分析　**本题考查的知识点**　复合函数极限.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}$.

故选择(B).

本题难度系数　0.647

点拨 考生中常见的错误是将所给极限误认为:

$$\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{b}.$$

也有考生将所给极限与重要极限公式相混淆.

例 14(90—4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

分析 ***本题考查的知识点*** 极限的四则运算法则,无穷小量的性质.

所给极限为"$\infty-\infty$"型,且两个表达式均含有根式,将其有理化.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\xlongequal{(*)}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.\end{aligned}$$

点拨 由例 12 基本公式的外延,可知上述(*)直接可得出结论为 2.

本题运算意在强调:无穷大运算通常要转化为无穷小运算.

例 15(98—4) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$($n$ 为正整数).

分析 ***本题考查的知识点*** 函数极限与子列极限的性质,洛必达法则.

所给问题为幂指函数的极限问题.由于 n 为离散变量,本题不能直接利用洛必达法则求解.可以先将所给问题化为连续的函数,求出其极限,再利用子列极限性质:

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则对$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_i}\}$,必有$\lim\limits_{n_i\to\infty}x_{n_i}=A$.

为此先求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$,而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right)},$$

令 $t=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{t\to0^+}e^{\frac{\ln\sin t-\ln\cos t-\ln t}{t^2}}.$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\sin t-\ln\cos t-\ln t}{t^2}&=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}+\frac{\sin t}{\cos t}-\frac{1}{t}}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{2t^2\sin t\cdot\cos t}\\&\xlongequal{①}\lim_{t\to0^+}\frac{2t-\sin 2t}{4t^3}\cdot\frac{1}{\cos t}=\lim_{t\to0^+}\frac{2t-\sin 2t}{4t^3}\end{aligned}$$

$$\overset{②}{=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{2-2\cos 2t}{12t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{(2t)^2}{2}}{6t^2}=\frac{1}{3},$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\frac{1}{3}}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}.$$

本题难度系数　0.280

点拨　**本题解题技巧**　(1)将离散变量 $n\to\infty$ 化为连续变量 $x\to+\infty$，从而使 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 可以化为利用洛必达法则求解.

(2)引入倒代换 $t=\frac{1}{x}$，使

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\sin t-\ln\cos t-\ln t}{t^2}.$$

(3)在①处利用等价无穷小代换.

典型运算错误　(1)有些考生没有考虑利用子列的性质，不将 n 换为 x，直接对正整数 n 求导数，导致错误.

(2)有些考生在上述②处对分子 $2t-\sin 2t$ 利用等价无穷小代换，误认为 $2t-\sin 2t\sim 0$，从而导致错误.