霍奈二氏代數學

下册

Hall, Knight 著

姚元基 吳廉方譯

商務印書館發行

霍奈二氏代數學

下册

Hall, Knight 著
姚元基 吴廉方譯

商務印書館發行

中華民國二十九年五月初版
中華民國三十八年九月三版

(51414)

霍奈二氏代數學二冊

Algebra for Colleges and Schools

每部基價貳拾捌元
印刷地點外另加運費

原著者 Hall Knight
譯述者 姚元基 吳廉方

發行人 陳懋解 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

（本書校對者 胡達聰 陳杰 徐培生 盧金聲）

第三十三章

比 比例 變數法

336. 定義 一量與同類他量之關係,以比較一量所含他量之倍數或部分者謂之**比**.

A與B之比恆書如$A:B$, A量與B量名爲比之二項,第一項名**前項**或**前率**,第二項名**後項**或**後率**.

337. 用分數表比 欲求A爲B之幾倍或幾部分,可以B除A而得,因此,$A:B$之比可用分數$\frac{A}{B}$記之,採用此記數法時,極爲便利.

欲比較兩量,必表如同單位之各數方可. 由是,2圓與15分之比,須用分數$\frac{2\times 100}{15}$或$\frac{40}{3}$計之.

[註] 旣一量含有他量之倍數謂之比,則每一比各爲不名量.

338. 依136款,$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$;故$a:b$之比等於$ma:mb$之比,即設前項與後項以同量乘之或除之,則比值仍不變.

339. 比之比較 兩個或兩個以上之比,可以其等值之分數化成公分母而比較之. 由是,假定$a:b$與$x:y$

爲兩個比. 今 $\frac{a}{b}=\frac{ay}{by}$ 及 $\frac{x}{y}=\frac{bx}{by}$ 亦爲兩個比,因此,$a:b$ 之比是否大於,等於或小於 $x:y$,須視 ay 大於,等於或小於 bx 而定.

340. 兩分數之比,能表作一如兩整數之比. 由是,$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ 之比,可以 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ 或 $\frac{ad}{bc}$ 表之,故亦即等於 $ad:bc$.

341. 設比之兩項中,有一項或兩項俱爲不盡根量,則不能求得適能量其比之兩整數. 由是,$\sqrt{2}:1$ 不能以任何兩項數完全表之.

342. 設任何兩量之比適能以二整數之比表之,則此兩量稱爲**可通約量**,否則稱爲**不可通約量**.

兩不可通約量之比雖不能適求得兩整數以表之,然恆能求得與所求之比相差至微之二整數表之.

由是, $$\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236067\cdots\cdots}{4}=0.559016\cdots\cdots,$$

故 $$\frac{\sqrt{5}}{4}\text{ 爲 }>\frac{559016}{1000000}\text{ 及 }<\frac{556017}{1000000};$$

顯見愈使小數延長,其近似值愈高.

343. 若以成比之兩分數相乘,則成**複比**.

例題 求三比 $2a:3b$, $6ab:5c^2$, $c:a$ 之複比.

所需之比 $=\frac{2a}{3b}\times\frac{6ab}{5c^2}\times\frac{c}{a}=\frac{4a}{5c}$.

344. 當兩等比 $a:b$ 與 $a:b$ 混合時，則結果之比爲 $a^2:b^2$，此名謂 $a:b$ 之**二乘比**，同理 $a^3:b^3$ 名謂 $a:b$ 之**三乘比**，又 $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ 名謂 $a:b$ 之**平方根比**.

例題 (1) $2a:3b$ 之二乘比爲 $4a^2:9b^2$.

(2) $49:25$ 之平方根比爲 $7:5$.

(3) $2x:1$ 之三乘比爲 $8x^3:1$.

345. 比之謂爲成**優比**者或爲成**劣比**者，須視前項大於或小於後項而定.

346. 設於 $8:3$ 之比之各項上加以 4，則得一新比 $12:7$，並知此新比小於原比，因 $\frac{12}{7}$ 顯然小於 $\frac{8}{3}$ 之故也.

此即茲將證明一般命題之特例.

比之兩項加以同量，則優比減少而劣比增加.

令 $\frac{a}{b}$ 爲此比，而令 $\frac{a+x}{b+x}$ 爲加 x 於兩項後所成之新比

令 $$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)},$$

而 $a-b$ 之爲正或爲負須視 a 大於或小於 b 而定.

因此，設 a 爲 $>b$， $\frac{a}{b}$ 爲 $>\frac{a+x}{b+x}$.

且設 a 爲 $<b$， $\frac{a}{b}$ 爲 $<\frac{a+x}{b+x}$

命題乃得以此證明.

同理,可證明若從比之兩項取出同量則優比增加而劣比減少.

347. 若兩個或兩個以上之比相等,則若干重要之命題可以單一記號表示各等比而證明之.

如下列重要定理之證明係說明其程序之法.

設 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots,$$

是各比 $=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}},$

其中 $p, q, r, n,$ 不論任何之量皆可.

令 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k.$$

則 $$a=bk,\ c=dk,\ e=fk,\cdots,$$

於是 $$pa^n=pb^nk^n,\ qc^n=qd^nk^n,\ re^n=rf^nk^n\cdots,$$

$$\therefore \frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=\frac{pb^nk^n+qd^nk^n+rf^nk^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=k^n.$$

$$\therefore \left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots.$$

與 $p, q, r\ n,$ 以不同之值,可推出此一般命題之特例.或可用同一之方法單獨證明之.例如,設

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f},\text{其各比}=\frac{a+c+e}{b+d+f},$$

此結果可如是述之. 當一組分數相等時,則其中每一分數,等於以一切分母之和除一切分子之和.

例題1. 設 $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$,求 $\frac{5x-3y}{7x+2y}$ 之值.

$$\frac{5x-3y}{7x+2y}=\frac{\frac{5x}{y}-3}{\frac{7x}{y}+2}=\frac{\frac{15}{4}-3}{\frac{21}{4}+2}=\frac{3}{29}.$$

例題2. 兩數成5:8之比,設兩項各加9則成8:11之比,求此二數.

令兩數以$5x$與$8x$表之.

則 $$\frac{5x+9}{8x+9}=\frac{8}{11},\quad \therefore x=3$$

因此兩數爲15與24.

例題3. 設$A:B$爲$A+x:B+x$之二乘比,試證$x^2=AB$.

依已知之條件,$\left(\frac{A+x}{B+x}\right)^2=\frac{A}{B}$,

$$\therefore B(A+x)^2=A(B+x)^2.$$

$$A^2B+2ABx+Bx^2=AB^2+2ABx+Ax^2,$$

$$x^2(A-B)=AB(A-B),$$

$$\therefore x^2=AB,$$

因依假定$A-B$不爲零.

習題 XXXIII. *a*.

求下各式之複比

1. $4:3$之二乘比與$27:8$之比.

2. $32:27$之比與$3:4$之三乘比.

3. $25:36$之平方根比,與$6:25$之比.

4. $x:y$之三乘比與$2y^2:3x^2$之比.

5. $3a:4b$與之比與$b^4:a^4$之平方根比.

6. 設$x:y=5:7$,求$x+y:y-x$之值.

7. 設$\frac{x}{y}=3\frac{1}{3}$,求$\frac{x-3y}{2x-5y}$之值.

8. 設$b:a=2:5$,求$2a-3b:3b-a$之值.

9. 設$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$,而$\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$,求$\frac{3ax-by}{4by-7ax}$之值.

10. 設$7x-4y:3x+y=5:13$,求$x:y$之比.

11. 設$\frac{2a^2-3b^2}{a^2+b^2}=\frac{2}{41}$,求$a:b$之比.

12. 設$2x:3y$爲$2x-m:3y-m$之二乘比,試證$m^2=6xy$.

13. 設$P:Q$爲$P-x:Q-x$之平方根比,試證$x=\frac{PQ}{Q+Q}$.

14. 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,試證其每一比各等於

$$\sqrt[3]{\frac{2a^2c+3c^3e+4e^2c}{2b^2d+3d^3e+4f^2d}}.$$

15. 二數之比爲3:4.若各減7,則餘數之比爲2:3,求二數.

16. 27:35每項各減何數則成2:3.

17. 37:29每項各加何數則成8:7.

18. 設$\frac{p}{b-c}=\frac{q}{c-a}=\frac{r}{a-b}$,求證$p+q+r=0$.

19. 設$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a-b}$,求證$x-y+z=0$.

20. 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,求證

$$\frac{a^6b-2c^5e+3a^4c^3e^2}{b^7-2d^5f+3b^4cd^2e^2}\text{之平方根等於}\frac{ace}{bdf}$$

21. 設$a:b$, $c:d$, $e:f$三比彼此互等,試證,$la+mc+ne:lb+md+nf$等於此各比.又設此三比彼此不等,試證其在最大者及最小者之間之值.

22. 設$\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{x+y}{x+z}$,除非$b+c=0$,則此諸分數各等於$\frac{x}{y}$.

23. 設$\frac{2x-3y}{3z+y}=\frac{z-y}{z-x}=\frac{x+3z}{2y-3x}$,試證此諸比各等於$\frac{x}{y}$,因此求證$x=y$,或$z=x+y$.

比　　例

348. 定義　若第一項對第二項之比等於第三項對第四項之比,則四量成比例.此四量稱爲比例量或稱比例項.由是,設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,則a, b, c, d皆爲比例量.此可謂a對b之比適如c對d之比,而其比例式可書如

$$a : b :: c : d,\text{或}\ a : b = c : d.$$

a與d兩項名爲外項,b與c兩項名爲中項.

349. 設四量成比例,則外項之積等於中項之積.

令a, b, c, d爲比例量.

則依定義　　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

於是　　$ad=bc.$

因此設比例之任何三項爲已知,則第四項不難求之,由是設已知a, c, d,則$b=\frac{ad}{c}$.

反之,設有任何四量a, b, c, d如$ad=bc$,則a, b, c, d皆爲比例量.a及d爲外項,b及c爲中項,或a及d爲中項,b及c爲外項.

350. 連比例　量之成連比例者,當第一項與第二項之比,猶如第二項與第三項之比,猶如第三項與第四項之比,餘仿此.由是若

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots.$$

則 $a, b, c, d, \cdots$ 成連比例.

設 a, b, c 三量成連比例,則

$$a:b=b:c$$

$$\therefore \quad ac=b^2. \qquad [349 款.]$$

在上之情形中,b 名謂在 a 與 c 間之比例中項,而 c 名謂對 a 與 b 之第三比例量.

351. 設三量成比例量,則第一量與第三量之比爲第一量與第二量之二乘比.

令三量爲 a, b, c, 則 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

今 $$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2},$$

卽. $$a:c=a^2:b^2.$$

352. 兩個或兩個以上比例之對應項之積仍爲比例.

設 $a:b=c:d$, 而 $e:f=g:h$, 則

$$ae:bf=cg:dh.$$

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 及 $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, $\therefore \frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$, 或 $ae:bf=cg:dh$.

推論. 設 $a:b=c:d,$

又 $b:x=d:y,$

則 $a:x=c:y.$

353. 比例之移項 設四量a, b, c, d成比例,則其他諸比例皆可依分數之特性而推出.此等運算之結果用途殊廣,且其中尚有若干可由幾何學中直接引證之.

(1) 設 $a:b=c:d$, 則 $b:a=d:c.$ [倒置法.]

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}.$

即 $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

或 $$b:a=d:c.$$

(2) 設 $a:b=c:d$, 則 $a:c=b:d.$ [交換法.]

因 $ad=bc$, 故 $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd},$

即 $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

或 $$a:c=b:d.$$

(3) 設 $a:b=c:d$, 則 $a+b:b=c+d:d$ [比較法.]

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1.$

卽，
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

或
$$a+b:b=c+d:d.$$

(4) 設 $a:b=c:d$, 則 $a-b:b-c-d:d$. [除法.]

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$.

卽，
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

或
$$a-b:b=c-d:d.$$

(5) 設 $a:b=c:d$, 則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

[比較法及除法.]

因依 (3) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, 又依 (4) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,

∴ 用除法
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

或
$$a+b:a-b=c+d:c-d.$$

尙有其他命題可用相似之方法證明之.

例題 1 設 $a:b=c:d=e:f$,

證 $2a^2+3c^2-5e^2:2b^2+3d^2-5f^2=ae:bf$.

令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, 則 $a=bk$, $c=dk$, $e=fk$.

$$\therefore \frac{2a^2+3c^2-5e^2}{2b^2+3d^2-5f^2}=\frac{2b^2k^2+3d^2k^2-5f^2k^2}{2b^2-3d^2-5f^2}=k^2=\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}=\frac{ae}{bf}.$$

或 $$2a^2+3c^2-5e^2:2b^2+3d^2-5f^2=ae:bf.$$

例題2 設 $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$

$$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d),$$

證 a, b, c, d 成比例.

卽有 $$\frac{3a+6b+c+2d}{3a-6b+c-2d}=\frac{3a+6b-c-2d}{3a-6b-c+2d}.$$ [349 款.]

比較法及除法, $$\frac{2(3a+c)}{2(6b+2d)}=\frac{2(3a-c)}{2(6b-2d)}.$$

交換法, $$\frac{3a+c}{3a-c}=\frac{6b+2d}{6b-2d}.$$

又用比較法及除法 $$\frac{6a}{2c}=\frac{12b}{4d},$$

於是 $$a:b=c:d.$$

例題3 解方程式 $\dfrac{x^2+x-2}{x-2}=\dfrac{4x^2+5x-6}{5x-6}.$

用除法, $$\frac{x^2}{x-2}=\frac{4x^2}{5x-6},$$

於是, 以 x^2 除之, 其解答爲 $x=0$, [291 款註.]

$$\frac{1}{x-2}=\frac{4}{5x-6}, \text{於是 } x=-2.$$

故其二根爲 $0, -2$.

習 題 XXXIII. *b*.

求下之比例第四項:

1. a, ab, c. 2. $a^2, 2ab, 3b^2$, 3. $x^3, xy, 5x^2y$,

求下之比例第三項

4. a^2b, ab. 5. $x^3, 2x^3$. 6. $3x, 6xy$. 7. $1, x$.

求下之比例中項.

8. a^2, b^2. 9. $2x^3, 8x$. 10. $12ax^2, 3a^3$. 11. $27a^2b^3, 3b$.

設 a, b, c 爲三個比例量,試證

12. $a : a+b = a-b : a-c$.

13. $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)=b^4+ac^3+c^4$.

設 $a : b = c : d$, 試證

14. $ab+cd : ab-cd = a^2+c^2 : a^2-c^2$.

15. $a^2+ac+c^2 : a^2-ac+c^2 = b^2+bd+d^2 : b^2-bd+d^2$.

16. $a : b = \sqrt{3a^2+5c^2} : \sqrt{3b^2+5d^2}$.

17. $\frac{a}{p}+\frac{b}{q} : a = \frac{c}{p}+\frac{d}{q} : c$.

18. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b} : \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{d}{c}+\frac{c}{d} : \frac{cd}{c^2+d^2}$.

解下各方程式

19. $3x-1 : 6x-7 = 7x-10 : 9x+10$.

20. $x-12 : y+3 = 2x-19 : 5y-13 = 5 : 14$.

21. $\frac{x^2-2x+3}{2x-3} = \frac{x^2-3x+5}{3x-5}$.

22. $\frac{2x-1}{x^2+2x-1} = \frac{x+4}{x^2+x+4}$.

23. 設 $(a+b-3c-3d)(2a-2b-c+d)$

$$=(2a+2b-c-d)(a-b-3c+3d)$$

試證 a, b, c, d 皆爲比例量.

24. 設 a, b, c, d 成連比例, 試證

$$a:b=a^3+b^3+c^3:b^3+c^3+d^3.$$

25. 設 b 爲 a 與 c 之比例中項, 求證

$4a^2-9b^2$ 及 $4b^2-9c^2$ 之比爲 a 及 b 之二乘比.

26. 設 a, b, c, d 成連比例, 試證 $b+c$ 爲 $a+b$ 及 $c+d$ 之比例中項.

27. 設 $a+b:b+c=c+d:d+a$, 試證 $a=c$, 或 $a+b+c+d=0$.

變數法

354. 定義 有互相關聯之兩量設變 B 量而 A 量以同比變之, 則 A 量謂之因 B 量正變.

[註] 原文中"A 量因 B 量正變"中之"正"一字恆從略, 故可逕言 A 因 B 變.

355. 例如, 設一火車以等速開行, 60 分鐘行 40 哩, 則 30 分鐘行 20 哩, 120 分鐘行 80 哩, 餘仿此. 在每一情形中距離之增加或減少爲與時間同比. 此亦可謂